Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" — Iaşi
Secţia I a. Matematică, tom XX, 1974

UN' ESTENSIONE DEL METODO DI CONFRONTO PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

DE

DAVID LOWELL LOVELADY

I. Introduzione. Sia Y uno spazio lineare di dimensione finita con la norma $|\ |$, sia R l'intervallo $(-\infty, \infty)$, e sia R^+ l'intervallo $[0, \infty)$. Sia F una funzione continua da $R^+ \times Y$ a Y, e sia ω una funzione continua da $R^+ \times R^+$ a R^+. E noto (C. Corduneanu [7, p. 53]) che se

$$|F(t, x)| \leqslant \omega(t, |x|) \tag{1}$$

per ogni (t, x) in $R^+ \times Y$, allora ogni soluzione di

$$u'(t) = F(t, u(t)); \; u(0) = z \tag{2}$$

è limitata per la soluzione estrema superiore di

$$r'(t) = \omega(t, r(t)); \; r(0) = |z|. \tag{3}$$

R. Conti [5, Teorema 1] ha dimostrato che se si richiede che F sia differenziabile, allora si può indebolire (1) a una condizione che permette a ω di avere valori negativi. Estenderemo i risultati di Conti indebolendo (1) senza richiedere che F sia differenziabile.

I nostri risultati includeranno delle disuguaglianze di A. Wintner [15], T. Ważewski [14], e S. M. Lozinskii [13], e essi sono connessi a un risultato di V. Lakshmikantham e N. Onuchic [9] (anche [8, p. 100, Theorem 2.12.1]). Le nostre ipotesi sono connesse alle ipotesi di [10], [11], e [12].

II. I risultati. Sia ω una funzione continua da $R^+ \times R$ a R, e sia F come precedentemente. Avremo bisogno della condizione (C 1).

(C 1): *Se (t, x) è in $R^+ \times Y$ e c è un numero positivo allora*
$$|x - cF(t, x)| \geqslant |x| - c\omega(t, |x|).$$

Il resultato seguente è il nostro risultato più importante.

Teorema 1 : *Sia z in Y, sia u una soluzione non prolungabile di (2), e sia r la soluzione non prolungabile estrema superiore di (3). Supponiamo che (C 1) è valida. Allora ogni valore di r è non negativo e*

$$|u(t)| \leqslant r(t)$$

per ogni t, dove u e r sono definiti.

Sia m_- quella funzione da $Y \times Y$ a R data per

$$m_-[x, y] = \lim_{\delta \to 0} (1/\delta)(|x + \delta y| - |x|).$$

Perchè (C 1) è valida, abbiamo

$$m_-[x, F(t, x)] \leqslant \omega(t, |x|)$$

per ogni (t, x) in $R^+ \times Y$ (vedi anche [6, p. 3]). Inoltre, se f è una funzione da un intervallo di R^+ a Y, se f è definito in c, se $f'_-(c)$ (la derivata sinistra di f a c) esiste, e se p è dato per $p(t) = |f(t)|$, allora $p'_-(c)$ esiste e $p'_-(c) = m_-[f(c), f'_-(c)]$ (confrontare con [6, p. 3]). Adesso siamo preparati a dimostrare Teorema 1.

Dimostrazione del teorema 1: Sia $p(t) = |u(t)|$ per ogni t per cui u è definito. Adesso $p(0) = |z|$, e se $t > 0$ e u è definito in t allora

$$p'_-(t) = m_-[u(t), u'(t)] = m_-[u(t), F(t, u(t))] < \omega(t, p(t)).$$

Perciò [8, Theorem 1.4.1, p. 15],

$$p(t) \leqslant r(t)$$

per ogni t per cui u e r sono definiti. La dimostrazione è completa.

Teorema 1 ha il corollario facile seguente.

Corollario : *Siano z, u e r come in Teorema 1. Allora u è definito per ogni t per cui r è definito.*

Molti risultati avendo a fare con pertubazioni e stabilità per equazioni della forma

$$u'(t) = F(t, u(t)) + G(t, u(t)) \,;\; u(0) = z, \tag{4}$$

in cui G è una funzione continua da $R^+ \times Y$ a Y, possono essere ottenuti richiendo una stabilità certa per (2) e facendo G „piccolo". (Si consulti, per esempio, F. Brauer [1], [2], [3], Brauer e A. Strauss [4], e questo autore [11]). Questa idea si adatta alla nostra situazione presente. Supponiamo che λ è una funzione continua da $R^+ \times R$ a R. Avremo bisogno delle condizione (C 2).

(C 2) : *Se (t, x) è in $R^+ \times Y$ e c è un numero positivo, allora*

$$|x - cG(t, x)| \geqslant |x| - c\lambda(t, |x|).$$

Una caratteristica delle disuguaglianze delle condizioni (C 1) e (C 2) è che esse possono essere aggiunte.

Teorema 2 : *Supponiamo che (C1) e (C2) sono valide. Allora se (t, x) è in $R^+ \times Y$ e c è un numero positivo, abbiamo*

$$|x - cF(t, x) - cG(t, x)| \geqslant |x| - c\omega(t, |x|) - c\lambda(t, |x|). \tag{5}$$

I Teoremi 1 e 2 indicano che le soluzioni di (4) sono limitate mediante le soluzioni estreme superiori di

$$r'(t) = \omega(t, r(t)) + \lambda(t, r(t)) \,;\; r(0) = |z|,$$

la quale può essere considerata come una pertubazione di (3).

Sia m_+ la funzione da $Y \times Y$ a R data per

$$m_+[x, y] = \lim_{\delta \to 0+} (1/\delta)(|x + \delta y| - |x|).$$

Si Noti [6, p. 3] che m_+ ha una proprietà riguardante la derivata destra che è analoga alla proprietà di m_- riguardante la derivata sinistra. Inoltre, se (x, y, z) è in $Y \times Y \times Y$ allora

$$m_-[x, y] \leqslant m_+[x, y]$$
$$m_+[x, y + z] \leqslant m_+[x, y] + m_+[x, z].$$

Dimostrazione del teorema 2: Sia (s, x) in $R^+ \times Y$. C'è un numero positivo η tale che

$$v'(t) = G(t, v(t)) \,;\; v(s) = x$$

ha una soluzione definita su $[s, s + \eta)$ e tale che la soluzione estrema superiore q di

$$q'(t) = \lambda(t, q(t)) \,;\; q(s) = |x|$$

esiste su $[s, s + \eta)$. Sappiamo mediante Teorema 1 che

$$|v(t)| \leqslant q(t)$$

per ogni t in $[s, s + \eta)$. Sia p dato su $[s, s + \eta)$ per $p(t) = |v(t)|$. Allora :

$$m_+[x, G(s, x)] = m_+[v(s), v'_+(s)] = p'_+(s) = \lim_{\delta \to 0+} (1/\delta)(p(s + \delta) - p(s)) \leqslant \lim_{\delta \to 0+} (1/\delta)(q(s + \delta) - q(s)) = \lim_{\delta \to 0+} (1/\delta) \int_s^{s+\delta} \lambda(t, q(t))\, dt =$$
$$= \lambda(s, q(s)) = \lambda(s, |x|).$$

Similmente

$$m_+[x, F(s, x)] \leqslant \omega(s, |x|)$$

per ogni (s, x) in $R^+ \times Y$, cosìche

$$m_-[x, F(t, x) + G(t, x)] \leqslant m_+[x, F(t, x) + G(t, x)] \leqslant m_+[x, F(t, x)] + m_+[x, G(t, x)] \leqslant \omega(t, |x|) + \lambda(t, |x|)$$

per ogni (t, x) in $R^+ \times Y$. La disuguaglianza (5) è immediata, e la dimostrazione è completa.

BIBLIOGRAFIA

1. Brauer F. — *Perturbations of nonlinear systems of differential equations.* I, J. Math. Anal. Appl., 14 (1966), 198—206.
2. *Perturbations of nonlinear systems of differential equations.* II, J. Math. Anal. Appl., 17 (1967), 418—434.
3. *Perturbations of nonlinear systems of differential equations.* IV, J. Math. Anal. Appl., 37 (1972), 214—222.
4. Brauer F. e Strauss A. — *Perturbations of nonlinear systems of differential equations. III*, J. Math. Anal. Appl., 31 (1970), 37—48.
5. Conti. R. — *Limitazioni „in ampiezza" delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali e applicazioni.* Boll. Un. Mat. Ital. (3), 11 (1956), 344—349.
6. Coppel, W. A. — *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, D. C. Heath & Co., Boston, 1965.
7. Corduneanu C. — *Principles of differential and integral equations*, Allyn and Bacon, Boston, 1971.
8. Lakshmikantham V. e Leela, S. — *Differential and integral inequalities.* vol. 1, Academic Press, New York, 1969.
9. Lakshmikantham V. e Onuchic, N. — *On the comparison of solutions of two differential systems*, Bol. Soc. Mat. São Paulo, 15 (1963), 27—34.
10. Lovelady D. L. — *A functional differential equation in a Banach space*, Funkcialaj Ekvacioj, 14 (1971), 111—122.
11. *Nonlinear differential equations with logarithmically small perturbations*, Boll. Un. Math. Ital., 4, 6 (1972), 11—19.
12. Lovelady D. L. e Martin, R. H. Jr. — *A global existence theorem for a nonautonomous differential equation in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc., 35 (1972), 445—449.
13. Lozinskii, S. M. — *Sulla valutazione dell'errore per l'integrazione numerica di equazioni differenziali ordinarie. I*, Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Mat. (5), 6 (1958), 52—90 (russo).
14. Wazewski, T. — *Sur la limitation des integrales des systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires*, Studia Math., 10 (1948), 48—59.
15. Wintner, A. — *Asymptotic integration constants*, Amer. J. Math., 68 (1946), 553—559.

Department of Mathematics
The Florida State University
Tallahassee, Florida 32306
U. S. A.

O EXTENSIE A METODEI DE COMPARARE PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE ORDINARE

Rezumat

Metoda comparării pentru ecuații diferențiale ordinare este extinsă într-un mod care permite ca membrul drept al ecuației de comparație să aibă valori negative și care nu pretinde derivabilitate în ecuația originală.

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" — Iaşi
Secţia I a. Matematică, tom 1974

LA MÉTHODE DES SECTEURS APPLIQUÉE À L'ÉQUATION SCALAIRE DU n^e ORDRE

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x)$$

PAR

M. LALOY

1. Introduction. Dans des articles récents [2, 3, 4], on a développé une méthode permettant d'assouplir l'étude des problèmes d'instabilité, relatifs aux équations différentielles ordinaires. Cette méthode est caractérisée par une démarche en deux étapes :

— première étape : recherche d'un secteur ou d'un secteur strict (théorèmes de type I) ;

— deuxième étape : recherche d'une propriété d'expulsion adéquate (théorèmes de type II).

A. Au point de vue théorique, cette analyse en deux étapes, tout en permettant de reconstruire la plupart des théorèmes d'instabilité „connus", a permis d'obtenir des conditions suffisantes d'instabilité moins restrictives que les conditions correspondantes de ces théorèmes „classiques".

En particulier :

A 1 — On a mis l'accent sur l'utilisation de secteurs sortants ;

A 2 — On accepte de considérer des secteurs qui ne sont pas des ouverts.

B. Au point de vue pratique, cette méthode en deux étapes se révèle très souple pour les applications : en effet, plutôt que d'utiliser „brutalement" un théorème „classique" d'instabilité, il est souvent plus aisé de recourir séparément d'une part à un théorème de type I, et d'autre part, à un théorème de type II.

En fait, quand on est confronté au problème de l'instabilité de la solution nulle d'une équation différentielle particulière, le schéma à suivre — schéma qui procède des résultats théoriques établis dans 4 — est le suivant :