Finally, we can conclude that the Almansi-Michell's problem for visco-elastic beams has the solution (3.1) where: $A_j(t)$, $a_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$, are given by (4.17) — (420), (4.26) — (4.29), $k(t)$ is the solution of the equation (5.4), $\Phi(\tilde{x}, t)$ is the solution of the problem (4.16), $\psi(\tilde{x}, t)$ is given by (5.1) and $v_\alpha(\tilde{x}, t)$, $\alpha = 1, 2$ is the solution of the plane viscoelastic problem (4.4), (4.10).

REFERENCES

1. Borş, C. I. — *Teoria elasticităţii corpurilor anizotrope*, Editura Acad. R.S.R., Bucureşti, 1970.
2. Ciobanu Gh. — *On the quasistatic torsion of visco-elastic beams*, An. şt. Univ. Iaşi, Matematica, 18 (1972), p 453.
3. Ciobanu Gh. — *The quasi-static flexure of viscoelastic beams*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., (to appear).
4. Ciobanu Gh. — *Saint-Venant's problem in viscoelasticity*. Rev. Roum. Math. Pure et Appl., (to appear).
5. Corduneanu, C. — *Principles of differential and integral equations*, Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1971.
6. Gurtin M. E. and Sternberg, E. — *On the linear theory of viscoelasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal. 11 (1962), p. 291.
7. Herrmann, L. R. — *On a general theory of viscoelasticity*, J. Franklin Inst. 280 (1965), p. 244.
8. Ieşan, D. — *On Almansi's problem for elastic cylinders*, Atti Accad. Sci. Inst. Bologna, Rend. ser. 12, 9 (1972), p. 128.
9. Volterra, V. — *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità*, Atti Accad. Lincei, Rend. ser. 5, 18, 2 (1909), p. 295.

ASUPRA PROBLEMEI LUI ALMANSI-MICHELL PENTRU BARE VÎSCOELASTICE

Rezumat

Se consideră problema lui Almansi-Michell pentru bare cilindrice vîscoelastice, ecuaţiile constitutive pentru mediul vîscoelastic fiind date de (1.1). Soluţia problemei este dată de (3.1).

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" — Iaşi
Secţia I a. Matematică, tom XX, 1974

LA DÉFORMATION DES COQUES ÉLASTIQUES MICROPOLAIRES

PAR

CRISTIAN CONSTANDA

Le développement de la théorie des coques élastiques comme une branche spéciale de la théorie de l'élasticité est dû non seulement à son importance pour la pratique, mais encore à la possibilité de réduire le problème tridimensionnel à l'un en deux variables. Les recherches dans ce domaine ont été commencées après 1850, avec les travaux de Kirchhoff [1] sur les plaques élastiques minces et de Love [2] sur les coques élastiques minces. Plus tard, au début de notre siècle, l'attention des auteurs s'est dirigée encore sur les coques épaisses ou d'épaisseur moyenne. Les nombreuses théories développées au XX-ème siècle répondent en grande partie aux nécessités applicatives, parce qu'elles proposent des formules et des schémas approximatives destinées à simplifier les calcules. Mais la réalisation de ce désidérat a influencé d'une manière négative presque chaque fois la rigueur de l'aspect mathématique et mécanique du problème: les théories mentionnées présentent des incompatibilités mathématiques et ne sont pas soumises aux principes mécaniques fondamentaux.

Dans ce qui suit on construit une théorie des coques élastiques micropolaires qui contribue à élimination de ces inconvénients. Elle peut justifier quelques résultats antérieurs obtenus par des méthodes sans support théorique et, par des particularisations convenables, elle permet de retrouver beaucoup de théories déjà connues dans la littérature de spécialité.

Parmi les auteurs roumains qui ont amélioré la théorie des plaques et des coques élastiques nous citons: M. Haimovici [3], [4], V. Manea [5], M. Mişicu [6], P. P. Teodorescu [7] etc.

On considère un corp élastique occupant un domaine D borné d'une surface S dans l'espace euclidien tridimensionnel. On fait les notations suivantes:

t^{ij} — les composantes du tenseur des tensions ;
m^{ij} — les composantes du tenseur des micromoments ;
$\left.\begin{matrix} e_{ij} \\ \varkappa_{ij} \end{matrix}\right\}$ — les composantes des facteurs de la déformation ;
u_i — les composantes du vecteur du déplacement ;
φ_i — les composantes du vecteur de la microrotation ;
f^i — les composantes du vecteur des forces de masse ;
g^i — les composantes du vecteur des micromoments de masse ;
$\left.\begin{matrix} A^{ijkl} \\ B^{ijkl} \\ C^{ijkl} \end{matrix}\right\}$ — les coefficients élastiques du matériel.

On appelle état d'équilibre élastique le n-ouple :

$$\mathcal{S} = (t^{ij}, m^{ij}, e_{ij}, \varkappa_{ij}, u_i, \varphi_i, f^i, g^i, \tilde{t}^i, \tilde{m}^i, \tilde{u}_i, \tilde{\varphi}_i),$$

si ces quantités satisfont aux équations :

(1 a) $\quad t^{ji}_{|j} + f^i = 0 \qquad$ dans D,
(1 b) $\quad m^{ji}_{|j} + \varepsilon^i_{jk} t^{jk} + g^i = 0 \qquad$ dans D,
(2 a) $\quad t^{ij} = A^{ijkl} e_{kl} + B^{ijkl} \varkappa_{kl}$,
(2 b) $\quad m^{ij} = B^{klij} e_{kl} + C^{ijkl} \varkappa_{kl}$,
(3 a) $\quad e_{ij} = u_{j|i} - \varepsilon^k_{ij} \varphi_k$,
(3 b) $\quad \varkappa_{ij} = \varphi_{j|i}$,
(4 a) $\quad u_i = \tilde{u}_i$ sur S_u, $\quad \varphi_i = \tilde{\varphi}_i$ sur S_φ,
(4 b) $\quad t^i = t^{ji} n_j = \tilde{t}^i$ sur S_t, $\quad m^i = m^{ji} n_j = \tilde{m}^i$ sur S_m,

où :

(5) $$A^{ijkl} = A^{klij}, \; C^{ijkl} = C^{klij},$$

S_u, S_φ, S_t, S_m sont des parties de la surface S telles que :

$$S = S_u \cup S_t = S_\varphi \cup S_m, \; S_u \cap S_t = S_\varphi \cap S_m = \varnothing,$$

et n_i sont les composantes du vecteur unitaire de la normale extérieure à S.

Pour la déduction des équations de la théorie des coques élastiques micropolaires, on utilise le principe variationnel suivant, démontré par Hellinger [8] et Reissner [9] et généralisé par I. Hlavacek et M. Hlavacek [10] pour l'élasticité micropolaire :

$\mathcal{S}$ est un état d'équilibre élastique si, et seulement si, pour des variations indépendantes des quantités :

$$t^{ij}, \; m^{ij}, \; e_{ij}, \; \varkappa_{ij}, \; u_i, \; \varphi_i$$

on a :

(6) $$\delta \mathcal{J} = 0,$$

où

(7) $$\mathcal{J} = \int_D \{ - t^{ij} e_{ij} - m^{ij} \varkappa_{ij} + W(e_{ij}, \varkappa_{ij}) + t^{ij} (u_{j|i} - \varepsilon^k_{ij} \varphi_k) + m^{ij} \varphi_{j|i} - f^i u_i - g^i \varphi_i \} \, dv - \int_{S_u} t^i (u_i - \tilde{u}_i) \, da - \int_{S_\varphi} m^i (\varphi_i - \tilde{\varphi}_i) \, da - \int_{S_t} \tilde{t}^i u_i \, da - \int_{S_m} \tilde{m}^i \varphi_i \, da,$$

$W(e_{ij}, \varkappa_{ij})$ étant la forme quadratique :

(8) $$2W(e_{ij}, \varkappa_{ij}) = A^{ijkl} e_{ij} e_{kl} + 2B^{ijkl} e_{ij} \varkappa_{kl} + C^{ijkl} \varkappa_{ij} \varkappa_{kl}.$$

On note par Σ^+, Σ^-, Σ, $\tilde{\Sigma}$ respectivement la face supérieure, la face inférieure, la surface moyenne et la surface latérale de la coque, et soit $\gamma = \tilde{\Sigma} \cap \Sigma$. Dans un système normal de coordonnées on considère x^α ($\alpha = 1, 2$) sur Σ et x^3 sur la normale à Σ. Si h est l'épaisseur de la coque, on a $|x^3| \leqslant h/2$ et l'on suppose $h < 2|R_{\min}| \neq 0$, pour éliminer les points singuliers, $R_{\min}$ étant le rayon minime de courbure de la surface. Dans ce qui suit on suppose que Σ, γ sont assez lisses et les fonctions qui interviennent dans les calcules sont autant de dérivées qu'on a besoin.

On introduit quelques notations. Si φ est une fonction scalaire et φ^α $\varphi^{\alpha\beta}$ sont des fonctions tensorielles de x^1, x^2, x^3, on considère les opérateurs :

(9) $$_{(i)}I\varphi = \int_{-h/2}^{+h/2} (x^3)^i \mu \varphi \, dx^3,$$
$$_{(i)}I^\gamma_\alpha \varphi^\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} (x^3)^i \mu \mu^\gamma_\alpha \varphi^\alpha \, dx^3,$$
$$_{(i)}I^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} (x^3)^i \mu \mu^\gamma_\alpha \mu^\delta_\beta \varphi^{\alpha\beta} \, dx^3,$$

où :

$$\mu^\gamma_\alpha = \delta^\gamma_\alpha - x^3 b^\gamma_\alpha, \qquad \mu = \det(\mu^\gamma_\alpha),$$

$b_{\alpha\beta}$ étant les coefficients de la seconde forme fondamentale de la surface Σ. On note maintenant :

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
N^{j\beta}_{(i)} &= {}_{(i)}I^{\beta}_{\gamma}\, t^{j\gamma}, & N^{j3}_{(i)} &= {}_{(i)}I\, t^{j3},\\
M^{j\beta}_{(i)} &= {}_{(i)}I^{\beta}_{\gamma}\, m^{j\gamma}, & M^{j3}_{(i)} &= {}_{(i)}I m^{j3},
\end{aligned}
$$

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
F^{\beta}_{(i)} &= {}_{(i)}I^{\beta}_{\gamma} f^{\gamma}, & F^{3}_{(i)} &= {}_{(i)}I\, f^{3},\\
G^{\beta}_{(i)} &= {}_{(i)}I^{\beta}_{\gamma}\, g^{\gamma}, & G^{3}_{(i)} &= {}_{(i)}I\, g^{3},
\end{aligned}
$$

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
L^{\beta}_{(i)} &= [(x^3)^i\, \mu\mu^{\beta}_{\gamma}\, t^{3\gamma}]^{+h/2}_{-h/2}, & L^{3}_{(i)} &= [\,(x^3)^i\, \mu t^{33}]^{+h/2}_{-h/2}\,.\\
R^{\beta}_{(i)} &= [(x^3)^i\, \mu\mu^{\beta}_{\gamma}\, m^{3\gamma}]^{+h/2}_{-h/2}, & R^{3}_{(i)} &= [(x^3)^i\, \mu m^{33}]^{+h/2}_{-h/2}
\end{aligned}
$$

Pour simplifier les calculs on considère un matériel ayant $x^3 = \text{const.}$ comme surface de symétrie élastique.

La seule hypothèse faite *à priori* est l'expression polynomiale par rapport à x^3 des composantes du déplacement et de la microrotation :

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
u_i(x^j) &= \sum_{k=0}^{n} u_i^{(k)}(x^\beta)\,(x^3)^k,\\
\varphi_i(x^j) &= \sum_{k=0}^{n} \varphi_i^{(k)}(x^\beta)\,(x^3)^k,
\end{aligned}
$$

où quelques fonctions $u_i^{(k)}$, $\varphi_i^{(k)}$ peuvent être nulles, mais au moins une des fonctions $u_i^{(n)}$, $\varphi_i^{(n)}$ est non nulle.

Vu la linéarité de la théorie et les rélations entre les composantes d'un tenseur dans l'espace euclidien tridimensionnel et ses composantes dans l'espace de la coque [11], on suppose les facteurs de la déformation e_{ij}, $\varkappa_{ij}$ ayant la forme :

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
e_{i\beta} &= \mu^{\nu}_{\beta} \sum_{k=0}^{n} \Gamma^{(k)}_{i\nu}(x^\alpha)\,(x^3)^k,\\
e_{i3} &= \sum_{k=0}^{n} \Gamma^{(k)}_{i3}(x^\alpha)\,(x^3)^k,\\
\varkappa_{i\beta} &= \mu^{\nu}_{\beta} \sum_{k=0}^{n} \Lambda^{(k)}_{i\nu}(x^\alpha)\,(x^3)^k,\\
\varkappa_{i3} &= \sum_{k=0}^{n} \Lambda^{(k)}_{i3}(x^\alpha)\,(x^3)^k.
\end{aligned}
$$

La surface S qui borne le domaine D de la coque est composée de Σ^+, Σ^-, $\tilde{\Sigma}$. Si da, $d\sigma_+$, $d\sigma_-$, $d\sigma$, $d\tilde{\sigma}$ sont respectivement les éléments d'aire sur S, Σ^+, Σ^-, Σ, $\tilde{\Sigma}$, alors on a les relations :

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
da\,|_{\Sigma^+} &= d\sigma_+ = \mu(x^\alpha, +h/2)\,d\sigma,\\
da\,|_{\Sigma^-} &= d\sigma^- = \mu(x^\alpha, -h/2)\,d\sigma,\\
da\,|_{\tilde{\Sigma}} &= d\tilde{\sigma} = \mu ds\, dx^3.
\end{aligned}
$$

où ds est l'élement d'arc sur γ. L'élément de volume est :

$$
dv = \mu d\sigma\, dx^3.
$$

On suppose que sur Σ^+, Σ^- sont donnés les efforts $t^{3i}(x^\alpha, +h/2)$, $t^{3i}(x^\alpha, -h/2)$, $m^{3i}(x^\alpha, +h/2)$, $m^{3i}(x^\alpha, -h/2)$. En utilisant les formules de dérivation covariante dans l'espace de la coque (notée par „||") et en intégrant après x^3 entre $-h/2$ et $+h/2$, on trouve pour $\mathcal{J}$ une expression dont, en appliquant (6), on obtient les équations d'équilibre, les relations constitutives, les relations entre les déformations et les déplacements et les conditions aux limites de la théorie :

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
&N^{\alpha\nu}_{(k)||\alpha} - b^{\nu}_{\alpha} N^{\alpha 3}_{(k)} - kN^{3\nu}_{(k-1)} + F^{\nu}_{(k)} + L^{\nu}_{(k)} = 0,\\
&N^{\alpha 3}_{(k)||\alpha} + b_{\nu\alpha} N^{\alpha\nu}_{(k)} - kN^{33}_{(k-1)} + F^{3}_{(k)} + L^{3}_{(k)} = 0,\\
&M^{\alpha\rho}_{(k)||\alpha} - b^{\rho}_{\alpha} M^{\alpha 3}_{(k)} - kM^{3\rho}_{(k-1)} + \varepsilon^{\rho}_{\nu}(b^{\nu}_{\alpha} N^{\alpha 3}_{(k+1)} -\\
&\qquad - N^{\nu 3}_{(k)} + N^{3\nu}_{(k)}) + G^{\rho}_{(k)} + R^{\rho}_{(k)} = 0,\\
&M^{\alpha 3}_{(k)||\alpha} + b_{\nu\alpha} M^{\alpha\nu}_{(k)} - kM^{33}_{(k-1)} + \varepsilon_{\nu\rho}(N^{\nu\rho}_{(k)} - b^{\rho}_{\alpha} N^{\alpha\nu}_{(k+1)}) +\\
&\qquad + G^{3}_{(k)} + R^{3}_{(k)} = 0\,;
\end{aligned}
$$

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
\Gamma^{(k)}_{\alpha\nu} &= u^{(k)}_{\nu||\alpha} - b_{\nu\alpha} u^{(k)}_{3} + \varepsilon_{\nu\alpha} \varphi^{(k)}_{3} + \varepsilon_{\nu\rho} b^{\rho}_{\alpha} \varphi^{(k-1)}_{3},\\
\Gamma^{(k)}_{\alpha 3} &= u^{(k)}_{3,\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha} u^{(k)}_{\lambda} + \varepsilon^{\rho}_{\alpha} \varphi^{(k)}_{\rho} - \varepsilon^{\rho}_{\nu} b^{\nu}_{\alpha} \varphi^{(k-1)}_{\rho},\\
\Gamma^{(k)}_{3\nu} &= (k+1)\, u^{(k+1)}_{\nu} - \varepsilon^{\rho}_{\nu} \varphi^{(k)}_{\rho},\\
\Gamma^{(k)}_{33} &= (k+1)\, u^{(k+1)}_{3},\\
\Lambda^{(k)}_{\alpha\nu} &= \varphi^{(k)}_{\nu||\alpha} - b_{\nu\alpha} \varphi^{(k)}_{3},\\
\Lambda^{(k)}_{\alpha 3} &= \varphi^{(k)}_{3,\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha} \varphi^{(k)}_{\lambda},\\
\Lambda^{(k)}_{3\nu} &= (k+1)\, \varphi^{(k+1)}_{\nu},\\
\Lambda^{(k)}_{33} &= (k+1)\, \varphi^{(k+1)}_{3}\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N^{\alpha\nu}_{(k)} &= \sum_{h=0}^{n} (\mathcal{A}^{\alpha\nu\gamma\theta}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{\gamma\theta} + \mathcal{A}^{\alpha\nu 33}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{33} + \mathcal{B}^{\alpha\nu\gamma 3}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{\gamma 3} + \mathcal{B}^{\alpha\nu 3\theta}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{3\theta}),\\
N^{\alpha 3}_{(k)} &= \sum_{h=0}^{n} (\mathcal{A}^{\alpha 3\gamma 3}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{\gamma 3} + \mathcal{A}^{\alpha 33\theta}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{3\theta} + \mathcal{B}^{\alpha 3\gamma\theta}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{\gamma\theta} + \mathcal{B}^{\alpha 333}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{33}),\\
N^{3\nu}_{(k)} &= \sum_{h=0}^{n} (\mathcal{A}^{3\nu\alpha 3}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{\alpha 3} + \mathcal{A}^{3\nu 3\theta}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{3\theta} + \mathcal{B}^{3\nu\gamma\theta}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{\gamma\theta} + \mathcal{B}^{3\nu 33}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{33}),\\
N^{33}_{(k)} &= \sum_{h=0}^{n} (\mathcal{A}^{33\alpha\nu}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{\alpha\nu} + \mathcal{A}^{3333}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{33} + \mathcal{B}^{33\gamma 3}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{\gamma 3} + \mathcal{B}^{3330}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{30}),\\
M^{\alpha\nu}_{(k)} &= \sum_{h=0}^{n} (\mathcal{B}^{\gamma 3\alpha\nu}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{\gamma 3} + \mathcal{B}^{3\gamma\alpha\nu}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{3\gamma} + \mathcal{C}^{\alpha\nu\gamma\theta}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{\gamma\theta} + \mathcal{C}^{\alpha\nu 33}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{33}),\\
M^{\alpha 3}_{(k)} &= \sum_{h=0}^{n} (\mathcal{B}^{\gamma\theta\alpha 3}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{\gamma\theta} + \mathcal{B}^{33\alpha 3}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{33} + \mathcal{C}^{\alpha 3\gamma 3}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{\gamma 3} + \mathcal{C}^{\alpha 330}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{30}),\\
M^{3\nu}_{(k)} &= \sum_{h=0}^{n} (\mathcal{B}^{\gamma\theta 3\nu}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{\gamma\theta} + \mathcal{B}^{333\nu}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{33} + \mathcal{C}^{3\nu\alpha 3}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{\alpha 3} + \mathcal{C}^{3\nu 3\theta}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{3\theta}),\\
M^{33}_{(k)} &= \sum_{h=0}^{n} (\mathcal{B}^{\alpha 333}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{\alpha 3} + \mathcal{B}^{3\nu 33}_{(k+h)} \Gamma^{(h)}_{3\nu} + \mathcal{C}^{33\nu\alpha}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{\nu\alpha} + \mathcal{C}^{3333}_{(k+h)} \Lambda^{(h)}_{33}),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

où l'on a noté :

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}^{\alpha\theta\gamma\nu}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\nu\theta}_{\delta\beta} A^{\alpha\beta\gamma\delta}, && \mathcal{A}^{\alpha\theta 33}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\theta}_{\beta} A^{\alpha\beta 33},\\
&\mathcal{A}^{\alpha 3\gamma 3}_{(i)} = {}_{(i)}I\, A^{\alpha 3\gamma 3}, && \mathcal{A}^{\alpha 33\lambda}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\lambda}_{\gamma} A^{\alpha 33\gamma},\\
&\mathcal{A}^{303\lambda}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\lambda\theta}_{\gamma\alpha} A^{3\alpha 3\gamma}, && \mathcal{A}^{3333}_{(i)} = {}_{(i)}I\, A^{3333},\\
&\mathcal{B}^{\alpha\theta\gamma 3}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\theta}_{\beta} B^{\alpha\beta\gamma 3}, && \mathcal{B}^{\alpha\theta 3\nu}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\nu\theta}_{\gamma\beta} B^{\alpha\beta 3\gamma},\\
&\mathcal{B}^{\alpha 3\gamma\nu}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\nu}_{\delta} B^{\alpha 3\gamma\delta}, && \mathcal{B}^{\alpha 333}_{(i)} = {}_{(i)}I\, B^{\alpha 333},\\
&\mathcal{B}^{30\gamma\nu}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\nu\theta}_{\delta\alpha} B^{3\alpha\gamma\delta}, && \mathcal{B}^{3033}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\theta}_{\alpha} B^{3\alpha 33},\\
&\mathcal{B}^{33\gamma 3}_{(i)} = {}_{(i)}I\, B^{33\gamma 3}, && \mathcal{B}^{333\lambda}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\lambda}_{\gamma} B^{333\gamma},\\
&\mathcal{C}^{\alpha\theta\gamma\nu}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\theta\nu}_{\beta\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta}, && \mathcal{C}^{\alpha\theta 33}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\theta}_{\beta} C^{\alpha\beta 33},\\
&\mathcal{C}^{\alpha 3\gamma 3}_{(i)} = {}_{(i)}I\, C^{\alpha 3\gamma 3}, && \mathcal{C}^{\alpha 33\lambda}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\lambda}_{\gamma} C^{\alpha 33\gamma},\\
&\mathcal{C}^{303\lambda}_{(i)} = {}_{(i)}I^{\lambda\theta}_{\gamma\alpha} C^{3\alpha 3\gamma}, && \mathcal{C}^{3333}_{(i)} = {}_{(i)}I\, C^{3333};
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
u^{(k)}_i \,|_{\gamma_u} = \widetilde{u}^{(k)}_i, \qquad \varphi^{(k)}_i \,|_{\gamma_y} = \widetilde{\varphi}^{(k)}_i, \tag{20 a}
$$

$$
N^{\alpha i}_{(k)} \nu_\alpha \,|_{\gamma_t} = \widetilde{N}^{i}_{(k)}, \qquad M^{\alpha i}_{(k)} \nu_\alpha \,|_{\gamma_m} = \widetilde{M}^{i}_{(k)}, \tag{20 b}
$$

ν_α étant les composantes du vecteur unitaire de la normale extérieure à γ

Si l'on définit l'énergie de déformation élastique sur l'unité de surface moyenne par :

$$
\overline{W} = \int_{-h/2}^{+h/2} \mu W(e_{ij}, \varkappa_{ij})\, dx^3, \tag{21}
$$

on trouve pour $\overline{W}$ l'expression suivante :

$$
2\overline{W} = \sum_{k=0}^{n} (N^{ij}_{(k)} \Gamma^{(k)}_{ij} + M^{ij}_{(k)} \Lambda^{(k)}_{ij}), \tag{22}
$$

et en remplaçant $N^{ij}_{(k)}$, $M^{ij}_{(k)}$ de (18), on observe que $\overline{W} = W(\Gamma^{(k)}_{ij}, \Lambda^{(k)}_{ij})$ est une forme quadratique en $\Gamma^{(k)}_{ij}$, $\Lambda^{(k)}_{ij}$.

On voit que les équations d'équilibre (16) coïncident avec celles trouvées par M i ș i c u [6], qui les a obtenu en multipliant les équations d'équilibre élastique tridimensionnel avec certains facteurs et en intégrant après x^3 entre $-h/2$ et $+h/2$. De cette manière on peut déduire les équations de mouvement de la théorie :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{i}_{(k)} &= \sum_{h=0}^{n} \lambda_{(k+h)} \ddot{u}^{i}_{(h)},\\
\mathcal{R}^{i}_{(k)} &= \sum_{h=0}^{n} \Omega^{ij}_{(k+h)} \ddot{\varphi}^{(h)}_{j},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

où l'on a noté :

$$
\lambda_{(i)} = {}_{(i)}I\rho, \tag{24 a}
$$

$$
\Omega^{jh}_{(i)} = {}_{(i)}I\, I^{jh}, \tag{24 b}
$$

(ρ, I^{jh} étant respectivement la densité et le tenseur des moments d'inertie), et $\mathcal{P}^{i}_{(k)}$, $\mathcal{R}^{i}_{(k)}$ sont respectivement les premiers membres des équations (16).

Analysons quelques cas particuliers plus importants :

1° Supposons les développements suivants :

$$
\begin{aligned}
u_\alpha &= u^{(0)}_\alpha(x^\beta) + x^3 u^{(1)}_\alpha(x^\beta), \qquad u_3 = u^{(0)}_3(x^\beta),\\
\varphi_\alpha &= \varphi^{(0)}_\alpha(x^\beta), \qquad \varphi_3 = \varphi^{(0)}_3(x^\beta).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Supposons encore la distribution de la tension :

BIBLIOGRAPHIE

1. Kirchhoff G. R. — *Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*. J. Reine Angew. Math., Band 40 (1850).
2. Love A. E. H. — *Theory of thin elastic shells*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, vol. 17 (1888).
3. Haimovici M. — *On the bending of elastic plates*, Bull. Acad. Polon. Sci. Techn., XIV, 11–12 (1960).
4. — *Sur la flexion des plaques élastiques*, An. şt. Univ. Iaşi, seria I, XI (1965).
5. Manea V. — *Cîteva probleme ale teoriei plăcilor plane elastice*, Ed. Acad. R.S.R. Bucureşti, 1966.
6. Mişicu M. — *Mecanica mediilor deformabile. Fundamentele elasticităţii structurale*, Ed. Acad. R. S. R., Bucureşti, 1966.
7. Teodoresen P. P. — *Consideraţii în legătură cu calculul plăcilor groase*, Bul. şt. Inst. polit. Cluj, 11, 2 (1968).
8. Hellinger E. — *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, vol. 4, part. 4.
9. Reissner E. — *On a variational theorem in elasticity*, J. Math. Phys., vol. 29 (1950).
10. Hlavacek I. & Hlavacek M. — *On the existence and uniqueness of solutions and some variational principles in linear theories of elasticity with couple-stresses*. Aplikace Mat., vol. 14 (1969).
11. Naghdi P. M. — *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics vol. 4 (1963).
12. Eringen A. C. — *Theory of micropolar plates*, Z. A. M. P., 18 (1967).
13. Manolachi A. — *On the bending of elastic plates in asymmetrical elasticity*. An. şt. Univ. Iaşi, Seria I a. Matematică, tom XIX, f. 1, 1973, p. 209.
14. Reissner E. — *Stress-strain relations in the theory of thin elastic shells*, J. Math. Phys., vol. 31, 1952.
15. Vekua I. N. — *Teorija tonkih pologih obolocek peremennoj tolsciny*, Trudy tbiliskogo mat. in-ta, tom 30, Tbilisi, 1965.

DEFORMAREA PLĂCILOR ELASTICE MICROPOLARE

Rezumat

Se construieşte o teorie a plăcilor elastice micropolare presupunînd forma (13) pentru expresiile deplasărilor şi microrotaţiilor. Se discută pe scurt cîteva cazuri particulare mai importante.