BIBLIOGRAFIA

1. Brauer F. — *Perturbations of nonlinear systems of differential equations.* I, J. Math. Anal. Appl., 14 (1966), 198—206.
2. *Perturbations of nonlinear systems of differential equations.* II, J. Math. Anal. Appl., 17 (1967), 418—434.
3. *Perturbations of nonlinear systems of differential equations.* IV, J. Math. Anal. Appl., 37 (1972), 214—222.
4. Brauer F. e Strauss A. — *Perturbations of nonlinear systems of differential equations. III*, J. Math. Anal. Appl., 31 (1970), 37—48.
5. Conti, R. — *Limitazioni „in ampiezza" delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali e applicazioni*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), 11 (1956), 344—349.
6. Coppel, W. A. — *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, D. C. Heath & Co., Boston, 1965.
7. Corduneanu C. — *Principles of differential and integral equations*, Allyn and Bacon, Boston, 1971.
8. Lakshmikantham V. e Leela, S. — *Differential and integral inequalities*, vol. 1, Academic Press, New York, 1969.
9. Lakshmikantham V. e Onuchic, N. — *On the comparison of solutions of two differential systems*, Bol. Soc. Mat. São Paulo, 15 (1963), 27—34.
10. Lovelady D. L. — *A functional differential equation in a Banach space*, Funkcialaj Ekvacioj, 14 (1971), 111—122.
11. *Nonlinear differential equations with logarithmically small perturbations*, Boll. Un. Math. Ital., 4, 6 (1972), 11—19.
12. Lovelady D. L. e Martin, R. H. Jr. — *A global existence theorem for a nonautonomous differential equation in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc., 35 (1972), 445—449.
13. Lozinskii, S. M. — *Sulla valutazione dell'errore per l'integrazione numerica di equazioni differenziali ordinarie. I*, Izv. Vyss. Uczebn. Zaved. Mat. (5), 6 (1958), 52—90 (russo).
14. Wazewski, T. — *Sur la limitation des integrales des systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires*, Studia Math., 10 (1948), 48—59.
15. Wintner, A. — *Asymptotic integration constants*, Amer. J. Math., 68 (1946), 553—559.

Department of Mathematics
The Florida State University
Tallahassee, Florida 32306
U. S. A.

O EXTENSIE A METODEI DE COMPARARE PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE ORDINARE

Rezumat

Metoda comparării pentru ecuații diferențiale ordinare este extinsă într-un mod care permite ca membrul drept al ecuației de comparație să aibă valori negative și care nu pretinde derivabilitate în ecuația originală.

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" — Iași
Secția I a. Matematică, tom 1974

LA MÉTHODE DES SECTEURS APPLIQUÉE À L'ÉQUATION SCALAIRE DU n^e ORDRE

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x)$$

PAR

M. LALOY

I. Introduction. Dans des articles récents [2, 3, 4], on a développé une méthode permettant d'assouplir l'étude des problèmes d'instabilité, relatifs aux équations différentielles ordinaires. Cette méthode est caractérisée par une démarche en deux étapes :

— première étape : recherche d'un secteur ou d'un secteur strict (théorèmes de type I) ;

— deuxième étape : recherche d'une propriété d'expulsion adéquate (théorèmes de type II).

A. Au point de vue théorique, cette analyse en deux étapes, tout en permettant de reconstruire la plupart des théorèmes d'instabilité „connus", a permis d'obtenir des conditions suffisantes d'instabilité moins restrictives que les conditions correspondantes de ces théorèmes „classiques".

En particulier :

A 1 — On a mis l'accent sur l'utilisation de secteurs sortants ;

A 2 — On accepte de considérer des secteurs qui ne sont pas des ouverts.

B. Au point de vue pratique, cette méthode en deux étapes se révèle très souple pour les applications : en effet, plutôt que d'utiliser „brutalement" un théorème „classique" d'instabilité, il est souvent plus aisé de recourir séparément d'une part à un théorème de type I, et d'autre part, à un théorème de type II.

En fait, quand on est confronté au problème de l'instabilité de la solution nulle d'une équation différentielle particulière, le schéma à suivre — schéma qui procède des résultats théoriques établis dans 4 — est le suivant :

B 1 — Ou bien un candidat-secteur est suggéré par la forme de l'équation ; alors :

B 1.1 : au moyen des théorèmes de type I, on examine si ce candidat est, de fait, un secteur ou un secteur strict;

si la réponse est affirmative :

B 1.2. : il faut examiner si ce secteur strict possède une propriété d'expulsion adéquate ;

si, cette fois encore, la réponse est affirmative, il y a instabilité ;

B 2 — Si la forme de l'équation ne suggère aucun candidat-secteur, ou si aucun candidat-secteur ne satisfait aux deux tests B 1.1 et B 1.2, on est réduit à essayer un secteur trivial.

C. L'expérience révèle que le test B 1.2 est le plus ardu. En effet, chaque théorème d'expulsion fait appel à une fonction auxiliaire qui doit croître suffisamment vite le long des solutions ; il est parfois très difficile de trouver une fonction auxiliaire dont la dérivée première (et/ou la dérivée seconde) possède les propriétés adéquates. Aussi, a-t-on établi dans [4] des théorèmes de non-expulsion, qui permettent d'écarter, à priori, certains candidats-secteurs, à première vue très prometteurs, mais ne possédant certainement pas une „bonne" propriété d'expulsion.

Dans le présent article, la méthode rappelée ci-dessus sera appliquée à la classe d'équations scalaires :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x), \tag{1.1}$$

où $x \in]\alpha, \beta[$ $(\alpha < 0 < \beta)$, $t \in I =]\tau, \infty[$, les hypothèses sur la fonction f étant :

(i) $(\forall t \in I)$, $f(t, 0) = 0$;

(ii) f est continue et suffisamment régulière pour qu'il y ait unicité des solutions.

On obtiendra, comme corollaire, le résultat suivant : si la fonction f satisfait aux hypothèses (i) et (ii), et si, de plus,

(iii) f ne dépend pas de t ;

(iv) l'origine est, pour f, un zéro isolé ;

alors, pour $n \geqslant 3$, la solution nulle de (1.1) est toujours instable.

2. Rappels de certains concepts. 2.1. Dans des articles précédents ([2], [3], [4]), on a défini les concepts de secteur entrant, secteur sortant, relativement à une equation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2.1}$$

f étant fonction continue : $I \times \Omega \to R^n$, avec $(\forall t \in I)$, $f(t, 0) = 0$; I est l'intervalle ouvert $]\tau, \infty[$, Ω est un ouvert connexe de R^n — contenant l'origine. On a défini également les notions de surface totale et surface latérale pour un ensemble, ainsi que des propriétés d'expulsion pour un ensemble. On supposera toutes ces notions connues.

2.2. De ces divers concepts, on avait déduit de manière immédiate des conditions suffisantes pour que la solution nulle de (2.1) soit instable à la Liapunov, c. à. d. pour que $(\exists t_0 \in I)(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_0 \in B(0, \delta))$ $(\exists t \geqslant t_0, t \in J)$, $x(t, t_0, x_0) \notin B(0, \varepsilon)$. Dans cette définition, $B(0, \delta) = \{x \mid \|x\| < \delta\}$, $\|\,.\,\|$ étant une norme quelconque de R^n, et $x(t, t_0, x_0)$ est une solution de (2.1) ayant pour conditions initiales (t_0, x_0). Dans la suite, on utilisera aussi la notation $C(0, \delta) = I \times B(0, \delta)$.

$$\sigma\{\sup \delta / B(\overline{0,\delta}) \subset \Omega\}, \text{ et } G^* = \{(t, x) \mid (t, x) \in G\ x \neq 0\}$$

Dans [2] et [3], on avait formulé les propositions suivantes :

2.2.1. Proposition. *Une condition suffisante d'instabilité pour la solution nulle de l'équation (2.1) est qu'il existe un (t_0, ε) — secteur possédant la propriété d'expulsion (t_0, ε) — totale stricte.*

2.2.2. Proposition. *Une condition suffisante d'instabilité pour la solution nulle de l'équation (2.1) est qu'il existe un (t_0, ε) — secteur strict possédant la propriété d'expulsion (t_0, ε) — totale.*

2.2.3. Proposition. *Une condition suffisante d'instabilité pour la solution nulle de l'équation (2.1) est qu'il existe un (t_0, ε) — secteur absolu possédant la propriété d'expulsion (t_0, ε) — partielle stricte.*

2.2.4. Proposition. *Une condition suffisante d'instabilité pour la solution nulle de l'équation (2.1) est qu'il existe un (t_0, ε) — secteur strict absolu possédant la propriété d'expulsion (t_0, ε) — partielle.*

2.3. On supposera connue la notion de fonction définie positive (négative). *Rappelons la notion de fonction définie non nulle* (Matrosov). Soit $F \subset R \times R^n$, et $G_0 \subset R^n$. Une fonction continue :

$$V : F \to R : (t, x) \to V(t, x)$$

est dite *définie non nulle* sur G_0 si, à tout couple (α, β), avec $0 < \alpha < \beta$ correspond une couple (γ, δ), avec $\gamma > 0$ et $\delta > 0$, tels que :
$(\forall (t, x) \in F), (\alpha \leqslant \|x\| \leqslant \beta$ et $d(x, G_0) < \gamma) \Rightarrow |V(t, x)| > \delta$. (on a désigné par $d(x, G_0)$ la distance du point x à l'ensemble G_0).
Dans le cas d'une fonction V qui ne dépend pas du temps t, et définie sur $F_0 \subset R^n$, on dispose du critère suivant (voir [8]) : *soit G_0 tel que $\overline{G}_0 \subset F_0 \subset R^n$; toute fonction*

$$V : F_0 \to R : x \to V(x)$$

continue et telle que $(\forall x \in \overline{G}_0^*)$, $|V(x)| > 0$, est définie non nulle sur G_0.

3. Rappels de certains résultats : exemples de secteurs. Les résultats rappelés ci-dessous ont été démontrés dans [3].

3.1. Proposition. *Tout ensemble positivement invariant, et pour lequel le point $(t_0, 0)$ est un point d'accumulation, est $(\forall \varepsilon > 0)$, un (t_0, ε) — secteur absolu.*

3.2. Soit un n-uple de nombres réels $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, chaque nombre c_i étant égal soit à $+1$, soit à -1. On considère l'ensemble.

$$G = \{(t, x) \mid t \in R, \operatorname{sign} x_i = c_i \ (1 \leqslant i \leqslant n)\};$$

fixons arbitrairement $t_0 \in 1$, et $\varepsilon > 0$; pour tout point (t, x) de la surface latérale $L(t_0, \varepsilon)$, une, au moins, des coordonnées x_j est nulle; de plus, si x_i est une coordonnée quelconque de ce point (t, x), on a soit $x_i = 0$, soit $\operatorname{sgn} x_i = c_i$.

On dispose alors des résultats suivants:

3.2.1. Proposition. *Si* $(\exists\, \varepsilon > 0)$ $(\exists t_0 \in \mathrm{I})$ $(\forall t \geqslant t_0)$ $(\forall j, 1 \leqslant j \leqslant n)$ $(\forall (t, x) \in L(t_0, \varepsilon))$, $c_j f_j(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n) > 0$, *alors* G *est un* (t_0, ε) *— secteur strict absolu strictement entrant.*

3.2.2. Proposition. *Si* $(\exists \varepsilon > 0)$ $(\exists t_0 \in \mathrm{I})$ $(\forall t \geqslant t_0)$ $(\forall j, 1 \leqslant j \leqslant n)$ $(\forall (t, x) \in L(t_0, \varepsilon))$, $c_j f_j(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n) < 0$, *alors* G *est un* (t_0, ε) *— secteur strict strictement sortant.*

3.2.3. Proposition. *Si* $(\exists \varepsilon > 0)$ $(\exists t_0 \in \mathrm{I})$ $(\forall t \geqslant t_0)$ $(\forall j, 1 \leqslant j \leqslant n)$ $(\forall (t, x) \in L(t_0, \varepsilon))$, $c_j f_j(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0$, *alors* G *est un* (t_0, ε) *— secteur strict absolu entrant.*

3.2.4. Proposition. *Si* $(\exists \varepsilon > 0)$ $(\exists t_0 \in \mathrm{I})$ $(\forall t \geqslant t_0)$ $(\forall j, 1 \leqslant j \leqslant n)$ $(\forall (t, x) \in L(t_0, \varepsilon))$, $c_j f_j(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n) \leqslant 0$, *alors* G *est un* (t_0, ε) *— secteur sortant.*

4. Rappels de certains résultats: théorèmes d'expulsion et de non-expulsion. Ces théorèmes seront énoncés pour des fonctions auxiliaires de classe C^1 ou C^2, car, dans les paragraphes 5 et 6, on ne fera usage que de fonctions auxiliaires de ce type. Ces théorèmes sont cependant valables pour des fonctions auxiliaires plus générales, moyennant le recours aux dérivées de Dini (cfr. [3] et [4]).

La dérivée de la fonction $V(t, x)$ le long des solutions de l'équation (2.1) sera notée $\dot V(t, x)$; on sait que, si $V(t, x)$ est de classe C^1, on a: $\dot V(t, x) = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(t, x), f(t, x) \right\rangle + \frac{\partial V}{\partial t}(t, x)$, où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire habituel.

4.1. Théorème. *Soit* $F_0 \subset R^n$, *avec* $\overline{F}_0 \subset \Omega$. *S'il existe une application de classe* $C^1 : V : \overline{F}_0 \to R : x \to V(x)$ *telle que:*

(i) 0 *est un point d'accumulation de l'ensemble* $\{x \mid V(x) > 0\}$, *et* $V(0) = 0$;

(ii) $(\forall x \in F_0)$, $V(x) > 0 \Rightarrow \dot V(x) \geqslant 0$;

(iii) *l'ensemble* $\{x \mid \dot V(x) = 0\}$ *ne contient aucun sous-ensemble compact invariant non vide distinct de l'origine;*

alors, $(\forall \varepsilon \in]0, \tau[)$, F_0 *possède la propriété d'expulsion* ε*-partielle stricte.*

4.2. Théorème. *Soit* $F \subset R \times R^n$, *avec* $\overline{F} \subset \mathrm{I} \times \Omega$. *S'il existe* $t_0 \in \mathrm{I}$, *une application de classe* $C^2 : V : \mathring{F}^* \to R : (t, x) \to V(t, x)$

et une application de classe C^2 *à valeurs positives:*

$$a : [t_0, \infty[\to R : t \to a(t),$$

telles que:

(i) $(t_0, 0)$ *est un point d'accumulation de l'ensemble*

$$\{(t_0, x) \mid \dot V(t_0, x) > \dot a(t_0) \text{ et } V(t_0, x) > 0\};$$

(ii) $(\forall (t, x) \in \mathring{F}^*)$, $(V(t, x) > 0$ *et* $\dot V(t, x) > \dot a(t)) \Rightarrow$:

$$V(t, x) \leqslant a(t);$$

$$\dot V(t, x) \geqslant \dot a(t);$$

alors, $(\forall \varepsilon \in]0, \sigma[)$, F *possède la propriété d'expulsion* (t_0, ε) *— partielle.*

4.3. Théorème. *Soit* $F \subset I \times F_0$, *avec* $\overline{F}_0 \subset \Omega$. *Supposons que* $(\exists A > 0)$ $(\forall (t, x) \in \overline{F})$, $\| f(t, x) \| < A$. *S'il existe* $t_0 \in I$ *et deux applications de classe* C^1:

$$V_1 : \overline{F}^* \to R : (t, x) \to V_1(t, x);$$

$$V_2 : \overline{F}^* \to R : (t, x) \to V_2(t, x);$$

ainsi qu'une application continue:

$$V_3 : \overline{F}_0^* \to R : x \to V_3(x),$$

telles que: (i) $(t_0, 0)$ *est un point d'accumulation de l'ensemble*

$$\{(t_0, x) \mid V_1(t_0, x) > 0\};$$

(ii) $V_1(t, x)$ *tend vers* 0, *uniformément par rapport à* t, *quand* x *tend vers* 0;

(iii) $(\forall (t, x) \in \overline{F}^*)$, $V_1(t, x) > 0 \Rightarrow \dot V_1(t, x) \geqslant V_3(x) \geqslant 0$;

(iv) $V_2(t, x)$ *est bornée;*

(v) $\dot V_2(t, x)$ *est définie non nulle sur l'ensemble (appelé „ensemble dangereux") $E_0 = \{x \mid V_3(x) = 0\}$;*

alors, $(\forall \varepsilon \in]0, \sigma[)$, F *possède la propriété d'expulsion* (t_0, ε) *— partielle stricte.*

4.4. Théorème. *Soient* $t_0 \in I$, $\varepsilon \in]0, \sigma[$, *un ensemble* $G_0 \subset \Omega$, *et un ensemble* $G \subset I \times G_0$. *Supposons que cet ensemble* G *possède les propriétés suivantes:* (i) $(t_0, 0)$ *est un point d'accumulation de* $G(t_0)$;

(ii) *aucun point de la surface totale* $M(t_0)$ *n'est un point d'entrée stricte;*

(iii) $(\forall t \geqslant t_0)$, $G(t)$ *est connexe;*

$$(t, 0) \in \overline{G(t)};$$

$$G(t) \cap \operatorname{fr} C(0, \varepsilon) \neq \emptyset;$$

$$G(t) \subset \mathring{G};$$

supposons, de plus, qu'il existe une application de classe C^1 :

$$V_1 : \overline{G}^* \to R : (t, x) \to V_1(t, x),$$

et une application continue :

$$V_2 : \overline{G}_0^* \to R : x \to V_2(x),$$

telles que :

(i) $V_1(t_0, x)$ *tend vers* 0 *quand* x *tend vers* 0 ;
(ii) $V_2(x) > 0$;
(iii) $V_1(t, x) \geqslant V_2(x)$;
(iv) $\dot{V}_1(t, x) \leqslant 0$;

alors, G ne possède pas la propriété d'expulsion (t_0, ε) — *totale stricte.*

5. Un cas particulier. 5.1. Avant d'envisager le cas général de l'équation $\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x)$, on considérera d'abord un cas particulier simple ; on verra ainsi comment on applique un théorème d'expulsion adéquat à un secteur ; on verra aussi comment s'introduisent tout naturellement des secteurs qui ne sont pas des ouverts, si l'on utilise des secteurs définis par des intégrales premières.

5.2. Soient deux réels α et β, avec $\alpha < 0 < \beta$, et une application continue :

$$f :]\alpha, \beta[\to R : y \to f(y),$$

telle que : $f(0) = 0$;

$$yf(y) < 0, \text{ pour } y \neq 0.$$

On considère l'équation différentielle scalaire :

$$\frac{d^6 y}{dt^6} = f(y),$$

et le système vectoriel associé :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 ; \\ \dot{x}_2 &= x_3 ; \\ &\vdots \\ \dot{x}_6 &= f(x_1) ; \end{aligned}$$

on suppose que la fonction f est suffisamment régulière pour qu'il y ait unicité des solutions ; on va montrer que *la solution identiquement nulle est instable.*

On dispose d'une intégrale première :

$$u(x) = x_2 x_6 - x_3 x_5 + \frac{1}{2} x_4^2 - \int_0^{x_1} f(y) dy ;$$

on a : $u(0) = 0$; soient $G_0 = \{ x \mid u(x) = 0 \}$, et $\varepsilon < \min(|\alpha|, \beta)$. En vertu de la proposition **3.1**, G_0 est un secteur absolu ; il en est de même de $F_0 = G_0 \cap B(0, \varepsilon)$; si l'on montre que F_0 possède la propriété d'expulsion partielle stricte, alors, en vertu de la proposition **2.2.3**, on aura prouvé l'instabilité.

Vérifions donc que, pour l'ensemble F_0 et la fonction :

$$V(x) = -\frac{1}{2} x_2 x_5 + x_3 x_4,$$

les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites.

a) Considérons d'abord l'ensemble P des points $x = (x_1, \ldots, x_6)$, dont les coordonnées satisfont aux relations : $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 \neq 0$, $x_2 = -x_5$, et $x_3 = -x_6$; on a : $P \subset G_0$; de plus, $(\forall x \in P)$, $V(x) > 0$; enfin, 0 est un point d'accumulation de P, et $V(0) = 0$. Donc, l'hypothèse (i) du théorème 4.1 est satisfaite.

b) Ensuite, on calcule :

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2} x_2 x_6 + \frac{1}{2} x_3 x_5 + x_4^2 ;$$

$$\text{on a : } (\forall x \in G_0), \ \dot{V}(x) = \frac{5}{4} x_4^2 - \frac{1}{2} \int_0^{x_1} f(y) dy ;$$

donc, $(\forall x \in G_0)$, $\dot{V}(x) \geqslant 0$. L'hypothèse (ii) est donc vérifiée.

c) De plus, si $x \in G_0$ et $\dot{V}(x) = 0$, on a $x_1 = 0$: il est clair, au vu de la forme du système différentiel, que la seule solution demeurant toute entière dans l'hyperplan $x_1 = 0$ est la solution nulle ; l'hypothèse (iii) est donc vérifiée. C. Q. F. D.

6. Le cas général de l'équation différentielle scallaire du n^e ordre

6.1. Soient deux réels α et β, avec $\alpha < 0 < \beta$. On considère une application continue :

$$f :]\alpha, \beta[\to R : y \to f(y),$$

telle que $f(0) = 0$, et l'équation différentielle scalaire :

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f(y). \tag{6.1}$$

On suppose que f est assez régulière pour qu'il y ait unicité des solutions.

On se propose d'établir le résultat suivant :
Si l'origine est, pour la fonction f, un zéro isolé — c'est-à-dire qu'il existe un voisinage N de 0, tel que, $(\forall y \in N^* \cap]\alpha, \beta[)$, $f(y) \neq 0$ — alors, la solution nulle de l'équation différentielle scalaire du n^e ordre (6.1) est stable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites simultanément :

(i) $n = 1$ ou $n = 2$;

(ii) $(\forall y \in N^*)$, $yf(y) < 0$.

Cette proposition est une conséquence de plusieurs résultats partiels, concernant une équation un peu plus générale que (6.1), considérée en 6.2.

6.2. Soient deux réels α et β, avec $0 < \alpha < \beta$, un intervalle $I =]\tau, \infty[$, et une application continue:

$$f : I \times]\alpha, \beta[\to R : (t, y) \to f(t, y) ;$$

on considère l'équation non autonome :

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f(t, y) ; \tag{6.2}$$

on suppose que, $(\forall t \in I)$, $f(t, 0) = 0$. On associe à l'équation (6.2) le système canonique équivalent :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 ; \\ \dot{x}_2 &= x_3 ; \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(t, x_1) ; \end{aligned} \tag{6.3}$$

on suppose que f est assez régulière pour qu'il y ait unicité de solutions.

On établit ci-dessous, relativement au système (6.3), plusieurs résultats de stabilité et d'instabilité [1].

1.a) *Si $n > 1$ et qu'il existe $(t_0 \in I)$ et $(\varepsilon \in]0, \beta[)$, tels que $(\forall t \geqslant t_0)(\forall y \in]0, \varepsilon[)$, $f(t, y) \geqslant 0$, alors la solution nulle de (6.3) est instable.*

Tout d'abord, on constate que, en vertu du résultat **3.2.3**, l'ensemble [2]

[1] Le problème étudié en 6.2 a été abordé de manière différente, et uniquement dans le cas où n est impair et f ne dépend pas de t, par A. Huaux [1].

[2] L'utilisation, comme secteurs, d'ensembles limités par des hyperplans de coordonnées, se révèle souvent féconde. S. K. Persidskii [6], [7] a obtenu ainsi des résultats d'instabilité pour la classe d'équations :

$$\dot{x} = P(t)\, \Phi\, (t, x),$$

— où Φ est une fonction vectorielle à n composantes, et P une matrice d'ordre n — , en utilisant, comme fonctions auxiliaires, des formes linéaires en $(x_1 \dots x_n)$.

$$G_1 = \{ (t, x) \mid t \in R, 0 < x_i \leqslant \varepsilon\, (1 \leqslant i \leqslant n) \}$$

est un (t_0, ε) — secteur strict absolu entrant.

De plus, en vertu du théorème 4.2, ce secteur possède la propriété d'expulsion (t_0, ε)—partielle. Il suffit de considérer la fonction

$$V = x_{n-1} ;$$

on a alors :

$$\dot{V} = x_n ;$$

et

$$\ddot{V} = f(t, x_1) ;$$

les hypothèses du théorème 4.2 sont bien satisfaites, en prenant pour $a(t)$ une constante bien choisie.

La thèse résulte alors de la proposition 2.2.4.

1.b) *Si $n = 1$, et s'il existe $(t_0 \in I)$ et $(\varepsilon \in]0, \beta[)$ tels que $f(t, y)$ est définie positive sur $[t_0, \infty[\times]0, \varepsilon[$, alors, l'origine est instable.*

Pour le montrer, on utilise le même ensemble G_1 et la fonction auxiliaire $V = x_1$; les hypothèses du théorème 6.3 de [3] sont alors satisfaites.

1.c) *Remarque.* Si $n = 1$, il est facile de trouver des exemples ou $f(t, y)$ est strictement positive pour $y > 0$, sans être définie positive, et pour lesquels, il y a stabilité. Ainsi, si l'on prend $f(t, y) = ye^{-t}$, on a :

$$| y(t, t_0, y_0) | \leqslant | y_0 | \exp (e^{-t_0}),$$

ce qui prouve la stabilité.

2.a) *Si $n > 1$, et qu'il existe $(t_0 \in I)$ et $(\varepsilon \in]0, |\alpha|[)$, tels que $(\forall t \geqslant t_0)(\forall y \in]-\varepsilon, 0[)$, $f(t, y) \leqslant 0$, alors la solution nulle de (6.3) est instable.*

On raisonne comme en 1.a), en considérant l'ensemble

$$G_2 = \{(t, x) \mid t \in R, -\varepsilon \leqslant x_i < 0\, (1 \leqslant i \leqslant n) \}.$$

2.b) *Si $n = 1$, et qu'il existe $(t_0 \in I)$ et $(\varepsilon \in]0, |\alpha|[)$, tels que $-f(t, y)$ est définie positive sur $[t_0, \infty[\times]-\varepsilon, 0]$, alors, l'origine est instable.*

3.a) *Si n est impair et $\geqslant 3$* (soit $n = 2m + 1$, *avec $m \geqslant 1$*), *et qu'il existe $(t_0 \in I)$ et $(\varepsilon < \min(|\alpha|, \beta))$, tels que :*

$$(\forall t \geqslant t_0)(\forall y \in]-\varepsilon, +\varepsilon[, y \neq 0),$$

$$yf(t, y) < 0 ; \tag{6.4}$$

$|f(t, y)|$ est définie positive et dominée par une fonction continue $h(y)$ sur $[t_0, \infty[\times]-\varepsilon, +\varepsilon[$, alors, la solution nulle de (6.3) est instable.

Par hypothèse, il existe une fonction continue :

$$g :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to R : y \to g(y),$$

telle que :

(6.5) $\quad (\forall t \geqslant t_0)\,(\forall y \in]-\varepsilon, +\varepsilon[, y \neq 0), \quad -yf(t, y) \geqslant yg(y) > 0.$

En vertu du résultat 3.2.4, les ensembles

$$G_3 = \{(t, x) \mid t \in R, x_1 \in]0, \beta[, x_2 < 0, \dots x_n > 0\},$$

et

$$G_4 = \{(t, x) \mid t \in R, x_1 \in]\alpha, 0[, x_2 > 0, \dots x_n < 0\}$$

sont des (t_0, ε) — secteurs sortants.

Malheureusement, en général, ces deux ensembles ne possèdent pas de propriété d'expulsion adéquate. En effet, si l'inégalité (6.4) est valable $(\forall y \in]\alpha, \beta[, y \neq 0)$, la *surface totale* $M(t_0)$ de chacun de ces deux ensembles se compose de points de sortie, et le théorème 4.4 s'applique si l'on prend comme fonction auxiliaire :

$$V_1 = V_2 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i, \quad \text{pour } G_3,$$

et

$$V_1 = V_2 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} x_i, \quad \text{pour } G_4.$$

Considérons alors le secteur trivial $C(0, \varepsilon)$, et la fonction auxiliaire :

(6.6) $$V_1 = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i+1} x_{i+1} x_{n-i} + (-1)^{m+1} \frac{1}{2} x_{m+1}^2;$$

par calcul, on obtient pour la dérivée le long des solutions :

(6.7) $$\dot{V}_1 = -x_1 f(t, x_1).$$

En vertu de (6.5), il résulte de (6.7) que :

$$\dot{V}_1 \geqslant x_1 g(x_1);$$

donc, pour $x_1 \neq 0$, $\dot{V}_1 > 0$: les seuls points x de l'ensemble dangereux sont ceux pour lesquels la première coordonnée est nulle.

$$\text{Soit } V_2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1};$$

on a :

$$\dot{V}_2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}^2 + \sum_{i=2}^{n-2} x_i x_{i+2} + x_1 x_3 + x_{n-1} f(t, x_1).$$

on a

$$\dot{V}_2 \geqslant \tilde{V}_2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}^2 + \sum_{i=2}^{n-2} x_i x_{i+2} + x_1 x_3 - |x_{n-1}|\, h(x_1).$$

Pour $x_1 = 0$, on a :

$$\tilde{V}_2 = \sum_{i=2}^{n} x_i^2 + \sum_{i=2}^{n-2} x_i x_{i+2},$$

c'est-à-dire :

$$\tilde{V}_2 = \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) + \sum_{j=2}^{n-2} \frac{1}{2}(x_j + x_{j+2})^2 + \frac{1}{2}(x_{n-1}^2 + x_n^2),$$

ce qui est une forme définie positive en $(x_2 \dots x_n)$; donc, $\tilde{V}_2$ est définie non nulle sur l'ensemble dangereux associé à $\dot{V}_1$ (voir 2.3), et $\dot{V}_2$ possède par conséquent la même propriété.

Les hypothèses du théorème 4.3 sont alors satisfaites, et $C(0, \varepsilon)$ possède la propriété d'expulsion partielle stricte, il y a donc instabilité.

3.b) *Si $n = 1$ et que les hypothèses sur f, formulées en* 3.a) *soient satisfaites, et si, de plus, f est indépendante du temps, la solution nulle de* (6.3) *est stable.*

En effet, la fonction auxiliaire :

$$V = \int_0^{x_1} (-f(y))\, dy$$

satisfait aux hypothèses du théorème de Liapunov sur la stabilité.

4. *Supposons que n soit pair $(n = 2m)$, et que les hypothèses sur f, formulées en* 3.a), *soient satisfaites. Alors :*

4.a) Si n est pair, la solution nulle de (6.3) est instable.

On vérifie facilement qu'aucun des ensembles $G_i (1 \leqslant i \leqslant 4)$ n'est un secteur entrant ou un secteur sortant.

Considérons alors le secteur trivial $C(0, \varepsilon)$, et la fonction auxiliaire :

$$V_1 = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i+1} x_{i+1} x_{n-i};$$

il est facile de montrer que l'on a :

$$\dot{V}_1 = -x_1 f(t, x_1) + (-1)^m x_{m+1}^2,$$

et, donc, *puisque m est pair* ;

$$\dot{V}_1 \geqslant x_1 g(x_1);$$

si l'on recourt à la même fonction V_2 qu'en 3.a), on constate que les hypothèses du théorème 4.3 sont satisfaites, et il y a instabilité.

4.b) *Si m est impair et $m > 1$ et si f ne dépend pas explicitement du temps, il y a instabilité.*

On vérifie qu'aucun des ensembles $G_i (1 \leqslant i \leqslant 4)$ n'est un secteur entrant ou un secteur sortant. On peut cependant, comme en 5.2, utiliser un secteur défini par une intégrale première.

La démonstration a été faite en détail, pour $m = 3$, en 5.2. Généralisons-la pour m impair quelconque plus grand que 1.

Tout d'abord, si n est pair et si f ne dépend pas de t, le système (6.3) admet l'intégrale première :

$$u(x) = \sum_{i=2}^{m} (-1)^i x_i x_{n-i+2} + (-1)^{m+1} \frac{1}{2} x_{m+1}^2 - \int_0^{x_1} f(y)dy.$$

On a : $u(0) = 0$.

Soit $G_0 = \{x \mid u(x) = 0\}$; vérifions que pour l'ensemble $F_0 = G_0 \cap \cap B(0, \varepsilon)$, et la fonction

$$V = \sum_{i=1}^{p} \left(-\frac{2i-1}{2} x_{2i} x_{n-2i+1} + i x_{2i+1} x_{n+2i} \right),$$

où $p = \dfrac{m-1}{2}$, les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites.

Considérons l'ensemble P des points $x \equiv (x_1, \ldots x_n)$ dont les coordonnées satisfont aux relations :

$$x_i = 0 \text{ pour } i \neq 2, 3, n-1, n ;$$

$$x_2 \neq 0, \; x_2 = -x_{n-1}, \; x_3 = -x_n ;$$

on a : $P \subset G_0$; de plus, $(\forall x \in P)$, $V(x) > 0$; enfin, 0 est un point d'accumulation de P. L'hypothèse (i) est donc satisfaite.

Ensuite, on obtient, par calcul :

$$(\forall x \in G_0), \; \dot{V}(x) = \left(\frac{2m-1}{4} \right) x_{m+1}^2 - \frac{1}{2} \int_0^{x_1} f(y)dy ;$$

donc, $(\forall x \in G_0)$, $\dot{V}(x) \geqslant 0$, et l'hypothèse (ii) est satisfaite.

Enfin, si $x \in G_0$ et $V(x) = 0$, on a $x_1 = 0$; la seule solution demeurant toute entière dans l'hyperplan $x_1 = 0$ est la solution nulle ; l'hypothèse (iii) est dès lors satisfaite.

4.c) *Si $m = 1$, et que f ne dépende pas explicitement du temps, il y a stabilité.*

En effet, la fonction $V(x) = \frac{1}{2} x_2^2 - \int_0^{x_1} f(y)\, dy$ satisfait à toutes les hypothèses du théorème classique de stabilité de Liapunov.

4.d) *Remarque.* Si m est pair, la démarche suivie en 4.b) n'est plus applicable : en effet, on calcule que $(\forall x \in G_0)$, on a :

$$\dot{V}(x) = -\left(\frac{2m-1}{4} \right) x_{m+1}^2 - \frac{1}{2} \int_0^{x_1} f(y)dy ;$$ $\dot{V}$ peut donc prendre des valeurs négatives.

Institut de Mathématique
Université Catholique de Louvain

BIBLIOGRAPHIE

1. Huaux A. — *Sur l'instabilité des solutions constantes, pour n impair, de l'équation différentielle* $(d^n x/dt^n) + \varphi(x) = 0$, C. R. A. S., Paris, Vol. 258, 1964, 5321—5323.
2. Laloy M. — *Aspects nouveaux dans l'étude des problèmes d'instabilité par la seconde méthode de Liapounov*, à paraître dans *Proceedings of the Sixth International Conference on Nonlinear Oscillations* (Poznan, 1972).
3. Laloy M. — *Une extension de la méthode des secteurs pour l'étude de l'instabilité à la Liapounov*, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, T. 87, I, 1973, 17—49.
4. Laloy M. — *Prolongements de la méthode des secteurs de Persidskii*, à paraître dans les Annales de la Société Scientifique de Bruxelles.
5. Persidskii K. P. — *On the theory of the stability of solutions of differential equations*, in Russian, in Uspekhi Matematicheskikh Nauk, Vol. 1, 1946 250—255.
6. Persidskii S. K. — *Investigation of stability of solutions of some nonlinear systems of differential equations*, J. A. M. M., Vol. 32, n° 6, 1968, 1141—1144.
7. Persidskii S. K. — *Investigating the stability of solutions of differential equations*, J. A. M. M., Vol. 34, n° 2, 1970, 209—215.
8. Rouche N. et Mawhin J. — *Equations différentielles ordinaires*, T. 2, 58—63, Masson, Paris, 1973.

METODA SECTOARELOR APLICATĂ LA ECUAȚIA SCALARĂ DE ORDINUL n

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x)$$

Rezumat

Cu ajutorul metodei introduse în articolele precedente [2], [3], [4], se demonstrează unele rezultate de stabilitate și instabilitate pentru ecuația scalară de ordinul al n-lea $d^n x/dt^n = f(t, x)$, pentru care se presupune că admite soluția identic nulă. În particular se demonstrează că dacă ecuația este autonomă și presupunînd ipoteze de regularitate foarte generale pentru funcția f, soluția nulă este întotdeauna nestabilă dacă $n \geqslant 3$.