CÎTEVA PROPRIETĂȚI ALE CATEGORIEI INELELOR SLABE

Rezumat

Inelele slabe, introduse de Al. Climescu în [1], [2] au fost studiate de T. Luchian în cîteva note, printre care [4], [5]. În prezenta Notă autorii demonstrează cîteva proprietăți ale categoriei $\mathcal{S}$ a inelelor slabe, dintre care cităm:

$\mathcal{S}$ are produse fibrate (Th. 7). În $\mathcal{S}$ există produsul direct pentru orice familie de obiecte (Th. 8). Categoria $\mathcal{S}$ are limite proiective. $\mathcal{S}$ este o categorie cu limite inductive pseudofiltrante conexe (Th. 11).

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" — Iași
Secția I a. Matematică, tom XX, 1974

LES R-ESPACES SIMPLES

PAR

IOAN I. VRABIE

En surprenant les propriétés les plus générales des espaces pré-topologiques, topologiques, de proximité faible, de proximité, quasi-uniformes et uniformes, M. Hacque introduit dans [1] comme une généralisation de ces espaces la notion de T-espace. Un T-espace simple est un ensemble X, structuré à l'aide d'une application $\rho : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{F}(X)$ (où $\mathfrak{F}(X)$ est l'ensemble des filtres sur X), vérifiant les conditions :

T_1) $\rho(\emptyset) = \mathfrak{P}(X)$ (le filtre impropre sur X)

T_2) $Z \in \rho(A)$ implique $A \subset Z$.

T_3) $\rho(A_1 \cup A_2) = \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$.

La modélation mathématique de divers phénomènes physiques, chimiques, biologiques, linguistiques nous a amenés à considérer des structures typologiques pareilles à celles rappelées ci-dessus, mais pour lesquelles cette association ensemble-filtre est considérée dans un cadre plus large.

Notamment, il s'agit de la définition d'une structure plus générale que les structures pré-uniformes de J. Chacron [3] et de l'étude des propriétés topologiques qui peuvent être posées dans ce cadre : séparation, continuité, compacité.

Dans le premier paragraphe nous avons introduit la notion de R-espace simple et nous avons donné quelques définitions équivalentes (le lemme 1.11, le lemme 1.17).

Dans le deuxième paragraphe nous avons introduit la notion de R-espace simple ponctuel, la notion de (Y, X) quasi-adhérence et nous avons étudié la liaison entre ces deux notions (le lemme 2.4).

Les propriétés de séparation T_1 et T_2 sont étudiées dans le troisième paragraphe et la quasi-compacité à droite, dans le quatrième paragraphe. Dans le cinquième paragraphe nous avons introduit et étudié les morphismes continus entre deux R-espaces simples.

La catégorie des R-espaces simples est l'objet du sixième paragraphe. Le résultat central de cette partie de notre travail est la construction des foncteurs $F_a : \mathrm{Ens} \to \mathcal{C}_{RS}$ (de Ens dans la catégorie des R-espaces simples), foncteurs pleins et fidèles (la proposition 6.5).

Les R-espaces sont introduits dans le septième paragraphe. Enfin, nous avons montré que les structures pré-uniformes de J. Chacron [3] sont des R-espaces, résultat qui peut être considéré une justification (parmis beaucoup d'autres) de ce travail.

Dans le huitième paragraphe nous avons construit des exemples pour justifier quelques définitions et remarques.

L'auteur exprime ses très respectueux remerciements au Professeur O. Costinescu, pour l'aide très efficace, pour les suggestions et les conseils qu'elle a bien voulu offrir.

§1. L'introduction des R-espaces simples. Soient X, Y deux ensembles et soit $\mathfrak{F}(Y)$ l'ensemble des filtres sur Y.

Définition 1.1 : *Une R-application de X dans Y est une application $\rho : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{F}(Y)$ vérifiant les conditions :*

R_1) $\rho(X) = \{ Y \}$,

R_2) $\emptyset \in \rho(A)$ *est équivalent à* $A = \emptyset$,

R_3) $\rho(A_1 \cup A_2) = \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$.

Remarques 1.2 : a) Pour tout $A \in \mathfrak{P}(X)$, $A \neq \emptyset$, $\rho(A)$ est un filtre propre sur Y. b) $\rho(\emptyset) = \mathfrak{P}(Y)$. c) Toute T-application [1] de X dans X est une R-application. d) L'ensemble $\mathfrak{R}(X, Y)$ des R-applications de X dans Y est partiellement ordonné par la relation :

$$\rho < \rho' \Leftrightarrow \forall A \in \mathfrak{P}(X),\ \rho(A) < \rho'(A).$$

Définition 1.3 : *Un R-espace simple sur un couple ordonné d'ensembles (X, Y) est un triplet (X, Y, ρ) où ρ est une R-application de X dans Y.*

Remarque 1.4 : Puisque tout T-espace simple [1] est un R-espace simple, il résulte que les espaces pré-topologiques, topologiques, de proximité faible et de proximité sont des R-espaces simples.

Définition 1.5 : *Une (Y, X) relation de proximité sur le couple ordonné (X, Y) est une relation $\delta \subset \mathfrak{P}(Y) \times \mathfrak{P}(X)$ vérifiant les conditions :*

P_1) $B\delta A$ *implique* $B \neq \emptyset$ *et* $A \neq \emptyset$.

P_2) $\forall A \in \mathfrak{P}(X)$, $A \neq \emptyset$, $\exists B \in \mathfrak{P}(Y)$ *tel que* $B\delta A$ *et* $\forall B \in \mathfrak{P}(Y)$, $B \neq \emptyset$, $\exists A \in \mathfrak{P}(X)$ *tel que* $B\delta A$,

P_3) $(B_1 \cup B_2)\delta A$ *est équivalent à* $B_1\delta A$ *ou* $B_2\delta A$.

P_4) $B\delta(A_1 \cup A_2)$ *est équivalent à* $B\delta A_1$ *ou* $B\delta A_2$.

Définition 1.6 : *Un espace de (Y, X) proximité sur le couple ordonné d'ensembles (X, Y) est un triplet (X, Y, δ), où δ est une (Y, X) relation de proximité.*

Remarques 1.7 : a) Puisque toute relation de proximité au sens de M. Hacque [1] sur X est une (X, X) relation de proximité, il résulte que toute relation de proximité au sens de Efremovic-Smirnov sur X est une (X, X) relation de proximité. b) L'ensemble $\mathfrak{D}(X, Y)$ des (Y, X) relations de proximité sur le couple ordonné (X, Y) est partiellement ordonné par la relation :

$$\delta < \delta' \Leftrightarrow \delta \subseteq \delta'.$$

Proposition 1.8 : *Si $\delta \in \mathfrak{D}(X, Y)$, alors $\delta^{-1} \in \mathfrak{D}(Y, X)$. La démonstration est évidente.*

Définition 1.9 : *Une relation $\theta \subset \mathfrak{P}(Y) \times \mathfrak{P}(X)$ est une (Y, X) connexion, si elle satisfait aux conditions :*

C_1) $\forall B \in \mathfrak{P}(Y)$, $B \in \emptyset$, $\mathfrak{M}_B = \{A ;\ A \in \mathfrak{P}(X),\ B\theta A\} \neq \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathfrak{M}_B$

C_2) $\forall A \in \mathfrak{P}(X)$, $A \neq \emptyset$, $\mathfrak{N}_A = \{B ;\ B \in \mathfrak{P}(Y),\ B\theta A\} \neq \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathfrak{N}_A$

Proposition 1.10 : *Soient (X, δ_1) et (Y, δ_2) deux espaces de proximité au sens de M. Hacque [1] et θ une (Y, X) connexion. Alors il existe un espace de (Y, X) proximité, (X, Y, δ) uniquement determiné par δ_1, θ et δ_2.*

Démonstration : Soit δ la relation définie par l'égalité : $\delta = \delta_2 \circ \theta \circ \delta_1$. On peut vérifier facilement que δ est une (Y, X) relation de proximité. L'unicité est due à la construction.

Lemme 1.11 : *Entre l'ensemble $\mathfrak{R}(X, Y)$ et l'ensemble $\mathfrak{D}(X, Y)$ il existe une bijection canonique caractérisée par la condition :*

$$\alpha)\ B\delta A \Leftrightarrow (Y - B) \notin \rho(A).$$

Démonstration : Soit ρ un élément quelconque de $\mathfrak{R}(X, Y)$. Soit δ définie par la condition α.

$B\delta A \Leftrightarrow (Y - B) \notin \rho(A)$ implique $B \neq \emptyset$ et $A \neq \emptyset$.

$\forall B \in \mathfrak{P}(Y)$, $B \neq \emptyset$, $B\delta X$ (parce-que $\rho(X) = \{ Y \}$ et comme $Y - B \neq Y$ il en résulte $(Y - B) \notin \rho(X)$).

$\forall A \in \mathfrak{P}(X)$, $A \neq \emptyset$, $B\delta A$ pour tout $B \in \rho(A)$. Comme $\rho(A) \neq \emptyset$ il résulte qu'il existe $B \in \mathfrak{P}(Y)$ tel que $B\delta A$.

$(B_1 \cup B_2)\,\delta A \Leftrightarrow (Y - B_1 \cup B_2) \notin \rho(A) \Leftrightarrow (Y - B_1) \cap (Y - B_2) \notin \rho(A) \Leftrightarrow (Y - B_1) \notin \rho(A)$ ou $(Y - B_2) \notin \rho(A) \Leftrightarrow B_1\delta A$ ou $B_2\delta A$.

$B\delta(A_2 \cup A_2) \Leftrightarrow (Y - B) \notin \rho(A_2 \cup A_2) \Leftrightarrow (Y - B) \notin \rho(A_1) \cap \rho(A_2) \Leftrightarrow (Y - B) \notin \rho(A_1)$ ou $(Y - B) \notin \rho(A_2) \Leftrightarrow B\delta A_1$ ou $B\delta A_2$.

Nous avons démontré que δ satisfait aux conditions de la définition 1.5.

Soit δ un élément quelconque de $\mathfrak{D}(X, Y)$ et soit A un élément quelconque de $\mathfrak{P}(X)$. Notons par $\rho(A)$ la classe : $\{ B ; B \in \mathfrak{P}(Y), (Y - B)\, \bar{\delta} A \}$. Il est facile de vérifier que $\rho(X) = \{ B ; B \in \mathfrak{P}(Y), (Y - B)\, \delta X \} = \{ Y \}$ (parce-que les conditions P_2, P_4 de la définition 1.5 assurent que, pour tout B, $B \in \mathfrak{P}(Y)$, $B \neq \emptyset$, $B \delta X$).

$\emptyset \in \rho(A) \Leftrightarrow \emptyset \in \{ B ; B \in \mathfrak{P}(Y), (Y - B)\, \bar{\delta} A \} \Leftrightarrow Y \bar{\delta} A \Leftrightarrow A = \emptyset$.

(parce-que les conditions P_1, P_3 assurent que : $Y \delta A \Leftrightarrow A = \emptyset$).

$\rho(A_1 \cup A_2) = \{ B ; B \in \mathfrak{P}(Y), (Y - B)\, \bar{\delta}(A_1 \cup A_2)\} = \{B ; B \in \mathfrak{P}(Y), (Y - B)\, \bar{\delta} A_1\} \cap \{ B ; B \in \mathfrak{P}(Y), (Y - B)\, \bar{\delta} A_2 \} = \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$. Nous avons démontré que ρ satisfait aux conditions de la définition 1.1.

Définition 1.12 : *Les éléments ρ et δ qui se correspondent réciproquement par la bijection établie dans le lemme 1.11 sont dits associés.*

Corollaire 1.13 : *De la proposition 1.8 et du lemme 1.11 il en résulte que pour tout R-espace (X, Y, ρ) il existe un R-espace simple (Y, X, ρ^{-1}) uniquement déterminé par ρ, nommé le dual du R-espace simple (X, Y, ρ).*

Nous avons noté par ρ^{-1} la R-application associée à la (X, Y) relation de proximité δ^{-1}, où δ est la (Y, X) relation de proximité associée à la R-application ρ.

Remarque 1.14 : La démonstration du lemme 1.11 est calquée sur celle du théorème 2 de [2]. En effet le lemme 1.11 est une extension naturelle du résultat formulé dans le théorème 2 de [2] et du résultat formulé dans la proposition 1.1.4 de [1].

Définition 1.15 : *Une (X, Y) structure topogène sur le couple ordonné (X, Y) est un relation $< \subset \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(Y)$ vérifiant les conditions :*

T_1) $\emptyset < \emptyset$, $X < Y$, $X < B$ *implique* $B = Y$.
T_2) $A < B$, $A \neq \emptyset$ *implique* $B \neq \emptyset$
T_3) $A \subseteq A' < B' \subseteq B$ *implique* $A < B$.
T_4) $A < B$ *et* $A' < B'$ *implique* $A \cap A' < B \cap B'$.
T_5) $A < B$ *et* $A' < B'$ *implique* $A \cup A' < B \cup B'$.

Remarques 1.16 : a) Puisque toute structure topogène sur X [2] est une (X, X) structure topogène, il résulte que toute structure topogène symétrique sur X est une (X, X) structure topogène. b) L'ensemble $\mathfrak{T}(X, Y)$ des (X, Y) structures topogènes sur le couple ordonné (X, Y) est partiellement ordonné par inclusion.

Lemme 1.17 : *Entre l'ensemble $\mathfrak{R}(X, Y)$ et l'ensemble $\mathfrak{T}(X, Y)$ il existe une bijection canonique caractérisée par la relation :*

$$A < B \Leftrightarrow B \in \rho(A). \qquad \beta)$$

Démonstration : Soit ρ un élément quelconque de $\mathfrak{R}(X, Y)$. Soit $<$ définie par la condition β.

Il est facile de vérifier que : $\emptyset < \emptyset$, $X < Y$ et $X < B \Rightarrow B = Y$. $A < B \Leftrightarrow B \in \rho(A)$, $A \neq \emptyset \Rightarrow B \neq \emptyset$.

$A \subseteq A' < B' \subseteq B \Rightarrow B \supseteq B' \in \rho(A') \subseteq \rho(A) \Rightarrow A < B$ (il est facile de montrer que toute R-application est antiisotone).

$$A < B \text{ et } A' < B' \Leftrightarrow B \in \rho(A) \text{ et } B' \in \rho(A') \Rightarrow \begin{cases} B \in \rho(A \cap A') \supseteq \rho(A) \\ B' \in \rho(A \cap A') \supseteq \rho(A') \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B \cap B' \in \rho(A \cap A') \Leftrightarrow A \cap A' < B \cap B'.$$

$$A < B \text{ et } A' < B' \Leftrightarrow B \in \rho(A) \text{ et } B' \in \rho(A') \Rightarrow \begin{cases} B \cup B' \in \rho(A) \\ B \cup B' \in \rho(A') \end{cases} \Rightarrow$$

$B \cup B' \in \rho(A) \cap \rho(A') \Rightarrow B \cup B' \in \rho(A \cup A') \Leftrightarrow A \cup A' < B \cup B'$. Nous avons montré donc que $< \in \mathfrak{T}(X, Y)$. Soit $<$ un élément quelconque de $\mathfrak{T}(XY)$ et soit A un element quelconque de $\mathfrak{P}(X)$. Notons par $\rho(A)$ la classe :

$\{ B ; B \in \mathfrak{P}(Y), A < B\}$. Il est facile de montrer que ρ est une application de $\mathfrak{P}(X)$ dans $\mathfrak{H}(Y)$. $\rho(X) = \{ Y \}$. (Cela résulte de la condition T_1 de la définition 1.15). $\emptyset \in \rho(A) \Leftrightarrow \emptyset \in \{ B ; B \in \mathfrak{P}(Y), A < B\} \Leftrightarrow A = \emptyset$.

$$B \in \rho(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow A_1 \cup A_2 < B \Rightarrow \begin{cases} A_1 < B \\ A_2 < B \end{cases} \Leftrightarrow B \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2). \text{ Donc}$$

$\rho(A_1 \cup A_2) \subseteq \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$.

$$B \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2) \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 < B \\ A_2 < B \end{cases} \Rightarrow A_1 \cup A_2 < B \Leftrightarrow B \in \rho(A_1 \cup A_2).$$

Donc $\rho(A_1) \cap \rho(A_2) \subseteq \rho(A_1 \cap A_2)$. Nous avons démontré que $\rho \in \mathfrak{R}(X, Y)$ La démonstration du lemme 1.17 est achevée.

Définition 1.18 : *Les éléments ρ et $<$ qui se correspondent réciproquement par la bijection établie dans le lemme 1.17 sont dits associés.*

Corollaire 1.19 : Un R-espace simple défini sur le couple ordonné (X, Y) peut être caractérisé par une R-application de X dans Y, par une (Y, Y) relation de proximité ou par une (X, Y) structure topogène, ces trois éléments étant associés.

Remarque 1.20 : La démonstration du lemme 1.17 est calquée sur celle du théorème 1 de [2]. En effet le lemme 1.17 est une extension naturelle du théorème 1 de [2].

§2. Les espaces avec quasi-adhérence. Définition 2.1 : *Une R-application ρ de X dans Y sera dite ponctuelle si :* $\rho(A) = \bigcap_{x \in A} \rho(x)$.

Définition 2.2 : *Une (Y, Y) quasi-adhérence est une application α de $\mathfrak{P}(Y)$ dans $\mathfrak{P}(X)$ vérifiant les conditions :*

Q_1) $\alpha(\emptyset) = \emptyset$, $\alpha(Y) = X$.
Q_2) $\alpha(B_1) \cap \alpha(B_2) = \emptyset$ implique $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.
Q_3) $\alpha(B_1 \cup B_2) = \alpha(B_1) \cup \alpha(B_2)$.

Remarques 2.3 : a) La condition Q_2 nous assure que $\alpha(B) = \emptyset \Leftrightarrow B = \emptyset$. b) Parce-que toute pré-adhérence sur X est une (X, X) quasi-adhérence, il en résulte que toute adhérence sur X est une (X, X) quasi-adhérence. c) Toute (Y, X) quasi-adhérence est isotonne.

Soit $\mathfrak{R}_p(X, Y)$ l'ensemble des R-applications ponctuelles de X dans Y et soit $\mathfrak{Q}(X, Y)$ l'ensemble des (Y, X) quasi-adhérences.

Lemme 2.4 : *Entre l'ensemble $\mathfrak{R}_p(X, Y)$ et l'ensemble $\mathfrak{Q}(X, Y)$ il existe une bijection canonique caractérisé par la relation :*

γ) $B\delta A \Leftrightarrow \alpha(B) \cap A \neq \emptyset$ *(où δ est la (Y, X) relation de proximité associée à ρ).*

Démonstration : Soit ρ un élément quelconque de $\mathfrak{R}_p(X, Y)$. Considérons l'application définie par l'égalité :

$$\alpha(B) = \{x\,;\ x \in X,\ B\delta x\}.$$

$\alpha(B) = \{x\,;\ x \in X,\ (Y - B) \notin \rho(x)$. Il est facile de montrer que

$\alpha(\emptyset) = \emptyset$ et $\alpha(Y) = X$.

$\alpha(B_1) \cap \alpha(B_2) = \emptyset$. Supposons que $B_1 \cap B_2 = B_3 \neq \emptyset$.

Pour $B_3 \neq \emptyset$, $\alpha(B_3) \neq \emptyset$, parce que si $\alpha(B_3) = \emptyset$ alors $\{x\,;\ x \in X$ $(Y - B_3) \notin \rho(x)\} = \emptyset \Leftrightarrow$ pour tout $x \in X$, $(Y - B_3) \in \rho(x) \Leftrightarrow$ $(Y - B_3) \in \bigcap_{x \in X} \rho(x) \Leftrightarrow (Y - B_3) \in \rho(X) \Leftrightarrow B_3 = \emptyset$ — absurde! Donc $\alpha(B_3) \neq$ $\neq \emptyset$. Mais comme $B_1 \cap B_2 = B_3 \neq \emptyset$, il résulte qu'il existe $x \in \alpha(B_3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow B_3\delta x$, relation qu'implique $B_1\delta x$ et $B_2\delta x$.

Donc $x \in \alpha(B_1) \cap \alpha(B_2) \neq \emptyset$ — absurde.

On peut affirmer que : $\alpha(B_1) \cap \alpha(B_2) = \emptyset$ implique $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ $\alpha(B_1 \cup B_2) = \alpha(B_1) \cup \alpha(B_2)$. Cette égalité résulte immediatement. Donc $\alpha \in \mathfrak{Q}(X, Y)$.

Soit α un élément quelconque de $\mathfrak{Q}(X, Y)$. Soit δ la relation définie par la condition γ

$B\delta A \Leftrightarrow \alpha(B) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow B \neq \emptyset$ et $A \neq \emptyset$.

$\forall B \in \mathfrak{P}(Y), B \neq \emptyset, B\delta\alpha(B)$ et $\forall A \in \mathfrak{P}(X), A \neq \emptyset, Y\,\delta A$.

$(B_1 \cap B_2)\,\delta\,A \Leftrightarrow \alpha(B_1 \cap B_2) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow (\alpha(B_1) \cup \alpha(B_2)) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha(B_1) \cap A \neq \emptyset$ ou $\alpha(B_2) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow B_1\delta A$ ou $B_2\delta A$.

$B\delta(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow \alpha(B) \cap (A_2 \cup A_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha(B) \cap A_1 \neq \emptyset$ ou $\alpha(B) \cap A$ $\neq \emptyset \Leftrightarrow B\delta A_1$ ou $B\delta A_2$. On peut dire donc que $\delta \in \mathfrak{D}(X, Y)$.

$\rho(A) = \{B\,;\ B \in \mathfrak{P}(Y), (Y - B)\delta A\} = \{B\,;\ B \notin \mathfrak{P}(Y)\,;\ \alpha(Y - B) \cap A =$ $= \emptyset\} = \bigcap_{x \in A} \{B\,:\ B \in \mathfrak{P}(Y),\ x \notin \alpha(Y - B)\} = \bigcap_{x \in A} \rho(x)$.

Mais l'égalité $\rho(A) = \bigcap_{x \in A} \rho(x)$ est équivalente à la relation $\rho \in \mathfrak{R}_p(X, Y)$

Q.E.D.

Définition 2.5 : *Un R-espace simple (X, Y, ρ) est naturel si la (Y, X) relation de proximité δ associée à ρ satisfait aux conditions :*

N_1) $\forall A \in \mathfrak{P}(X)$, $\{y\,;\ y \in Y,\ y\delta A\} = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$

N_2) $\forall B \in \mathfrak{P}(Y)$, $\{x\,;\ x \in X,\ B\delta x\} = \emptyset \Leftrightarrow B = \emptyset$.

Lemme 2.6 : *Soit (X, Y, ρ) un R-espace simple naturel.*

Alors : (i) *les applications* $\alpha_1 : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X)$.

$$\alpha_1(B) = \{x\,;\ x \in X,\ B\delta x\} : \alpha_2 : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y)$$

$\alpha_2(A) = \{y\,;\ y \in Y,\ y\delta A\}$ *sont des quasi-adhérences et*

(ii) *les applications $\alpha_1 \circ \alpha_2$, $\alpha_2 \circ \alpha_1$, sont des pré-adhérences sur Y et sur X.*

Démonstration : La démonstration de (i) est analogue à celle du Lemme 2.4.

(ii) Soit $\alpha_x = \alpha_2 \circ \alpha_1$. Il est évident que : $\alpha_x(\emptyset) = \emptyset$ et $\alpha_x(X) = X$.

$\alpha_x(A) = \alpha_1(\alpha_2(A))$.

Mais, pour tout $x \in A$, $\alpha_2(x) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists y \in \alpha_2(x) \Rightarrow y \in \alpha_2(A) \Leftrightarrow \alpha_2(A)\delta x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha_x(A) \supseteq A$.

$\alpha_x(A_1 \cup A_2) = \alpha_1(\alpha_2(A_1 \cup A_2)) = \alpha_1(\alpha_2(A_1) \cup \alpha_2(A_2)) = \alpha_x(A_1) \cup \alpha_x(A_2)$.

Nous avons montré donc que α_x satisfait aux conditions d'une pré-adhérence [1].

La démonstration pour $\alpha_y = \alpha_1 \circ \alpha_2$ est identique. Q.E.D.

Proposition 2.7 : *Soit (Y, α) un espace avec pré-adhérence* [1] *X un ensemble, $f : X \to Y$ une application telle que :*

$$\alpha(f(X)) = Y.$$

Alors l'application $\beta : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y)$, $\beta(A) = \alpha(f(A))$ est une (X, Y) quasi-adhérence.

Démonstration : On vérifie d'une manière banale que $\beta(\emptyset) = \emptyset$, $\beta(X) = Y$. Soient $A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(X)$ tels que $\beta(A_1) \cap \beta(A_2) = \emptyset$. Supposons que $A_1 \cap A_2 = A_3 \neq \emptyset$.

Il en résulte $f(A_3) \neq \emptyset$ et du fait que $f(A_1) \supseteq f(A_3)$, $f(A_2) \supseteq f(A_3)$, il résulte $\alpha(f(A_1)) \supseteq \alpha(f(A_3))$, $\alpha(f(A_2)) \supseteq \alpha f(A_3)$ ce qu'implique $\beta(A_1) \cap$ $\cap\ \beta(A_2) \supseteq \beta(A_3) \neq \emptyset$ — absurde. Donc $\beta(A_1) \cap \beta(A_2) = \emptyset$ implique $A_1 \cap$ $\cap\ A_2 = \emptyset$. $\beta(A_1 \cup A_2) = \alpha(f(A_1 \cup A_2)) = \alpha(f(A_1)) \cup \alpha(f(A_2)) = \beta(A_1) \cup$ $\cup\ \beta(A_2)$.

Donc β est une (X, Y) quasi-adhérence. Q. E. D.

Proposition 2.8 : *Soit (X, Y, ρ) un R-espace simple ponctuel. Soit δ la (Y, X) quasi-adhérence associée à ρ. Alors : $x \in \alpha(B)$ si et seulement si quel que soit $V \in \rho(x)$, $V \cap B \neq \emptyset$.*

Démonstration : $x \in \alpha(B) \Leftrightarrow B\delta x \Leftrightarrow (Y - B) \notin \rho(x) \Leftrightarrow$ il existe un ultrafiltre $\mathfrak{A}$ sur Y tel que $\mathfrak{A} > \rho(x)$ et $B \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow$ pour tout $V \in \rho(x)$, $V \cap B \neq \emptyset$. Q. E. D.

Remarque 2.9 : Le Lemme 2.6 nous assure que pour tout R-espace simple naturel (X, Y, ρ) il existe un R-espace pré-topologique (X, α_x) et un espace pré-topologique (Y, α_y) déterminés par ρ.

§3. Les R-espaces simples séparés T_1 et T_2. Soit (X, Y, ρ) un R-espace simple et $s : X \to Y$ une application donnée.

Définition 3.1 : *Le R-espace simple (X, Y, ρ) est séparé T_1 par l'application s, si quels que soient $u, v \in X$, $u \neq v$, il existe $V \in \rho(u)$ et $W \in \rho(v)$ tel que $s(v) \notin V$ et $s(u) \notin W$.*

Définition 3.2 : *Soit (X, Y, ρ) un R-espace simple ponctuel. On dit que $s : X \to Y$ est compatible avec la (Y, X) quasi-adhérence $\alpha : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X)$ si quel que soit $B \in \mathfrak{P}(Y)$, $B \neq \emptyset$ il existe $x \in \alpha(B)$, tel que $s(x) \in B$.*

Remarque 3.3 : Pour les espaces pré-topologiques [1], l'identité est compatible avec les pré-adhérences.

Proposition 3.4 : *Soit (X, Y, ρ) un R-espace simple naturel. Alors, il existe $s : X \to Y$ compatible avec la (Y, X) quasi-adhérence $\alpha : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X)$ tel que (X, Y, ρ) soit séparé T_1 par l'application s, si et seulement si la réstriction α/Y de α à Y est injective et quel que soit $y \in Y$, $\alpha/Y(\{y\})$ contient un seul élément.*

Démonstration : La condition est nécessaire. Supposons qu'il existe $s : X \to Y$ compatible avec α et que (X, Y, ρ) est séparé T_1 par s. Soit y un élément quelconque de Y. Parce-que $\alpha(\{y\}) \neq \emptyset$ et s est compatible avec α il résulte qu'il existe $u \in \alpha(\{y\})$ tel que $s(u) = y$. Supposons qu'il existe $v \in \alpha(\{y\})$, $v \neq u$. (X, Y, ρ) étant séparé T_1 par s, cela implique : $\exists V \in \rho(u)$ et $W \in \rho(v)$ tel que $s(u) \notin W$ et $s(v) \notin V$. Mais $s(u) = y \notin W$ est équivalente à la condition : $\{y\} \cap W = \emptyset$. Mais (cf. prop. 2.8). $v \in \alpha(\{y\}) \Leftrightarrow \forall W \in \rho(v)$, $\{y\} \cap W \neq \emptyset$ — absurde.

Donc $\alpha(\{y\})$ contient un seul élément. Supposons que la restriction de α à Y, α/Y n'est pas injective. Soient $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$ tels que $\alpha(\{y_1\}) = \alpha(\{y_2\}) = \{u\}$.

Puisque s est compatible avec α il résulte que

$$s(u) = y_1 \text{ et } s(u) = y_2 \text{ — absurde.}$$

La condition est suffisante. Si α est injective sur Y et $\alpha(\{y\})$ contient un seul élément, alors de l'hypothèse que (X, Y, ρ) est naturel il résulte que pour tout $x \in X$ il existe $y \in Y$, tel que $\alpha(\{y\}) = \{x\}$.

Donc $\alpha/Y : Y \to X$ est une bijection.

Soit $s = \alpha^{-1}/Y : X \to Y$. On vérifie facilement que (X, Y, ρ) est séparé T_1 par s. Q. E. D.

Proposition 3.5 : *Soit (X, Y, ρ) un R-espace naturel. Si α/Y est injective et pour tout $y \in Y$, $\alpha(\{y\})$ contient un seul élément, alors (X, α_x), (Y, α_y) (remarque 2.9) sont des T-espaces simples séparés T_1 par l'identité. La démonstration est evidente.*

Définition 3.6 : *Un R-espace simple (X, Y, ρ) est séparé T_2, si pour tout u et $v \in X$, $u \neq v$, il existe $V \in \rho(u)$ et $W \in \rho(v)$, tels que $V \cap W = \emptyset$.*

Définition 3.7 : *On dit que $x_0 \in X$ est un point limite pour le filtre $\mathfrak{F}$ sur Y si $\rho(x_0) < \mathfrak{F}$.*

Proposition 3.8 : *Pour les R-espaces simples séparés T_2 la limite pour un filtre sur Y, si elle existe, est unique.*

La démonstration est immédiate.

Remarque 3.9 : Il est utile à voir que la propriété de séparation T_2 n'implique pas, dans ce cadre, l'existence d'une application $s : X \to Y$ compatible avec la quasi-adhérence associée à ρ, telle que (X, Y, ρ) soit séparé T_1 par s. (voir l'exemple 8.2).

Proposition 3.10 : *Soit (X, Y, ρ) un R-espace simple ponctuel, séparé T_2. Alors pour tout $y \in Y$, $\alpha(\{y\})$ contient un seul élément.*

La démonstration est analogue à celle de la nécessitée de la proposition 3.4.

Proposition 3.11 : *Soit (X, Y, ρ) un R-espace simple naturel séparé T_2. Si α/Y est injective, alors (X, Y, ρ) est séparé T_1 par α^{-1}/Y.*

La démonstration est évidente (cf. prop. 3.4. et prop. 3.10).

§4. Les R-espaces simples quasi-compacts à droite et Y-quasi-compacts

Définition 4.1 : *On dit que le R-espace simple naturel (X, Y, ρ) est quasi-compact à droite si (Y, α_y) est quasi-compact.*

Définition 4.2 : *On dit que le R-espace simple (X, Y, ρ) est Y-quasi-compact si tout filtre sur Y, a un point quasi-adhérent sur X. (Autrement dit $\forall \mathfrak{F} \in \mathfrak{H}(Y)$, $\exists x \in X$, tel que $\forall F \in \mathfrak{F}$, $F\delta x$).*

Proposition 4.3 : *Soit (X, Y, ρ) un R-espace simple naturel. Alors si (X, Y, ρ) est Y-quasi-compact il est quasi compact à droite.*

Démonstration : Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur Y. Puisque (X, Y, ρ) est Y quasi-compact il résulte : $\exists x_0 \in X$, tel que $\alpha_2(\{x_0\}) \cap F \neq \emptyset$ quel que soit $F \in \mathfrak{F}$. Soit $y_0 \in \alpha_2(\{x_0\})$.

Parce-que $\{y_0\} \delta \{x_0\}$ et $F\delta\{x_0\}$, il résulte $F\delta_y\{y_0\}$ pour tout $F \in \mathfrak{F}$. (ou δ_y est la (Y, Y) relation de proximité déterminée par α_y). Q. E. D.

Remarque 4.4 : On peut introduire de la même manière les notions de X-quasi-compacité et de quasi-compacité à gauche et on peut établir un résultat analogue à la proposition 4.3.

§5. Morphismes continus. Soient (X, Y, ρ), (X', Y', ρ') deux R-espaces simples. Soient (X, Y, δ), (X', Y', δ') les espaces de (Y, X) proximité associés aux espaces (X, Y, ρ), (X', Y', ρ'). Soient : $\varphi : X \to X'$ et $\psi : Y \to Y'$ deux applications.

Définition 5.1 : *On dit que la paire* $(\varphi, \psi) = f$ *est compatible avec la* (Y', X') *relation de proximité* δ', *si :*

$\forall A \in \mathfrak{P}(X)$ $A \neq \emptyset$, $\exists B \in \mathfrak{P}(Y)$ *tel que* $\psi(B)\ \delta'\varphi(A)$ *et* $\forall B \in \mathfrak{P}(Y)$ $B \neq \emptyset$, $\exists A \in \mathfrak{P}(X)$ *tel que* $\psi(B)\ \delta'\ \varphi(A)$.

Proposition 5.2 : *Pour toute paire* (φ, ψ), $\varphi : X \to X'$, $\psi : Y \to Y'$ *compatible avec la* (Y', X') *relation de proximité* δ', *la relation* $[f^*(\delta')]$ *définie par :* $B\ [f^*(\delta)]\ A \Leftrightarrow \psi(B)\ \delta'\ \varphi(A)$ *est une* (Y, X) *relation de proximité.*

Démonstration : Il est facile de vérifier que $[f^*(\delta')]$ satisfait aux conditions d'une (Y, X) relation de proximité.

$$B[f^*(\delta')]\ A \Leftrightarrow \psi(B)\ \delta'\varphi(A) \Rightarrow B \neq \emptyset \text{ et } A \neq \emptyset.$$

Parce-que (φ, ψ) est compatible avec δ' il résulte que $[f^*(\delta')]$ satisfait à la condition P_2. Il est facile à voir que les autres deux conditions de la définition 1.5 sont satisfaites.

Remarque 5.3 : Dans le cas des T-espaces simples, quelle que soit l'application $f : (X, \delta) \to (X, \delta')$, la paire (f, f) est compatible avec δ'.

Définition 5.4 : *La relation* $[f^*(\delta')]$ *est nommée l'image réciproque de* δ' *par* $(\varphi, \psi) = f$.

Définition 5.5 : *La* R*-application* $[f^*(\rho')]$ *associée à la* (Y, X) *relation de proximité* $[f^*(\delta')]$ *est nommée l'image réciproque de* ρ' *par* $(\varphi, \psi) = f$. *(où* ρ' *est la* R*-application associée a* δ'*).*

Définition 5.6 : *Soient* (X, Y, ρ), (X', Y', ρ') *deux* R*-espaces simples,* $\varphi : X \to X'$, $\psi : Y \to Y'$, *deux applications,* $(\varphi, \psi) = f$ *— compatibles avec* δ'. *On dit que* f *est un morphisme continu dans* $x_0 \in X$ *si :* $[f^*(\rho')](x_0) < \rho(x_0)$.

Définition 5.7 : *On dit que* f *est un morphisme continu sur* (X, Y, ρ) *si :* $[f^*(\rho')] < \rho$.

Proposition 5.8 : $f = (\varphi, \psi) : (X, Y, \rho) \to (X', Y', \rho')$ *est continu sur* (X, Y, ρ) *si et seulement si :* $\forall B \in \mathfrak{P}(Y)$, $\forall A \in \mathfrak{P}(X)$ *qui satisfont à la condition* $B\delta A$, *on a* $\psi(B)\ \delta'\varphi(A)$.

Démonstration : Il est facile demontrer que f est compatible avec δ' — la (Y', X') relation de proximité associée à ρ' — et que : $[f^*(\delta')] \supseteq \delta$.

Mais la condition $[f^*(\delta)] \supseteq \delta$ est équivalente à la condition : $[f^*(\rho')] < \rho$. Q.E.D.

Théorème 5.9 : *Soient* $(X, Y, \rho) \xrightarrow{(\varphi_1, \psi_1)} (X', Y', \rho') \xrightarrow{(\varphi_2, \psi_2)} (X'', Y'', \rho'')$ *deux morphismes continus :* (φ_1, ψ_1) *sur* (X, Y, ρ), (φ_2, ψ_2) *sur* (X', Y', ρ'). *Alors, la paire* $(\varphi_1 \circ \varphi_2, \psi_1 \circ \psi_2) : (X, Y, \rho) \to (X'', Y'', \rho'')$ *est un morphisme continu sur* (X, Y, ρ).

Démonstration : Du fait que (φ_1, ψ_1) est continu sur (X, Y, ρ) il résulte conformément à la proposition 5.8 que : $\forall B \in \mathfrak{P}(Y)$ $\forall A \in \mathfrak{P}(X)$ avec $B\delta A \Rightarrow \psi_1(B)\ \delta'\ \varphi_1(A)$. Mais (φ_2, ψ_2) est aussi continu, ce qu'implique ; $\forall B \in \mathfrak{P}(Y)$, $\forall A \in \mathfrak{P}(X)$, avec $B\delta A \Rightarrow \psi_2(\psi_1(B))\delta''\varphi_2(\psi_1(A))$

Conformément à la proposition 5.8 il résulte que $(\varphi_1 \circ \varphi_2, \psi_1 \circ \psi_2)$ est un morphisme continu sur (X, Y, ρ). Q. E. D.

Remarque 5.10 : Si $(X, Y, \rho) \xrightarrow{(\varphi_1, \psi_1)} (X', Y', \rho') \xrightarrow{(\varphi_2, \psi_2)} (X'', Y'', \rho'')$ et (φ_1, ψ_1) est continu dans x_0, (φ_2, ψ_2) est continu dans $\varphi_1(x_0) \in X'$, il ne résulte pas nécessairement $(\varphi_1 \circ \varphi_2, \psi_1 \circ \psi_2)$ continu dans $x_0 \in X$.

Ce résultat s'explique par le fait que quoique (φ_1, ψ_1) est compatible avec δ', (φ_2, ψ_2) est compatible avec δ'', la paire $(\varphi_1 \circ \varphi_2, \psi_1 \circ \psi_2)$ pourrait ne pas être compatible avec δ''. Il est evident (cf. th. 5.9) qu'une condition suffisante pour que $(\varphi_1 \circ \varphi_2, \psi_1 \circ \psi_2)$ soit compatible avec δ'' est que (φ_1, ψ_1) soit continu sur (X, Y, ρ) et que $(\varphi_2, \psi_2))$ soit continu sur (X', Y', ρ').

Remarque 5.11 : De la définition de la continuité ponctuelle ou globale, il résulte que dans le cas des T-espaces simples et des paires de la forme (f, f), la notion de continuité coïncide avec la notion connue. (voir [1]).

§6. La Catégorie $\mathfrak{C}^0_{RS}$. Désignons par $\mathfrak{C}^0_{RS}$ la catégorie des R-espaces simples dont les morphismes sont les morphismes continus.

Désignons par $\mathfrak{R}$ le R-espace (X, Y, ρ) et par $\mathfrak{R}_d$ le duale de $\mathfrak{R}$, (Y, X, ρ^{-1}) (voir 1.13).

Désignons par $\mathrm{Hom}_{RS}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') = \{f : f = (\varphi, \psi) : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}', f \text{ continu}\}$. Si $f = (\varphi, \psi)$, désignons par f_d la paire (ψ, φ).

Proposition 6.1 : L'application $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_d$ définit un foncteur $F_d : \mathfrak{C}^0_{RS} \to \mathfrak{C}^0_{RS}$ isomorphisme de catégories.

Démonstration : le fait que F_d est une bijection sur les objets de $\mathfrak{C}^0_{RS}$ est évident.

Il faut montrer que quel que soit $f \in \mathrm{Hom}_{RS}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ $f_d \in \mathrm{Hom}_{RS}(\mathfrak{R}_d, \mathfrak{R}'_d)$. Pour cela il suffit à montrer que $[f_d^*(\delta'^{-1})] = [f^*(\delta')]^{-1}$. Soient $A \in \mathfrak{P}(X)$, $B \in \mathfrak{P}(Y)$. $A[f_d^*(\delta^{-1})]\ B \Leftrightarrow \varphi(A)\ \delta'^{-1}\psi(B) \Leftrightarrow \psi(B)\delta'\varphi(A) \Leftrightarrow B[f^*(\delta')]\ A \Leftrightarrow A[f^*(\delta')]^{-1}B$. Puisque f est continu sur R il résulte que $\delta \subseteq [f^*(\delta')] \Leftrightarrow \delta^{-1} \subseteq [f_d^*(\delta'^{-1})] \Leftrightarrow f_d$ est continu sur $\mathfrak{R}_d$.

Il est évident maintenant que F_d est un foncteur covariant isomorphisme de catégories. Q. E. D.

Corollaire 6.2 : Soient (X, δ), (X', δ') deux $\mathfrak{R}$-espaces simples [1] et $f : (X, \delta) \to (X', \delta')$ une application. Alors, f est continue sur (X, δ) si et seulement si f est continue sur (X, δ^{-1}). $(f : (X, \delta^{-1}) \to (X', \delta'^{-1}))$.

Proposition 6.3 : L'application $(X, Y, \delta) \to (X, \delta_x)$ définit un foncteur covariant F_N de la sous-catégorie $\mathfrak{C}^0_{RN}$ — des R-espaces simples naturels, dans la catégorie des $\mathfrak{R}$-espaces simples. (Nous avons désigné par δ_x la (X, X) relation de proximité associée à α_x — voir prop. 2.9).

Démonstration : Il suffit de montrer que $\varphi : X \to X'$ est continue sur (X, δ_x) [1] si $(\varphi, \psi) : (X, Y, \rho) \to (X', Y', \rho')$ est un morphisme continu.

Il est facile à vérifier que δ_x est définie par la relation : $A\delta_x A' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists x \in A,\ \exists y \in Y,\ \exists x' \in A'$ tel que

$$\{y\}\ \delta\ \{x\} \quad \text{et} \quad \{y\}\ \delta\ \{x'\}.$$

Puisque (φ, ψ) est un morphisme continu il résulte que pour tout A et B pour lesquels on a $B\delta A$ on a aussi $B\,[f^*(\delta')]\,A$. Mais $A\ \delta_x\ A' \Leftrightarrow \exists x \in A$, $\exists y \in Y$, $\exists x' \in A'$ tel que $\{y\}\ \delta\ \{x\}$ et $\{y\}\ \delta\ \{x'\} \Rightarrow \{y\}\,[f^*(\delta')]\,\{x\}$ et $\{y\}$ $[f^*(\delta')]\,\{x'\} \Rightarrow \delta_x \subseteq [\varphi^*(\delta'_x)]$ Q.E.D.

Proposition 6.5 : Pour tout ensemble de puissance 1, $\{a\}$, l'application $X \to (X, \{a\}, \rho)$ définit un foncteur plein, fidèle, $F_a : \mathrm{Ens} \to \mathfrak{C}^0_{RS}$.

Démonstration : Il est utile à voir que pour la paire $(X, \{a\})$ il n'existe qu'une seule R-application ρ dont la $(\{a\}, X)$ relation de proximité associe δ et définie par la condition :

$$\{a\}\ \delta\ A \Leftrightarrow A \neq \emptyset.$$

Il résulte donc, que quels-que soient deux R-espaces simples $(X, \{a\}, \rho)$ et $(X', \{a\}, \rho')$ et quelle-que soit l'application $f : X \to X'$, la paire $(f, 1_{\{a\}})$ est un morphisme continu sur $(X, \{a\}, \rho)$. De plus les paires $(f, 1_{\{a\}})$ sont les seuls morphismes continus sur $(X, \{a\}, \rho)$.

Le fait que F_a est plein et fidèle est evident. Q.E.D.

Remarques 6.6 : a) Pour tout ensemble de puissnce 1, $\{a\}$, il existe une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{C}^0_{RS}$ isomorphe à Ens. b) Tous les foncteurs F_a sont isomorphes. c) Ens peut-être identifiée à une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{C}^0_{RS}$.

§7. L'introduction des R-espaces. Définition 7.1 : *Une R-base sur le couple ordonné d'ensembles (X, Y) est un ensemble filtrant à droite des R-applications de X dans Y.* (voir rémarque 1.2).

Remarques 7.2 : a) L'ensemble $\mathfrak{B}(X, Y)$ des R-bases sur le couple ordonné d'ensembles (X, Y) est pré-ordonné par la relation : $r < r' \Leftrightarrow \forall \rho \in r$, $\exists \rho' \in r'$ tel que $\rho < \rho'$.
b) La relation de pré-ordre définie sur $\mathfrak{B}(X, Y)$ détermine une relation d'équivalence sur $\mathfrak{B}(X, Y)$ caractérisée par la condition : $r_1 \approx r_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2$ et $r_2 < r_1$.

Définition 7.3 : *Un R-système sur le couple ordonné d'ensembles (X, Y) est une classe d'équivalence s, $s \in \mathfrak{S}(X, Y) = \mathfrak{B}(X, Y)/\approx$.*

Remarque 7.4. : L'ensemble $\mathfrak{S}(X, Y)$ des R-systèmes sur (X, Y) est ordonné.

Définition 7.5 : *Un Respace sur le couple-ordonné d'ensembles (X, Y) est un triplet (X, Y, s) où s est un R-système.*

Définition 7.6 : *Une R-base r, sur le couple ordonné (X, Y) est simple si son cardinal est 1.*

Définition 7.7 : *Un R-système, sur le couple ordonné (X, Y) est simple s'il contient une R-base simple.*

Remarques 7.8 : a) Un R-système simple contient une seule R-base. b) Les R-espaces simples de § 1 sont les R-espaces dont les R-systèmes sont simples.

Définition 7.9 : *Un R-espace est ponctuel (naturel) si son R-système s, contient une R-base formée seulement des R-applications ponctuelles (naturelles).*

Proposition 7.10 : *Si $s \in \mathfrak{S}(X, Y)$ alors :*

(i) *pour tout $r \in s$,* $\rho_r = \bigcup_{\rho' \in r} \rho'$, $\rho_r \in \mathfrak{A}(X, Y)$.

(ii) *quels que soient $r_1, r_2 \in s$,* $\rho_{r_1} = \rho_{r_2}$.

Démonstration : (ii) est évident conformément à l'équivalence. (i) est évident de la définition 1.1 et de la définition 7.1.

Définition 7.11 : *Un R-espace naturel est fermé si son R-système s contient une R-base r, telle que $\rho = \bigcup_{\rho' \in r} \rho'$ soit une R-application naturelle.*

Pour garder l'unité de l'exposition, il faut maintenant rappeler une définition de J. Chacron [3].

Définition 7.12 : *Une structure pré-uniforme $(\mathfrak{A}, R)$ sur le produit $X \times Y$ est un couple formé d'une relation $R \subseteq X \times Y$ et d'une classe de parties de $X \times Y$ vérifiant les propriétés :*

$PU_1)$ $R \circ R^{-1} \supseteq \Delta_x$ *et* $R^{-1} \circ R \supseteq \Delta_y$.

$PU_2)$ $\mathfrak{A}$ *est un filtre sur* $X \times Y$.

$PU_3)$ *Pour tout* $V \in \mathfrak{A}$, $R \subseteq Y$.

$PU_4)$ *Pour tout* $V \in \mathfrak{A}$, *il existe* $W \in \mathfrak{A}$ *tel que*

$$W \circ W^{-1} \circ W \subseteq V.$$

Proposition 7.13 : *Pour toute structure pré-uniforme $(\mathfrak{A}, R)$ sur le produit $X \times Y$, il existe un R-espace naturel fermé, uniquement détérminé par $(\mathfrak{A}, R)$.*

Démonstration : Tout $V \in \mathfrak{A}$, V est une (X, Y) connexion. Soit δ_V la relation définie par $B\ \delta_V A \Leftrightarrow \exists x \in A$, $\exists y \in B$ tel que $(x, y) \in V$. On peut vérifier facilement que δ_V est une (Y, X) relation de proximité. Il est évident que $\{\delta_V\}_{V \in \mathfrak{A}}$ est un ensemble filtrant à gauche de (Y, X) relation de proximité, et que $\{\rho_V\}_{V \in \mathfrak{A}}$ est un ensemble filtrant à droite de R-applications.

Soit s le R-système déterminé par la R-base $\{\rho_V\}_{V \in \mathfrak{A}}$. Evidemment $\rho = \bigcup_{V \in \mathfrak{A}} \rho_V$ est naturelle (il en résulte facilement cf. PU_3 déf. 7.12).

Donc nous avons construit un R-espace naturel fermé à partir d'une structure pré-uniforme. Q.E.D.

Remarque 7.14 : Il est utile à voir que les R-espaces sont des structures plus générales que les strucutres pré-uniformes. L'exemple 8.1 met en évidence ce fait.

§8. Exemples. Applications. *Exemple 8.1* : Soit $X = \{a, b\}$; $Y =]-\infty, +\infty[= R$; $x_0 \in R$. Désignons par ρ, l'application définie par les conditions :

$$\rho(\{a\}) = \{A ; A = R - B, \text{ Card } (B) - \text{fini}\} : \rho(\{b\}) = \{R\} ; \rho(\emptyset) = \mathfrak{P}(R)$$

$$\text{et } \rho(\{a, b\}) = \{R\}.$$

Il est facile à voir que ρ est une R-application de $\{a, b\}$ dans R. Aussi on peut vérifier que pour tout $x \in R$, $\{x\} \,\delta\, \{b\}$ et pour tout $x \in R$, $\{x\} \,\bar{\delta}\, \{a\}$. Donc l'application ρ n'est ni ponctuelle, ni naturelle. Cet exemple met en évidence le fait que la définition 2.1 n'est pas banale et aussi le fait qu'il existe des R-espaces simples qui ne sont pas déterminés par des structures pré-uniformes. Donc les R-espaces sont des structures plus générales que les structures pré-uniformes. (voir 7.13).

Exemple 8.2 : Soit $X = \{a, b\}$; $Y =]-\infty + \infty[= R$, $x_0 \in R$. Désignons par ρ l'application définie par les conditions : $\rho(\{a\}) = \{A ; A \subseteq R, x_0 \in A\}$; $\rho(\{b\}) = \{R, R - \{x_0\}\}$ $\rho(\{a, b\}) = \{R\}$. $\rho(\emptyset) = \mathfrak{P}(R)$. Evidemment $(\{a, b\}, R, \rho)$ est un R-espace simple séparé T_2. Il est utile à voir que $(\{a, b\}, R, \rho)$ est naturel. En effet : $\{x\} \,\delta\, \{a\} \Leftrightarrow \exists\, \mathfrak{A}$ — ultrafiltre sur R, tel que $x \in \mathfrak{A} > \rho(\{a\}) \Leftrightarrow x = x_0$; $\{x\} \,\delta\, \{b\} \Leftrightarrow \exists\, \mathfrak{U}$ — ultrafiltre sur R, tel que $x \in \mathfrak{U} > \rho(\{b\}) \Leftrightarrow x \neq x_0$. Puisque la restriction de la quasi-adhérence $\alpha : \mathfrak{P}(R) \to \mathfrak{P}(\{a, b\})$, à R n'est pas injective, il résulte que pour le R-espace simple $(\{a, b\}, R, \rho)$ il n'existe aucune application $s : \{a, b\} \to R$, compatible avec α, tel que $(\{a, b\}, R, \rho)$ soit séparé T_1 par s. (voir 3.9)

Exemple 8.3 : Soit X, Y deux ensembles non-vides $0 \subset X \times Y$, tels que $0 \circ 0^{-1} \supseteq \Delta_X$ et $0^{-1} \circ 0 \supseteq \Delta_Y$.

Définition : *Une* 0 *quasi-métrique sur le couple ordonné* (X, Y) *est une application* $h : X \times Y \to [0, +\infty[$ *vérifiant les conditions :*

QM_1) $h(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in 0$,

QM_2) *pour toutes* $(x, y), (z, v) \in 0$, $h(x, v) = h(z, y)$.

Soit $A \subset X$, $B \subset Y$ deux ensembles. On définit la distance entre A et B, désignée par $d(A, B)$, l'application,

$$d : \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(Y) \to [0, +\infty[, \quad d(A, B) = \inf_{(x,y) \in A \times B} h(x, y).$$

Proposition : *Soit* $0 \subset X \times Y$, $0 \circ 0^{-1} \supseteq \Delta_x$, $0^{-1} \circ 0 \supseteq \Delta_y$ et $h : X \times Y \to [0, +\infty[$, h vérifiant QM_1).

Alors la relation $\delta \subset \mathfrak{P}(Y) \times \mathfrak{P}(X)$ définie par :

$B \,\delta\, A \Leftrightarrow d(A, B) = 0$ est une (Y, X) relation de proximité.

La démonstration est evidente.

Exemple 8.4 : *Soit* $\mathfrak{C}([a, b]) = \{f : \; f : [a, b] \to]-\infty, +\infty[, f$ continue$\}$ $(a, b \in]-\infty, +\infty[, a < b)$. Soit $h : \mathfrak{C}([a, b]) \times]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par la condition $h(f, x) = m(\sup f, x)$ (m — est la métrique usuelle sur $]-\infty, +\infty[$.)

Si θ est la relation définie par la condition :

$f \,\theta\, x \Leftrightarrow \sup f = x.$, alors on vérifie facilement que h est une θ quasi-métrique.

RÉFÉRENCES

1. Hacque M. — *Les T-espaces et leurs applications*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle, Volume IX, 3, 1967.
2. Gaesályi Sándor — *Skew proximity functions*, Publicationes mathematicae, Tomus 12, Fasc. 1—4, Debrecen, 1965.
3. Chacron J. — *Structures relationnelles*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle, Volume XI, 2, 1969, Ch. II.

R-SPAȚIILE SIMPLE

Rezumat

Obiectivul principal al lucrării constă în definirea și studierea unei structuri mai generale decît structurile pre-uniforme introduse de J. Chacron [3] și decît T-spațiile introduse de M. Hacque [1], structură numită R-spațiu și obținută prin asocierea oricărei submulțimi a unei mulțimi date X, a unei clase de filtre pe o mulțime dată Y, asociere ce satisface anumite condiții. Pentru noua structură introducem și studiem noțiuni analoge unor noțiuni din topologie ca : aderență, proximitate, continuitate, compacitate.

Exemplele date în ultimul paragraf al lucrării pun în evidență consistența definițiilor date, cît și gradul de generalitate a noțiunilor introduse.