7. P a v e l N. — *Équations non-linéaires d'évolution*, „Mathematica" Cluj (to appear).
8. P a v e l N. — *Sur certaines équations différentielles non-linéaires dans un espace de Banach*, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 275 (1972), 1883—1885.
9. P a v e l N. — *On an integral equation*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. (to appear).
10. W e b b G. F. — *Abstract scattering for nonlinear evolution equations* (to appear).

EXISTENŢĂ ŞI UNICITATE PENTRU UNELE ECUAŢII FUNCŢIONALE ÎN SPAŢII BANACH

Rezumat

Se dă o condiţie suficientă (mai slabă decît condiţia lui Lipschitz) pentru existenţa şi unicitatea soluţiei problemei (1.2) pe axa reală. Ţinînd seama de un rezultat recent al lui L o v e l a d y [2], dacă se cere ca soluţiile problemei (1.2) să fie exponenţial mărginite, atunci condiţia de mai sus este şi necesară. Ca aplicaţie se dă un rezultat de existenţă şi unicitate a soluţiei unei ecuaţii integrale de tip Hammerstein-Volterra.

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza"—Iaşi
Secţia I a. Matematică, tom XX, 1974

DÉPENDENCE DU DOMAIN D'INTÉGRATION DE LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION INTÉGRALE SUR UN ESPACE TOPOLOGIQUE MESURÉ

PAR

SENDER SOLOMON

En partant de certaines équations différentielles pour des fonctions d'ensemble de A. H a i m o v i c i (voir par exemple [1]) nous avons étudié, dans [2], l'existence et l'unicité de la solution, d'une équation intégrale de la forme

$$u(x) = u_0(x) + \int_{P_x} f(x, y, u(y))\, dy \tag{1}$$

sur un espace topologique mesuré.

Dans [3] nous avons établi la continuité de l'application $u_0 \to u$. Ici nous nous intéressons à la dépendence $P \to u$, c'est à dire, la dépendence de la solution du domain d'intégration.

Rappellons les éléments de l'équation (1) : u_0 donnée et u cherchée sont des fonctions continues définies sur un espace topologique X et qui prennent les valeurs dans un espace de Banach E ; sur X il y a une mesure positive μ telle que chaque compact est mesurable. Soit Γ la classe des parties relativement compactes et sommables ; P est une application $X \to \Gamma$ telle que $\lim_{y \to x} \mu(P_x \Delta P_y) = 0$ pour tout $x \in X$; f est une application continue $X \times X \times E \to E$ telle que $|f(x, y, z) - f(x, y, \bar{z})| \leqq L|z - \bar{z}|$ et $|f(x, y, 0)| \leqq a(y)$ où a est une fonction sommable $X \to [0, +\infty)$. Soit $C(X; E)$ l'espace localement convexe des fonctions continues $X \to E$ muni de la topologie de la convergence compacte et $B_\omega(X;E)$ l'espace de Banach des fonctions continues $u : X \to E$ telles que

$$| u |_{\omega} = \sup \frac{| u(x) |}{\omega(x)} < +\infty,$$

ω étant une application continue $X \to (0, +\infty)$.

Dans [2] nous avons trouvé un résultat qui avec les précisions données dans [3] peut être formulé de la manière suivante :

Théorème 1. *Admettons*

1. *qu'il existe un nombre $t > L$ tel que l'équation*

$$\omega(x) = 1 + t \int_{P_x} \omega(y)\, dy \tag{2}$$

ait une solution continue et positive $\omega : X \to R$ (fonction exponentielle généralisée de A. Haimovici) ;

2. *qu'il existe une application $Q : X \to \Gamma$ telle que $P \subset Q$ ($P_x \subset Q_x$ $\forall x \in X$) et $Q_y \subset Q_x$ $\forall y \in Q_x$, $\forall x \in X$.*

Alors, si $u_0 \in B_{\omega}(X ; E)$ ou, en particulier, si u_0 est bornée, l'équation (1) a exactement une solution dans $C(X; E)$; cette solution se trouve dans $B_{\omega}(X ; E)$ et est normale (cela veut dire qu'elle s'obtient par des approximations successives dans $C(X;E)$ à partir de u_0).

Les propositions suivantes sont démontrées dans [3] :

Théorème 2. *Dans les conditions du Th. 1 si, on suppose de plus que l'équation*

$$\tau(x) = 1 + t \int_{Q_x} \tau(y)\, dy \tag{3}$$

admet la solution normale, τ, l'application $u_0 \to u$ est une application $B_{\omega}(X ; E) \to C(X ; E)$ continue.

Lemme 1. *Supposons que les équations (3) et*

$$\gamma(x) = \alpha(x) + t \int_{P_x} \gamma(y) dy \quad (\gamma \text{ et } \alpha \text{ sont dans } C(X ; R)) \tag{4}$$

admettent la solution normale. Alors

$$\gamma(x) \leqq \bar{\alpha}(x)\tau(x), \ \forall x \in X,$$

où $\bar{\alpha}(x) = \max \{0, \alpha(x), \sup_{y \in Q_x} \alpha(y)\}$.

Lemme 2. *Si $u \in B_{\omega}(X ; E)$ alors la fonction h définie par $h(x) = \int_{P_x} | u(y) |\, dy$ est un élément de $B_{\omega}(X ; R)$.*

Après ces préliminaires voici notre nouveau résultat :

Théorème 3. *Soupposons que l'application P vérifie les conditions du*

Th. 2 et que R est une autre application $X \to \Gamma$ qui vérifie les conditions analogues, c'est à dire, $\lim_{y \to x} \mu(R_x \Delta R_y) = 0$, $R \subset Q$ et que l'équation

$$\rho(x) = 1 + t \int_{R_x} \rho(y)\, dy \tag{5}$$

ait une solution continue et positive ; de plus, $\lim_{y \to x} \mu(Q_x \, \Delta Q_y) = 0$, $\forall x \in X$. Si l'application R vérifie une des conditions suivantes :

(i) $R \subset P$; (ii) $R \supset P$; (iii) l'application $R \Delta P$ est localement compacte ; alors, pour tout $x \in X$ et pour tout nombre positive ε il existe un $\delta >$ tel que $\sup_{y \in Q_x} | v(y) - u(x) | < \varepsilon$ si $\mu(R \Delta P) \overset{\text{df}}{=} \sup_{y \in X} \mu(R_y \Delta P_y) < \delta$ et v est la solution de l'équation

$$v(x) = u_0(x) + \int_{R_x} f(x, y, v(y))\, dy. \tag{6}$$

Démonstration. Des équations (1) et (6) nous trouvons

$$| v(x) - u(x) | = \left| \int_{R_x} f(x, y, v(y))\, dy - \int_{P_x} f(x, y, u(y))\, dy \right| \leq \left| \int_{R_x} f(x, y, v(y))\, dy - \right.$$

$$\left. - \int_{R_x} f(x, y, u(y))\, dy \right| + \left| \int_{R_x} f(x, y, u(y))\, dy - \int_{P_x} f(x, y, u(y))\, dy \right| \leqq$$

$$\leqq L \int_{R_x} | v(y) - u(y) |\, dy + \left| \int_{R_x \cap P_x} f(x, y, u(y)) dy + \int_{R_x - P_x} f(x, y, u(y))\, dy - \right.$$

$$\left. - \int_{P_x \cap R_x} f(x, y, u(y))\, dy - \int_{P_x - R_x} f(x, y, u(y))\, dy \right| \leqq L \int_{R_x} | v(y) - u(y) |\, dy +$$

$$+ \int_{P_x \Delta R_x} | f(x, y, u(y)) |\, dy$$

d'où

$$| v(x) - u(x) | \leqq L \int_{Q_x} | v(y) - u(y) |\, dy + L \int_{P_x \Delta R_x} | u(y) |\, dy + \int_{P_x \Delta R_x} a(y) dy. \tag{7}$$

Nous montrerons que toutes les fonctions qui interviennent dans (7) sont des éléments de l'espace $B_{\tau}(X ; R)$. Du fait que $u \in B_{\omega}(X ; E)$

il résulte que $u \in B_\tau(X;E)$: $\omega \leqq \tau$ puisque les approximations successives repectives satisfont à la même inégalité. Pour la même raison $v \in B_\tau(X:E)$ donc $|v-u| \in B_\tau(X;R)$ d'où il résulte (voir le lemme 2), que la fonction $x \to \int_{Q_x} |v(y)-u(y)|\, dy$ est un élément de l'espace $B_\tau(X;R)$.

Soit $u_1(x) = \int_{P_x \dot{\Delta} R_x} a(y)dy$. u_1 est évidemment une fonction bornée ; montrons qu'elle est continue. Nous avons

$$|u_1(x)-u_1(x_0)| = \left| \int_{R_x \dot{\Delta} P_x} a(y)\,dy - \int_{R_{x_0} \dot{\Delta} P_{x_0}} a(y)\,dy \right| \leqq \int_{(R_x \Delta P_x) \dot{\Delta} (R_{x_0} \Delta P_{x_0})} a(y)\,dy\,;$$

mais, en utilisant l'inclusion

$$(8) \qquad (A-B)-(C-D) \subset (A-C) \cup (D-B),$$

nous trouvons que

$$(9) \quad (P_x \Delta R_x) - (P_{x_0} \Delta R_{x_0}) = [(P_x - R_x) - (P_{x_0} \Delta R_{x_0})] \cup [(R_x - P_x) - (P_{x_0} \Delta R_{x_0})] \subset [P_x - R_x) - (P_{x_0} - R_{x_0})] \cup [(R_x - P_x) - (R_{x_0} - P_{x_0})] \subset [(P_x - P_{x_0}) \cup (R_{x_0} - R_x)] \cup (R_x - R_{x_0}) \cup (P_{x_0} - P_x) \text{ donc}$$

$$(9) \qquad (P_x \Delta R_x) - (P_{x_0} \Delta R_{x_0}) \subset (P_x \Delta P_{x_0}) \cup (R_x \Delta R_{x_0})\,;$$

on trouve également :

$$(10) \qquad (P_{x_0} \Delta R_{x_0}) - (P_x \Delta R_x) \subset (P_x \Delta P_{x_0}) \cup (R_x \Delta R_{x_0})\,;$$

nous pouvons donc écrire

$$|u_1(x)-u_1(x_0)| \leqq 2 \int_{(P_x \dot{\Delta} P_{x_0}) \cup (R_x \Delta R_{x_0})} a(y)dy,$$

d'où il résulte aisément la continuité de la fonction u_1 grâce à la sommabilité de a.

Enfin soit $u_2(x) = \int_{P_x \dot{\Delta} R_x} |u(y)|\, dy$; nous avons $u_2(x) \leqq \int_{Q_x} |u(y)|\, dy \leqq$ $\leqq |u|_\tau \int_{Q_x} \tau(y)dy = |u|_\tau \dfrac{\tau(x)-1}{t}$ d'où $|u_2|_\tau \leqq \dfrac{1}{t} |u|_\tau$; il reste à montrer

la continuité de u_2. Si $R \subset P$ alors, compte tenu des relations (9) et (10), nous avons

$$|u_2(x)-u_2(x_0)| \leqq \int_{(P_x \Delta R_x) \dot{\Delta} (R_{x_0} \Delta P_{x_0})} |u(y)|\, dy = \int_{(P_x - R_x) \dot{\Delta} (P_{x_0} - R_{x_0})} |u(y)|\, dy =$$

$$= \int_{(P_x - R_x) - (P_{x_0} - R_{x_0})} |u(y)|\, dy + \int_{(P_{x_0} - R_{x_0}) - (P_x - R_x)} |u(y)|\, dy \leqq$$

$$\leqq \int_{(P_x - P_{x_0}) \dot{\cup} (R_{x_0} - R_x)} |u(y)|\, dy + \int_{(P_{x_0} - R_{x_0}) \cap [(P_{x_0} \dot{-} P_x) \cup (R_x - R_{x_0})]} |u(y)|\, dy$$

et

$$\int_{P_x \dot{-} P_{x_0}} |u(y)|\, dy \leqq |u|_\omega \int_{P_x \dot{-} P_{x_0}} \omega(y)dy = |u|_\omega \left| \int_{P_x} \omega(y)dy - \int_{P_{x_0}} \omega(y)\, dy + \right.$$

$$\left. + \int_{P_{x_0} \dot{-} P_x} \omega(y)\, dy \right| = |u|_\omega \left| \frac{\omega(x)-1}{t} - \frac{\omega(x_0)-1}{t} + \int_{P_{x_0} \dot{-} P_x} \omega(y)dy \right|$$

; la continuité de u_2 est évidente.

Si $P \subset R$ alors $B_\omega \subset B_\rho$ et nous écrirons

$$|u_2(x)-u_2(x_0)| \leqq 2 \int_{P_x \dot{\Delta} P_{x_0}} |u(y)|\, dy + 2 \int_{R_x \dot{\Delta} R_{x_0}} |u(y)|\, dy$$

où

$$\int_{R_x - R_{x_0}} |u(y)|\, dy \leqq |u|_\rho \left| \frac{\rho(x)-\rho(x_0)}{t} + \int_{R_{x_0} \dot{-} R_x} \rho(y)\, dy \right|.$$

Si $R \Delta P$ est localement compacte alors nous écrirons

$$|u_2(x)-u_2(x_0)| \leqq \int_{(P_x \Delta R_x) \dot{\Delta} (P_{x_0} \Delta R_{x_0})} |u(y)|\, dy \leqq \int_{(P_x \Delta R_x) \cap [(P_x \dot{\Delta} P_{x_0}) \cup (R_x \Delta R_{x_0})]} |u(y)|\, dy +$$

$$+ \int_{(P_{x_0} \Delta R_{x_0}) \cap [(P_x \dot{\Delta} P_{x_0}) \cup (R_x \Delta R_{x_0})]} |u(y)|\, dy$$

d'où il résulte, encore une fois, la continuité de u_2.

Il est évident maintenant qu'il éxiste une fonction $\beta \in B_\tau$, $\beta \geqslant 0$ telle que

$$| v(x) - u(x) | = t \int_{\dot{Q}_x} | v(y) - u(y) | \, dy + t \int_{R_x \dot{\Delta} P_x} | u(y) | \, dy +$$

$$+ t \int_{P_x \dot{\Delta} R_x} a(y) \, dy - \beta(x).$$

D'autre part

$$\int_{R_x \dot{\Delta} P_x} | u(y) | \, dy \leqq \sup_{y \in Q_x} | u(y) | \, \mu(R_x \Delta P_x) \leqq \sup_{y \in Q_x} | u(y) | \, \mu(R \Delta P)$$

et

$$\sup_{t \in Q_x} \int_{R_t \dot{\Delta} P_t} | u(y) | \, dy \leqq \sup_{y \in Q_x} | u(y) | \, \mu(R \Delta P).$$

D'après le lemme 1 nous avons

$$| v(x) - u(x) | \leqq \tau(x) \max \{ \mu(R \Delta P) \sup_{y \in Q_x} | u(y) |, \sup_{z \in X} \int_{P_z \dot{\Delta} R_z} a(y) dy \}$$

Le théorème est démontré.

Institutul de matematică
Filiala Iași a Academiei R. S. R.

BIBLIOGRAPHIE

1. Haimovici A. — *Sur une équation différentielle pour une fonction d'ensemble*, Rev. Roum. Math. pures et appl., IX, 3, 1964, p. 207–210.
2. Solomon S. — *Sur une généralisation de l'équation de Volterra*, An. șt. Univ. Iași Mat., XV, f. 1, 1969, p. 71–82.
3. Solomon S. — *Sur certaines équations intégrales non-linéaires dans un espace topologique mesuré*, An. șt. Univ. Iași, Mat. XVII, f. 1, 1971, p. 95–102.

DEPENDENȚA DE DOMENIUL DE INTEGRARE A SOLUȚIEI UNEI ECUAȚII INTEGRALE PE UN SPAȚIU TOPOLOGIC CU MĂSURĂ

Rezumat

Se demonstrează dependența continuă a soluției unei ecuații integrale—studiate în [2] și [3] — în raport cu domeniul de integrare.

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza"—Iași
Secția I a. Matematică, tom XX, 1974

ON THE STABILITY OF DIFFERENCE EQUATIONS IN BANACH SPACES

BY

F. S. DE BLASI (*) and J. SCHINAS (*)

1. Introduction. Difference equations occur in many branches of applied mathematics. In a number of practical problems one is required to predict, for a given equation, the asymptotic behavior of its solutions as well as their sensitivity under the effect of small perturbations.

In the present paper we shall be concerned with stability, in particular asymptotic stability properties, of the equilibrium point of a linear time dependent difference equation and we study when these properties are preserved under the effect of a small non-linear perturbation of the forcing term. Similar results on this problem have been obtained by R. Bellman [1] and, more recently, by S. Sugiyama [8].

It is well known that methods in difference equations are, generally speaking, parallel to the corresponding ones, which are valid in the continuous case of differential equations. The discrete analogue of the so-called direct method of Liapunov has been studied by many authors [3], [4], [5], [8]. Here, however, we shall use a technique based on the discrete analogue of the variation of constants formula and Gronwall's inequality; such a technique, which has been widely applied in differential equations (see [2] Ch. III and [7] Ch. IX), was used by R. Bellman also for certain classes of difference equations in E^n with time independent linear part.

The contents of the article are the following. In section 2, notation and definitions are introduced. In the following one, we prove an extension of Gronwall's inequality (see also [6] and [8]) on which depend some of the proofs of the subsequent theorems. Finally, of the last three sections,

(*) This paper was written while both authors were at the University of Warwick, Coventry, England, with financial assistance of a N. A. T. O. fellowship.