Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza"—Iaşi
Secţia I a. Matematică, tom XX, 1971

# STUDIUL DIFERENŢIAL AL UNEI VARIETĂŢI MYLLER BIDIMENSIONALE ÎN SPAŢIUL AFIN-UNIMODULAR ($A_3$)

DE

A. ROMAN

Folosind noţiunea de direcţii paralele într-un sistem de plane în lungul unei curbe, introdusă de A. Myller [6], G. Gheorghiev, I. Popa şi I. Miron au elaborat studii într-o serie de lucrări [2—4,6] privind diferite varietăţi pe care le-au numit varietăţi sau configuraţii Myller în spaţiile proiectiv, afin şi euclidian.

În prezenta Notă ne propunem să studiem o anumită configuraţie Myller bidimensională în spaţiul afin-unimodular care în spaţiul proiectiv a fost studiată de E. Vamanu [7].

Considerăm o suprafaţă $(S)$ în spaţiul afin-unimodular cu trei dimensiuni. Varietatea ce urmează a fi studiată are element generator un punct $A \in (S)$, un plan $(a)$ ce conţine o dreaptă $(d)$ nesituată în planul tangent la $(S)$, ambele trecînd prin punctul $A$. Metoda de lucru va fi cea a reperului mobil al lui E. Cartan. Ecuaţiile generale de mişcare sînt:

$$dA = \omega^k e_k, \qquad de_k = \omega_k^j e_j, \qquad (j, k = 1, 2, 3), \tag{1}$$

unde $e_j$ sînt trei vectori liniar independenţi cu originea comună $A$. Ecuaţiile de structură sînt:

$$d\omega^k = [\omega^i, \omega_i^k], \qquad d\omega_i^j = [\omega_i^k, \omega_k^j], \qquad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

la care se adaugă relaţia

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0,$$

care exprimă faptul că spaţiul afin considerat este unimodular.

În cele ce urmează vom alege reperul astfel încît să aibă semnificaţie intrinsecă, cu care ocazie vor apare un număr de invarianţi cărora li se vor da interpretări geometrice.

**1. Alegerea unui reper canonic.** Considerăm reperul cu originea în punctul $A$, axa $e_3$ pe dreapta $(d)$, axa $e_1$ în planul $(a)$, iar axa $e_2$ în afara planului. În familia reperelor de ordinul zero cerem ca la variația parametrilor secundari, punctul $A$, dreapta $(d)$ și planul $(a)$ să rămînă fixe, ceea ce se exprimă prin relațiile

$$\pi^1 = \pi^2 = \pi^3 = \pi_3^1 = \pi_3^2 = \pi_1^2 = 0.$$

Înseamnă că formele $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_1^2$ au devenit principale.

Presupunînd $[\omega^1, \omega^2] \neq 0$, rezultă că aceste forme constituie o bază, și deci:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \omega^3 &= a_1^3\,\omega^1 + a_2^3\,\omega^2, & \omega_1^2 &= a_{11}^2\,\omega^1 + a_{12}^2\,\omega^2,\\ \omega_3^1 &= a_{31}^1\,\omega^1 + a_{32}^1\,\omega^2, & \omega_3^2 &= a_{31}^2\,\omega^1 + a_{32}^2\,\omega^2, \end{aligned}$$

în care cantitățile $a$ sînt coeficienții de descompunere. Diferențiind exterior relațiile (1) și ținînd seama de ecuațiile de structură obținem:

$$(2)\quad \begin{cases} [da_1^3 - a_1^3(2\omega_1^1 + \omega_2^2) + \omega_1^3, \omega^1] + [da_2^3 - a_2^3(\omega_1^1 + 2\omega_2^2) - a_1^3\,\omega_2^1 + \omega_2^3, \omega^2] + \\ \quad + \{(a_1^3)^2 a_{32}^1 - a_1^3 a_2^3 a_{31}^1 + a_2^3 a_{12}^2 + a_1^3 a_2^3 a_{32}^2 - (a_2^3)^2 a_{31}^2\}[\omega^1, \omega^2] = 0,\\ [da_{11}^2 - a_{11}^2(2\omega_1^1 - \omega_2^2) - a_{31}^2\,\omega_1^3, \omega^1] + [da_{12}^2 - a_{12}^2\,\omega_1^1 - a_{11}^2\,\omega_2^1 - a_{32}^2\,\omega_1^3, \omega^2] + \\ \quad + \{a_{11}^2(a_1^3 a_{32}^1 - a_2^3 a_{31}^1) + a_{12}^2(a_1^3 a_{32}^2 - a_2^3 a_{31}^2) + (a_{12}^2)^2\}[\omega^1, \omega^2] = 0,\\ [da_{31}^1 + a_{31}^1(\omega_1^1 + \omega_2^2) + a_{31}^2\,\omega_2^1, \omega^1] + [da_{32}^1 + 2a_{32}^1\,\omega_1^1 + (a_{32}^2 - a_{31}^1)\,\omega_2^1, \omega^2] + \\ \quad + \{a_1^3 a_{31}^1 a_{32}^1 - a_2^3(a_{31}^1)^2 + a_{12}^2 a_{32}^1 + a_1^3 a_{32}^1 a_{32}^2 - a_2^3 a_{31}^1 a_{31}^2\}[\omega^1, \omega^2] = 0,\\ [da_{31}^2 + 2a_{31}^2\,\omega_2^2, \omega^1] + [da_{32}^2 + a_{32}^2(\omega_1^1 + \omega_2^2) - a_{31}^2\,\omega_2^1, \omega^2] + \{a_1^3 a_{31}^2 a_{32}^1 - \\ \quad - a_2^3 a_{31}^1 a_{31}^2 + a_{12}^2 a_{32}^2 + a_1^3(a_{32}^2)^2 - a_2^3 a_{31}^2 a_{32}^2 - a_{31}^1 a_{12}^2 + a_{11}^2 a_{32}^1\}[\omega^1, \omega^2] = 0 \end{cases}$$

care, la variația parametrilor secundari, devin:

$$(3)\quad \begin{cases} \delta a_1^3 - a_1^3(2\pi_1^1 + \pi_2^2) + \pi_1^3 = \delta a_2^3 - a_2^3(\pi_1^1 + 2\pi_2^2) - a_1^3\pi_2^1 + \pi_2^3 = 0,\\ \delta a_{11}^2 - a_{11}^2(2\pi_1^1 - \pi_2^2) - a_{31}^2\pi_1^3 = \delta a_{12}^2 - a_{12}^2\pi_1^1 - a_{11}^2\pi_2^1 - a_{32}^2\pi_2^3 = 0,\\ \delta a_{31}^1 + a_{31}^1(\pi_1^1 + \pi_2^2) + a_{31}^2\pi_2^1 = \delta a_{32}^1 + 2a_{32}^1\pi_1^1 + (a_{32}^2 - a_{31}^1)\pi_2^1 = 0,\\ \delta a_{31}^2 + 2a_{31}^2\pi_2^2 = \delta a_{32}^2 + a_{32}^2(\pi_1^1 + \pi_2^2) - a_{31}^2\pi_2^1 = 0. \end{cases}$$

Din primele două ecuații se vede că putem lua fără a restrînge generalitatea $a_1^3 = a_2^3 = 0$ ceea ce dă $\pi_1^3 = \pi_2^3 = 0$. Această fixare are semnificația că planul $e_1, e_2$ este tangent suprafeței $(S)$, deci $e_1$ este tangent secțiunii suprafeței cu planul $(a)$.

Observăm că dacă $a_{31}^2 = a_{12}^2 = a_{31}^2 = a_{32}^2 = 0$, ecuațiile a treia, a patra și ultimele din (3) nu fixează nici un parametru secundar. Ecuațiile $\omega_2^1 = \omega_3^2 = 0$ exprimă, ținînd seama de semnificația vectorilor $e_1$ și $e_3$ și de diferențialele lor, că planele $(a)$ sînt paralele. Dacă $a_{31}^2 = a_{32}^2 = a_{31}^1 = a_{32}^1 = 0$, deci $\omega_3^2 = \omega_3^1 = 0$, dar $\omega_1^2 \neq 0$, cum arată diferențiala vectorului $e_3$, dreptele



congruenței $(e)$ a configurației sînt paralele. Se poate considera și cazul cînd anularea acestor coeficienți are loc simultan. În această situație atît dreptele congruenței $(e)$ cît și planele $(a)$ ale configurației sînt paralele. Excludem aceste cazuri.

Considerăm focarele congruenței

$$F_k = A + \lambda_k e_2, \qquad (k = 1, 2).$$

Abscisele $\lambda_k$ sînt date de ecuația

$$(4)\qquad (a_{31}^1 a_{32}^2 - a_{31}^2 a_{32}^1)\lambda^2 + (a_{31}^1 + a_{32}^2)\lambda + 1 = 0,$$

iar desfășurabilele congruenței de ecuația

$$(5)\qquad a_{31}^2(\omega^1)^2 + (a_{32}^2 - a_{31}^1)\,\omega^1\omega^2 - a_{32}^1(\omega^2)^2 = 0.$$

Să considerăm cazul cînd congruența de drepte degenerează într-o stea de drepte. Pentru aceasta fie

$$M = A + te_3,$$

un punct al razei. Impunem condiția ca el să fie fix. Aceasta se întîmplă atunci cînd $dM \equiv 0$. Diferențiind relația de mai sus obținem:

$$dM = (\omega^1 + t\omega_3^1)\,e_1 + (\omega^2 + t\omega_3^2)\,e_2 + (dt + t\omega_3^3)\,e_3 \equiv 0,$$

adică

$$\omega^1 + t\omega_3^1 = \omega^2 + t\omega_3^2 = dt + t\omega_3^3 = 0.$$

Notînd

$$dt = t_k\,\omega^k, \qquad \omega_i^j = a_{ik}^j\,\omega^k, \qquad (i, j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2),$$

obținem

$$1 + ta_{31}^1 = 1 + ta_{32}^2 = a_{32}^1 = a_{31}^2 = t_1 + ta_{31}^3 = t_2 + ta_{32}^3 = 0,$$

și din compararea primelor două, rezultă

$$a_{31}^1 = a_{32}^2.$$

Dacă $a_{31}^1 = 0$, regăsim cazul considerat mai sus, iar dacă $a_{31}^1 \neq 0$, obținem o stea de drepte proprie. Acum ecuația (4) devine

$$(a_{31}^1 t + 1)^2 = 0,$$

cum era de așteptat, iar ecuația (5) este identic verificată, întrucît orice riglată a congruenței fiind con este desfășurabilă. Excludem din considerațiile următoare această situație. Revenind la cazul general, observăm din a cincea și ultima ecuație (3) că

$$(6)\qquad \delta(a_{31}^1 + a_{32}^2) = \pi_3^3(a_{31}^1 + a_{32}^2).$$

Se vede că relația

$$(6_1) \qquad a^1_{31} + a^2_{32} = 0,$$

exprimă un fapt geometric. În adevăr, așa cum arată ecuația (4), suprafața $(S)$ are calitatea de suprafață medie a congruenței.

Mai observăm, folosind ecuațiile (3) împreună cu (4) sau (5) că discriminantul, după semnul căruia congruența este eliptică, parabolică sau hiperbolică, se comportă la variația parametrilor secundari de mai sus, astfel:

$$(7) \qquad \delta\,\{(a^1_{31})^2 + (a^2_{32})^2 - 2a^1_{31}\,a^2_{32} + 4a^2_{31}\,a^1_{32}\} = \pi^3_3\,\{(a^1_{31})^2 + (a^2_{32})^2 - 2a^1_{31}a^2_{32} + 4a^2_{31}a^1_{32}\}.$$

La fel ca mai sus se vede că dacă

$$(7_1) \qquad (a^1_{31})^2 + (a^2_{32})^2 - 2a^1_{31}\,a^2_{32} + 4a^2_{31}\,a^1_{32} = 0,$$

congruența este parabolică.

În afară de aceasta, să considerăm planul $(a)$, a cărui ecuație este:

$$(P - A,\, e_1,\, e_3) = 0.$$

Punctul caracteristic al planului este dat de această ecuație, împreună cu ecuația derivată:

$$u^1u^2u^3\omega^2 + (P - A,\, e_2,\, e_3)\,\omega^2_1 + (P - A,\, e_1,\, e_2)\,\omega^2_3 = 0,$$

$u^1, u^2, u^3$ însemnînd, respectiv, coordonata nenulă a vîrfurilor axelor $e_1, e_2, e_3$. Notînd cu $x, y, z$, coordonatele punctului $P$ și ținînd seama de expresiile formelor $\omega^2_1$ și $\omega^2_3$ și de faptul că $[\omega^1, \omega^2] \neq 0$, ecuația de mai sus se transcrie astfel:

$$(*) \qquad a^2_{11}\,xu^3 + a^2_{31}\,zu^1 = 0, \qquad a^2_{12}\,xu^3 + a^2_{32}\,zu^1 + u^1u^3 = 0.$$

Pentru realizarea scopului propus putem folosi aceste relații cerînd să fie îndeplinite anumite condiții de natură geometrică. Să pornim cu ecuațiile ce dau punctul caracteristic și să cerem ca el să fie punctul unitate $U_y$ al planului $(e_1, e_3)$.

Aceasta se exprimă prin relațiile

$$(8) \qquad a^2_{11} + a^2_{31} = a^2_{12} + a^2_{32} + 1 = 0.$$

Ținînd seama de aceste ecuații și de faptul că $\pi^3_1 = \pi^3_2 = 0$, ecuațiile (3) devin:

$$(3') \begin{cases} \delta a^1_{31} + a^1_{31}\,(\pi^1_1 + \pi^2_2) + a^2_{31}\,\pi^1_2 = 0, \\ \delta a^1_{32} + 2a^1_{32}\,\pi^1_1 - (a^1_{31} - a^2_{32})\,\pi^1_2 = 0, \\ \delta a^2_{31} + 2a^2_{31}\,\pi^2_2 = 0, \qquad \delta a^2_{31} - a^2_{31}\,(2\pi^1_1 - \pi^2_2) = 0, \\ \delta a^2_{32} + a^2_{32}\,(\pi^1_1 + \pi^2_2) - a^2_{31}\,\pi^1_2 = 0, \qquad \delta a^2_{32} - (1 + a^2_{32})\,\pi^1_1 - a^2_{31}\,\pi^1_2 = 0. \end{cases}$$



Din compararea ultimei perechi de ecuații rezultă

$$\pi^1_1 + a^2_{32}\,(2\pi^1_1 + \pi^2_2) = 0,$$

de unde urmează că, fără restricții, putem lua $a^2_{32} = 0$, cu care obținem $\pi^1_1 = 0$. Acum, penultima pereche de ecuații (3') dă $a^2_{31}\,\pi^2_2 = 0$, iar ultima ecuație devine $a^2_{31}\,\pi^1_2 = 0$. Presupunînd $a^2_{31} \neq 0$, obținem $\pi^1_2 = \pi^2_2 = 0$. Astfel, reperul obținut este canonic, iar $a^1_{31}$, $a^1_{32}$, $a^2_{31} \neq 0$, sînt invarianți finiți de ordinul întîi.

Ecuațiile (1) devin:

$$(1') \qquad \omega^3 = 0,\ \omega^2_1 = -a^2_{31}\,\omega^1 - \omega^2,\ \omega^1_3 = a^1_{31}\,\omega^1 + a^1_{32}\,\omega^2,\ \ \omega^2_3 = a^2_{31}\,\omega^1.$$

Cazul $a^2_{31} = 0$ trebuie studiat separat.

**Interpretarea vectorului** $e_3$. Considerăm vectorul

$$de_3 = (a^1_{31}\,\omega^1 + a^1_{32}\,\omega^2)\,e_1 + a^2_{31}\,\omega^1\,e_2 + \omega^3_3\,e_3.$$

Deducem de aici că dacă vectorul $e_3$ derivat este paralel cu planul $(a)$, atunci punctul $A$ descrie o curbă pe suprafața $(S)$ la care vectorul $e_2$ este tangent, și reciproc.

Observăm că, în cazul general, nu a fost necesar să folosim ecuațiile (6) și (7). Acum ecuațiile (2), (4), (5), precum și discriminantul ecuației (4) devin, respectiv

$$(2') \begin{cases} [\omega^3_1, \omega^1] + [\omega^3_2, \omega^2] = 0, \\ [da^2_{31} - a^2_{31}\,(2\omega^1_1 - \omega^2_2) + a^2_{31}\,\omega^3_1, \omega^1] + [-\omega^1_1 - a^2_{31}\,\omega^1_2 - \omega^1, \omega^2] = 0, \\ [da^1_{31} + a^1_{31}\,(\omega^1_1 + \omega^2_2) + a^2_{31}\,\omega^1_2, \omega^1] + [da^1_{32} + (2a^1_{32} - a^1_{31})\,\omega^1_2 - a^1_{32}\omega^1, \omega^2] = 0, \\ [da^2_{31} + 2a^2_{31}\,\omega^2_2, \omega^1] + [-a^2_{31}\,\omega^1_2 + (a^1_{31} - a^2_{31}\,a^1_{32})\,\omega^1, \omega^2] = 0, \end{cases}$$

$$(4') \qquad a^2_{31}\,a^1_{32}\,\lambda^2 - a^1_{31}\,\lambda - 1 = 0,$$

$$(5') \qquad \begin{aligned} & a^2_{31}\,(\omega^1)^2 - a^1_{31}\,\omega^1\,\omega^2 - a^1_{32}\,(\omega^2)^2 = 0, \\ & \Delta = (a^1_{31})^2 + 4a^2_{31}\,a^1_{32}. \end{aligned}$$

Se vede că suprafața $(S)$ este suprafața medie pentru congruența $(c)$, dacă și numai dacă

$$(6_2) \qquad a^1_{31} = 0,$$

iar congruența $(c)$ este parabolică dacă și numai dacă

$$(7_2) \qquad (a^1_{31})^2 + 4a^2_{31}\,a^1_{32} = 0.$$

Satisfacerea simultană a acestor relații atrage anularea invariantului $a^1_{32}$, deoarece $a^1_{31} \neq 0$. În aceste condiții observăm din ecuația (4') că focarul dublu este la infinit, iar suprafața medie poate fi oarecare, în particular suprafața suport $(S)$. Cu această ocazie observăm că $\omega^1_3 = 0$, ceea ce expri-

mă că desfășurabila $\omega^1 = 0$ (cum arată ecuația (5')) este cilindru.

Anularea invariantului $a^1_{32}$, cu $a^1_{31} \neq 0$, exprimă că una din desfășurabile este dată de ecuația $\omega^1 = 0$, iar unul din focare este la infinit, și

$$dc_3 = a^1_{31}\,\omega^1 c_1 + a^2_{31}\,\omega^1 c_2 + \omega^3_3 c_3 .$$

Deci desfășurabila $\omega^1 = 0$ este un cilindru, ceea ce confirmă faptul că unul din focare este la infinit. Mai observăm că relațiile $a^1_{31} = 0$, $a^1_{32} \neq 0$ exclud congruențele parabolice.

În felul acesta am dat interpretări geometrice anulării invarianților $a^1_{31}$, $a^1_{32}$ și $\Delta$.

În vederea obținerii ecuațiilor de mișcare a configurației, vom aplica primelor două și celei de a patra ecuație (2') lema lui Cartan. Obținem:

$$(9)\quad \begin{cases} \omega^3_1 = a^3_{11}\,\omega^1 + a^3_{12}\,\omega^2, \quad \omega^3_2 = a^3_{12}\,\omega^1 + a^3_{22}\,\omega^2, \\ da^2_{31} - a^2_{31}\,(\omega^2_2 - 2\omega^1_1) + a^2_{31}\,\omega^3_1 = A\omega^1 + B\omega^2, \\ -\omega^1_1 - a^2_{31}\,\omega^1_2 - \omega^1 = B\omega^1 + C\omega^2, \\ da^2_{31} + 2a^2_{31}\,\omega^2_2 = A_1\,\omega^1 + B_1\,\omega^2, \\ a^2_{31}\,\omega^1_2 = (a^1_{31} + a^2_{31}\,a^1_{32} - B_1)\,\omega^1 - C_1\,\omega^2. \end{cases}$$

Rezolvînd aceste ecuații în raport cu $\omega^1_2$, $\omega^1_1$, $\omega^2_2$, găsim:

$$\omega^1_2 = \frac{a^1_{31} - a^2_{31}\,a^1_{32} - B_1}{a^2_{31}}\,\omega^1 + \frac{-C_1}{a^2_{31}}\,\omega^2 = a^1_{21}\,\omega^1 + a^1_{22}\,\omega^2 ,$$

$$\omega^1_1 = (B_1 - B - a^1_{31} + a^2_{31}\,a^1_{32} - 1)\,\omega^1 + (C_1 - C)\,\omega^2 = a^1_{11}\,\omega^1 + a^1_{12}\,\omega^2,$$

$$\omega^2_2 = \left(2B - 2B_1 + 2a^1_{31} - 2a^1_{31}\,a^1_{32} + 2 + a^3_{11} + \frac{A_1 - A}{a^2_{31}}\right)\omega^1 +$$

$$+ \left(2C - 2C_1 + a^3_{12} + \frac{B_1 - B}{a^2_{31}}\right)\omega^2 = a^2_{21}\,\omega^1 + a^2_{22}\,\omega^2,$$

în care

$$da^2_{31} = -2a^2_{31}\,\omega^2_2 + A_1\,\omega^1 + B_1\,\omega^2,$$

$$a^1_{21} = \frac{a^1_{31} - a^2_{31}\,a^1_{32} - B_1}{a^2_{31}}, \qquad a^1_{22} = -\frac{C_1}{a^2_{31}},$$

$$a^1_{11} = B_1 - B - a^1_{31} + a^2_{31}\,a^1_{32} - 1, \qquad a^1_{12} = C_1 - C,$$

$$a^2_{21} = 2B - 2B_1 + 2a^1_{31} - 2a^2_{31}\,a^1_{32} + 2 + a^3_{11} + \frac{A_1 - A}{a^2_{31}},$$

$$a^2_{22} = 2C - 2C_1 + a^3_{12} + \frac{B_1 - B}{a^2_{31}}.$$



Din compararea exprimărilor diferențialei $da^2_{31}$ rezultă:

$$a^2_{31}\,(2a^1_{12} + a^2_{22} - a^3_{12} + a^1_{32}) - a^1_{31} - a^1_{11} - 1 = 0.$$

În felul acesta s-au obținut opt invarianți de ordinul al doilea: $a^2_{31}$, $a^1_{12}$, $a^3_{22}$, $a^1_{12}$, $a^2_{21}$, $a^2_{22}$, $a^1_{21}$, $a^1_{22}$.

**2. Teorema fundamentală de existență și unicitate.** Fiind date unsprezece funcții $a^k_{ij}$ de două argumente, satisfăcînd la condițiile de regularitate necesare, ele determină configurația noastră dacă sistemul (1) corespunzător este complet integrabil. Pentru aceasta, funcțiile $a^k_{ij}$ trebuie să satisfacă la condițiile de integrabilitate, ce decurg din ecuațiile de structură, ținînd seama de exprimările (1') și (9). Notînd

$$da^k_{ij} = a^k_{ij,1}\,\omega^1 + a^k_{ij,2}\,\omega^2,$$

aceste condiții sînt

$$(10)\quad \begin{cases} a^2_{31,2} + a^2_{31}\,(a^1_{21} - 2a^1_{12} + a^2_{22} + a^2_{12}) + a^1_{11} + 1 = 0, \\ a^1_{32,1} - a^1_{32,2} + a^1_{32}\,(2a^1_{11} - 1) - a^1_{31}\,(a^1_{21} + a^1_{12} + a^2_{22}) - a^2_{31}\,a^1_{22} = 0, \\ a^3_{12,1} - a^3_{11,2} + a^3_{11}\,(2a^1_{12} - a^1_{21} + a^1_{11} + a^2_{21}) - a^3_{12}\,(2 + a^2_{21} + a^1_{11} + a^1_{12} + \\ \qquad + a^2_{22}) + a^2_{31} + a^3_{22} = 0, \\ a^3_{22,1} - a^3_{22,2} + a^3_{12}\,(2a^1_{12} - 2a^1_{21} + 2a^2_{22}) - a^3_{22}\,(1 + 3a^2_{21} + a^1_{11}) + a^3_{11}\,a^1_{22} = 0, \\ a^1_{22,1} - a^1_{22,2} + a^1_{21}\,(a^2_{22} - a^1_{21}) - a^1_{22}\,(1 + 2a^2_{21} - a^1_{11}) - a^3_{12}\,a^1_{32} + a^3_{22}\,a^1_{31} = 0, \\ a^1_{12,1} - a^1_{11,2} + a^1_{11}\,(a^1_{12} - a^1_{21}) - a^1_{12}(1 + a^2_{21}) + a^2_{31} - a^1_{22} - a^1_{21} - a^3_{11}\,a^1_{32} + a^3_{11}\,a^1_{21} = 0, \\ a^2_{21,1} - a^2_{21,2} + a^2_{21}\,(a^1_{12} - a^1_{21}) - a^2_{22}(1 + a^2_{21}) + a^1_{21} - a^1_{22}\,a^2_{31} + a^2_{31}\,a^2_{22} = 0. \end{cases}$$

Acum putem enunța următoarea:

**Teorema fundamentală**: *Dat fiind un spațiu afin unimodular ($A_3$) și unsprezece funcții $a^k_{ij}$, satisfăcînd la relațiile (10), atunci pînă la cea mai generală transformare a spațiului ($A_3$), ele determină în mod unic o varietate Myller de tipul considerat, pentru care aceste funcții sînt invarianții stabiliți mai sus. Determinarea acestei varietăți revine la integrarea următorului sistem:*

$$\begin{cases} dA = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 , \\ de_1 = (a^1_{11}\,\omega^1 + a^1_{12}\,\omega^2)\,e_1 + (-a^2_{31}\,\omega^1 - \omega^2)\,e_2 + (a^3_{11}\,\omega^1 + a^3_{12}\,\omega^2)\,e_3 , \\ de_2 = (a^1_{21}\,\omega^1 + a^1_{22}\,\omega^2)\,e_1 + (a^2_{21}\,\omega^1 + a^2_{22}\,\omega^2)\,e_2 + (a^3_{11}\,\omega^1 + a^3_{22}\,\omega^2)\,e_3 , \\ de_3 = (a^1_{31}\,\omega^1 + a^1_{32}\,\omega^2)\,e_1 + a^2_{31}\,\omega^1 e_2 - \{(a^1_{11} + a^2_{21})\,\omega^1 + (a^1_{12} + a^2_{22})\,\omega^2\}\,e_3 , \end{cases}$$

*în care*

$$a^1_{11} + a^1_{31} - a^2_{31}\,(2a^1_{22} + a^2_{22} - a^3_{12} + a^1_{32}) + 1 = 0.$$

*În ce privește arbitrarietatea soluției, aceasta depinde de o funcție de două variabile.*

**3. Studierea cazului special** $a^2_{31} = 0$. Așa cum am văzut la **1**, anularea coeficientului $a^2_{31}$ are caracter intrinsec.

Ținînd seama de faptul că $a^2_{32} = 0$, prima ecuație (*) este identic verificată, iar a doua împreună cu (8) și (3') devin

$$(11) \qquad x = u^1, \qquad \delta a^1_{31} + a^1_{31}\pi^2_2 = \delta a^1_{32} - a^1_{31}\pi^1_2\, 0 = 0.$$

Prima exprimă că punctul caracteristic este nedeterminat $C(u^1, 0, \lambda)$, ($\lambda$ = variabil). În aceste condiții avem pentru variația vectorilor $e_1$, $e_3$ formulele

$$de_1 = \omega^1_1 e_1 - \omega^2 e_2 + \omega^3_1 e_3, \qquad de_3 = \omega^1_3 e_1 + \omega^3_2 e_3.$$

Aceste ecuații exprimă faptul că atunci cînd punctul $A$ se deplasează pe suprafață în lungul unei linii $\omega^2 = 0$, planul $(a)$ rămîne paralel cu el însuși. Pe de altă parte, vectorul $e_1$ fiind tangent la linia $\omega^2 = 0$, înseamnă că în lungul acestei linii planele $(a)$ se confundă.

Dacă în plus $a^3_{11} = 0$, urmează că în lungul liniei $\omega^2 = 0$, vectorul $e_1$ își păstrează direcția. Ceea ce înseamnă că acea linie este dreaptă și, deci, suprafața $(S)$ este o riglată. Ecuația (4) exprimă că unul din focarele congruenței este la infinit și deci una din desfășurabile este un cilindru a cărui ecuație este $\omega^1_3 = 0$, cum rezultă din ecuația (5).

Pentru fixarea reperului în acest caz, să considerăm suprafața descrisă de extremitatea vectorului $e_3$, la care planul tangent are ecuația

$$a^3_{31}\, xu^2 u^3 + \{a^3_{32}(1 + a^1_{31}) - a^3_{31} a^1_{32}\}\, yu^1 u^3 - (1 + a^1_{31})(z - u^3)\, u^1 u^2 = 0.$$

Să cerem ca acest plan să conțină $e_3$. Pentru aceasta trebuie să avem

$$a^1_{31} + 1 = 0, \qquad a^1_{32} = K \text{ (const.)}.$$

Obținem

$$\pi^2_2 = \pi^1_2 = 0,$$

cu care reperul este fixat. Ecuațiile (1) devin

$$(1''') \qquad \omega^3 = 0, \quad \omega^2_1 = \omega^2, \quad \omega^1_3 = -\omega^1 + K\omega^2, \quad \omega^2_3 = 0,$$

iar ecuațiile (2) se scriu

$$(2''') \qquad \begin{cases} [\omega^3_1, \omega^1] + [\omega^3_2, \omega^2] = [\omega^1_1 + \omega^1, \omega^2] = 0, \\ [\omega^3_3, \omega^1] + [2K\omega^1_1 + \omega^1_2 - K\omega^1, \omega^2] = 0, \end{cases}$$

ultima fiind identic verificată întrucît $\omega^2_3 = 0$. Nu există deci invarianți de ordinul întîi. Ecuația (4) conduce la

$$(4''') \qquad \lambda - 1 = 0,$$

care exprimă că axa $e_3$ este normată prin condiția ca vîrful să se afle în focar. De asemenea ecuația (5) ne dă

$$(5''') \qquad (\omega^1 - K\omega^2)\,\omega^2 = 0.$$



Observăm că pentru $\lambda = 1$ obținem desfășurabila $\omega^2 = 0$, iar pentru $\lambda = \infty$, desfășurabila $\omega^1 - K\omega^2 = 0$, care este un cilindru. Curba de pe suprafața $(S)$, corespunzătoare desfășurabilei $\omega^2 = 0$, are tangente ce se obțin intersectînd planul tangent la suprafața $(S)$ cu planul $(a)$. În particular, dacă constanta $K$ este nulă, suprafața $(S)$ este raportată la desfășurabilele congruenței $(c)$, iar $e_2$ capătă semnificație geometrică evidentă.

Aplicînd ecuațiilor (2''') lema lui Cartan, obținem

$$\omega^3_1 = a^3_{11}\omega^1 + a^3_{12}\omega^2, \qquad \omega^3_2 = a^3_{21}\omega^1 + a^3_{22}\omega^2, \qquad \omega^1_1 = \omega^1 + a^1_{12}\omega^2,$$

$$\omega^3_3 = a^3_{31}\omega^1 + a^3_{32}\omega^2, \qquad 2K\omega^1_1 + \omega^1_2 = (1 + a^3_{32})\,\omega^1 + A\omega^2,$$

în care intră șapte invarianți finiți de ordinul al doilea.

Acum se pot scrie condițiile de integrabilitate și se poate enunța teorema fundamentală de existență în acest caz.

*Observație.* Faptul că ecuația (4''') are această formă simplă nu este surprinzător. Deoarece am cerut ca planul tangent la suprafața descrisă de punctul $M$ să conțină axa $e_3$, ea este una din suprafețele focale.

*Caz particular.* Dacă $a^1_{31} = 0$, urmează că:

1) nu se poate fixa nici un parametru secundar, cum rezultă din (11);

2) $a^1_{32}$ este invariantă, rezultă tot din (11);

3) $(de_3)_{\omega^2=0} = a^3_{31}\,\omega^1 e_3$, care arată faptul că atunci cînd punctul $A$ se deplasează în lungul liniei $\omega^2 = 0$, dreptele congruenței fiind paralele, descriu un cilindru. De asemenea, cum am observat mai sus, planele $(a)$ sînt paralele;

4) Așa cum arată ecuația (4') ambele focare sînt la infinit. Congruența este parabolică.

Dacă, în particular, $a^1_{32} = 0$, desfășurabilele sînt nedeterminate. Vectorul $de_3$, devine

$$de_3 = \omega^3_3 e_3.$$

În consecință, toate dreptele congruenței sînt paralele și deci, planele $(a)$ sînt paralele cu dreptele congruenței. Cu aceasta s-a dat interpretarea anulării invariantului $a^1_{32}$.

*Observație.* Din cele de mai sus rezultă că $a^2_{31} = 0$ particularizează familia de plane $(a)$.

**4. Cazuri speciale ale suprafeței (S).** Am cercetat mai înainte cazurile particulare de plane $(a)$ și de congruență $(c)$. Să considerăm acum anumite cazuri speciale referitoare la suprafața suport $(S)$. Pentru aceasta să considerăm ecuația liniilor asimptotice

$$(e_1, e_2, d^2 A) = 0.$$

Ținînd seama de formulele derivate, aceasta devine

$$a^3_{11}(\omega^1)^2 + 2a^3_{12}\,\omega^1\omega^2 + a^3_{22}(\omega^2)^2 = 0.$$

În primul rînd, invarianții $a^3_{11}$, $a^3_{12}$, $a^3_{22}$ capătă în felul acesta o interpretare geometrică. Ei sînt coeficienții formei a doua pătratice diferențiale a suprafeței $(S)$.

Fie

$$\omega^2 = a\omega^1, \qquad (a^3_{22} \neq 0),$$

o soluție a ecuației precedente. Să punem condiția că asimptoticele corespunzătoare acestei ecuații să fie drepte. Avem

$$dA = (e_1 + ae_2)\,\omega^1.$$

Aceasta se întîmplă dacă în lungul asimptoticei vectorul $e_1 + ae_2$ își va păstra direcția. Adică

$$\{d(e_1 + ae_2)\}_{\omega^2 = a\omega^1} = \mu\,(e_1 + ae_2).$$

Avînd în vedere formulele derivate, semnificația lui $a$ și faptul că vectorii $e_1$ și $e_2$ sînt independenți, relația precedentă devine

$$\omega^1_1 + a\omega^1_2 = \mu, \qquad \omega^2_1 + a\omega^2_2 + da = \mu a.$$

Eliminînd factorul $\mu$, obținem

$$da - a^2\,\omega^1_2 + a\,(\omega^2_2 - \omega^1_1) + \omega^2_1 = 0,$$

care este condiția căutată.

Pentru ca $(S)$ să fie dublu riglată, la relația precedentă trebuie să adăugăm conjugata ei,

$$da - \bar{a}^2\,\omega^1_2 + \bar{a}\,(\omega^2_2 - \omega^1_1) + \omega^2_1 = 0.$$

Dacă suprafața $(S)$ este desfășurabilă, între invarianți avem relația

$$(a^3_{12})^2 - a^3_{11}\,a^3_{32} = 0.$$

Să considerăm acum cazul particular cînd $a^3_{11} = a^3_{22} = 0$. Suprafața $(S)$ este raportată la liniile asimptotice. Considerăm ecuația $\omega^1 = 0$. Punînd analog problema, obținem,

$$a^1_{22} = 0.$$

În acest caz nu putem impune condiția ca suprafața $(S)$ să fie dublu riglată, întrucît am obține

$$a^2_{31} = 0,$$

caz pe care l-am exclus. Pentru ca liniile asimptotice să fie nedeterminate, adică suprafața $(S)$ să fie un plan trebuie să avem relațiile

$$a^3_{11} = a^3_{12} = a^3_{22} = 0.$$



## BIBLIOGRAFIE


1. Gheorghiev Gh, Popa I. — *Sur une variété uni-dimensionelle non holonome de A. Myller*, An. șt. Univ. Iasi. Matematică, t. VI, 1960, p. 59—75.
2. — *Asupra unor varietăți neolonome unidimensionale*. Studii și cere. Acad. R. P. R., Iași, seria Matematică, t. XI, 1960, p. 333—336.
3. *Geometria proiettivo-differenziale di alcune varietà equi-parametriche*, Annali di Matematica, Bologna, Serie IV, t. L. VIII, 1962, p. 277—293.
4. Miron R. — *Geometria unor configurații Myller*, An. șt. Univ. Iași, t. VI, 1960, p. 681—704.
5. Miron Radu — *Geometria configurațiilor Myller*. Societatea de științe matematice din R. S. R.
6. Myller A. — *Le parallélisme au sens Levi-Civita, dans un système de plans*, Ann. Sci. Univ. Iassy, t. XIII, 1926, p. 20—34.
7. Vamanu E. — *Varietăți Myller cu două și trei dimensiuni în $P_3$*, An. șt. Univ. Iași Matematica, t. X, 1964, p. 385—397.


*Institutul pedagogic Bacău*

## ÉTUDE DIFFÉRENTIELLE D'UNE VARIÉTÉ MYLLER BIDIMENSIONNELLE DANS L'ESPACE AFIN UNI-MODULAIRE ($A_3$)


Résumé

En employant la méthode du repère mobile d'E. Cartan, on étudie la variété qui a comme élément générateur un point, une droite et un plan qui s'appartiennent, le point décrivant une surface $(S)$. On établit un repère canonique, les invariants, on donne une interprétation au repère et on distingue des cas particuliers remarquables.