If $(M, V, \pi)^k$ is a fibre bundle associated to the differential groupoide Φ, then a generalized connection of order n on it is called *foliate* if the morphism $C_{n,f}$ is a foliate morphism. Since the first row of $\widetilde{\Delta}^n_{n-1}(\pi)$ is not a sequence of f.v.b., we say, as in [15], about the foliate splittings of this sequence that they are induced splittings of the foliate generalized connections.

Finally, we remark that the adapted and foliate generalized semiholonomic connections and their relation with the splittings of certain sequences of $\widetilde{\Delta}^n_{n-1}(\pi)$ can be developed in a manner similar to the one indicated in the holonomic case.

REFERENCES

1. Bourbaki, N. — *Variétés différentielle et analytiques*. Fascicule de résultats (Paragraphes 1 à 7). Hermann, Paris, 1967.
2. Craioveanu, M. — *Contribuţii la studiul unor structuri geometrice pe varietăţi infinit dimensionale*. Teză, Iaşi, 1970.
3. Ver Eecke, P. — *Géometrie différentielle, Calcul des jets*. Sao-Paulo, 1967.
4. Ver Eecke, P. — *Introduccion a las conexiones de orden superior*. Publ. del Depart de Geometria y Topologia, Zaragoza, 1968.
5. Ver Eecke, P. — *Connexions d'ordre infini*. Cahiers de topologie et géometrie différentielle dirigés par Ch. Ehresmann, T. 9, 1969, 281–323.
6. Kamber, F. W.-Tondeur Ph. — *Invariant differential operators and the cohomology of Lie algebra sheaves*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., 1971, 113.
7. Libermann, P. — *Sur les prolongements des fibrés principaux et des groupoïdes différentiables banachiques*. *Analyse globale*. Séminaire de mathématiques supérieure (1969) Université de Montréal, 1971.
8. Maxim, L. — *Prelungiri ale varietăţilor infinit-dimensionale*, Teză, Iaşi, 1972.
9. Maxim, L. — *Les connexions d'ordre supérieur sur les fibrés banachiques* (A paraitre Mathematica 1973).
10. Molino, P. — *Feuilletages et classes caractéristiques*, Symposia Mathematica, T. 10, 1972 Bologna.
11. Morimoto, A. — *Prolongations of G-structures to tangent bundles*, Nagoya Math. J. T. 32, 1968.
12. Pénot, P. J. — *Connexion linéaire déduite d'une famille de connexions linéaires par un foncteur vectoriel multilinéaire*, C.R. Acad. Sci. Paris, T. 268, 1969, 100–103.
13. De Prada, A. Cordero, A. L. — *Sur un feuilletage dans le fibré tangent à une variété feuilletée*, C. R. Acad. Sci. Paris, T. 275, 1972.
14. Vaisman, I. — *Variétés riemanniennes feuilletées*, Czechoslovak Mathematical J., T. 21 (96), 1971, Praha.
15. Vaisman, I. — *Remarks about differential operators on foliate manifolds* (A paraitre aux Univ. Iaşi, 1974).

Received 20.IV.1974

Faculty of Mathematics
University of Iaşi
Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXI, s. I a, 1975

UN THÉORÈME D'EXISTENCE POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

PAR

NECULAI PAPAGHIUC

0. Ces dernières années ont paru nombre de travaux de la théorie de la différentiabilité dans les espaces localement convexes (G. Marinescu [8], [9], [10], J. P. Penot [12], I. V. Averbuh et O. G. Smolianov [2], H. H. Keller [6], J. Kijowski et W. Szczyrba [7], R. A. Graff [5], M. Simonnet [14]. L'un des résultats remarquables obtenus le dernier temps est représenté par le théorème d'inversion locale des applications de classe C^k. Ce résultat a été démontré par G. Marinescu et R. A. Graff. Un autre problème fondamental d'analyse locale à implication dans l'analyse globale est constitué par celui de l'intégration des champs de vecteurs. Le but du présent travail est de résoudre ce problème.

1. Soit E un espace localement convexe et $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les semi-normes continues sur E. Soit A_0 un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{A}$ qui satisfait à la condition:

(1) *pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, il existe un indice $\alpha_0 \in A_0$ tel que $|x|_{\alpha_0} \neq 0$* (c'est-à-dire A_0 est un ensemble suffisant de semi-normes).

Nous notons par A l'ensemble des semi-normes ayant la forme $|x| = \max\{|x|_1, \ldots, |x|_n\}$, où $\{|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_n\}$ est un sous-ensemble fini quelconque de l'ensemble A_0. Il est évident que l'ensemble A satisfait à la propriété:

(2) *pour tout couple d'indices $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, il existe un indice $\alpha \in A$ tel que: $|x|_{\alpha_1} < |x|_\alpha$, $|x|_{\alpha_2} < |x|_\alpha$, $\forall x \in E$* (l'ensemble A est dirigé).

Nous supposons que l'ensemble A est équivalent à $\mathcal{A}$ (les deux définissent dans E la topologie d'espace localement convexe).

Dans [10] (p. 19) on introduit une classe plus large d'ensembles, qui sont des ensembles ouverts dans une topologie plus fine que la topologie localement convexe.

Considérons R_+ l'ensemble des nombres réels positifs et $\alpha \to r_\alpha$ une application de l'ensemble A_0 dans R_+.

On appelle *intersphère ouverte* de centre x_0 et de rayons $\{r_\alpha\}$, $(\alpha \in A_0)$ l'ensemble $S(x_0; \{r_\alpha\}) = \bigcap_{\alpha \in A_0} \{x \in E;\ |x - x_0|_\alpha < r_\alpha\}$. C'est avec l'aide des intersphères ouvertes qu'on définit dans E une nouvelle topologie appellée la *topologie raffinée* de E, dans laquelle un sous-ensemble $U \subset E$ est défini comme ouvert, si, pour tout $x_0 \in U$, il existe une intersphère ouverte des centre x_0 incluse dans U.

Les ouverts dans la topologie raffinée seront appelés des ensembles raffinés ouverts. La topologie raffinée est, évidemment, plus fine que la topologie d'espace localement convexe de E, et, grâce à la condition (1), elle est séparée.

Soit I un ensemble dirigé. On dit qu'une suite généralisée $\{x_i\}_{i \in I}$ (une application de l'ensemble I dans E) est convergente dans la topologie raffinée vers un élément $x \in E$ si pour tout système de nombres réels positifs $\{r_\alpha\}$, $(\alpha \in A_0)$ il existe un $i_0 \in I$ tel que $i > i_0$ implique $|x_i - x|_\alpha < r_\alpha$ (c'est-à-dire $x_i \in S(x; \{r_\alpha\})$).

On vérifie aisément que la topologie raffinée est compatible avec la structure de groupe de E, mais, généralement, elle n'est pas compatible avec le produit par des scalaires. En effet, si A_0 est un ensemble infini, il contient un ensemble dénombrable qu'on peut identifier avec l'ensemble des nombres naturels. Soit alors $\{x_n\}_{n\in N}$ une suite de E. Si nous considérons $r_n = 1/2\,|x_n|_n$ $(n\in N)$, nous observons qu'aucun élément de la suite $\{r_n\}$ n'entre pas dans l'intersphère $S(0:\{r_n\})$ quelle que soit la manière dont on complète le système de nombres réels positifs $\{r_n\}$ $(n\in N)$.

Remarque : Si A est fini, la topologie raffinée est une topologie d'un espace normé.

Si l'ensemble des semi-normes A_0 a la propriété que, pour toute suite, $\{x_i\}_{i\in N}$ de E, la convergence à zéro des suites $\{|x_i|_\alpha\}_{i\in N}$ avec $\alpha\in A_0$ implique la convergence à zéro de la suite $\{x_i\}_{i\in N}$, alors nous dirons que l'ensemble A_0 définit la convergence des suites dans E.

On dira qu'une suite généralisée $\{x_i\}_{i\in I}$ de E est convergente dans la topologie localement convexe vers un élément x de E, si, pour tout $\alpha\in\mathcal{A}$ nous avons $\lim_{i\in I}|x_i - x|_\alpha = 0$.

La suite généralisée $\{x_i\}_{i\in I}$ de E s'appelle suite Cauchy généralisée si la suite généralisée $\{x_i - x_j\}_{(i,j)\in I\times I}$ converge à zéro dans la topologie localement convexe.

Un espace localement convexe E s'appelle complet pour les suites si toute suite Cauchy de E converge vers un élément de E.

Convention : Dans tout ce qui suit, quand on ne spécifie pas la topologie qu'on considère, on entendra qu'il s'agit de la topologie localement convexe.

Soit E (respectivement F) un espace localement convexe (e. l. c.), $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$) l'ensemble des semi-normes continues dans E (respectivement F) et A_0 (respectivement B_0) l'ensemble des semi-normes qui définissent la convergence des suites dans E (respectivement F).

Les deux propositions suivantes ont lieu :

Propositon 1. *Une application linéaire $f: E\to F$ est continue si, et seulement si $\forall\beta\in\mathcal{B}$ il existe $\alpha\in\mathcal{A}$ et une constante $M_{\alpha\beta}>0$ telle que $|f(x)|_\beta \leqslant M_{\beta\alpha}\,|x|_\alpha$.*

Proposition 2. *La condition nécessaire et suffisante afin qu'une application linéaire $f: E\to F$ soit continue est qu'il existe une application $\varphi:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ telle que*

$$(3)\qquad |f|_{\beta,\varphi(\beta)} = \sup_{|x|_{\varphi(\beta)}=0} |x|_{\varphi(\beta)} = 0\,\frac{|f(x)|_\beta}{|x|_{\varphi(\beta)}} < \infty \text{ et } |f(x)|_\beta = 0 \text{ si } |x|_{\varphi(\beta)} = 0.$$

Avec ces propositions, pour toute $\varphi:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ nous notons par $L_\varphi(E, F)$ l'ensemble de toute les applications linéaires de E à F qui satisfait à (3).

Proposition 3. *$L_\varphi(E, F)$ est un e. l. c. Si F est complet pour les suites, alors $L_\varphi(E, F)$ est lui-aussi complet pour les suites.*

Proposition 4. *Si l'espace F est complet par rapport à la convergence définie par B_0 alors l'espace $L_\varphi(E, F)$ est complet par rapport à la convergence définie par l'ensemble de semi-normes $\{|\cdot|_{\beta,\varphi(\beta)}\}$ pour $\beta\in B_0$. Démonstration* [10, page 23].

Si nous notons par $E^n = E\times\ldots\times E$ alors E^n est aussi un e.l.c. où $\mathcal{A}^n = \mathcal{A}\times\ldots\times\mathcal{A}$ est l'ensemble de toutes les seminormes continues sur E^n. Les propositions *1* et *2* sont vraies aussi pour les applications n-linéaires $f: E^n\to F$ et nous noterons par $L^n_{n\varphi}(E, F)$ l'espace des applications n-linéaires qui satisfont à la condition :

(3') $|f|_{\beta,{}_n\varphi(\beta)} < \infty$ pour tout $\beta\in\mathcal{B}$ où ${}_n\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n): \mathcal{B}\to\mathcal{A}^n$ et par $L^n_{\mathrm{sym},\,{}_n\varphi}(E, F)$ nous noterons le sous-espace de $L^n_{n\varphi}(E, F)$ formé par les applications linéaires symétriques qui satisfont à (3'). Dans le produit cartésien $E\times F$ nous définissons la topologie rafinée. Nous définissons les intersphères ouvertes à l'aide des semi-normes $A_0\times B_0$ définies par : $|(x, y)|_{(\alpha,\beta)} = |x|_\alpha + |y|_\beta$ où $\alpha\in A_0$ et $\beta\in B_0$.

Il est évident qu'un système fondamental de voisinages de l'origine dans la topologie raffinée construite à l'aide de ces intersphères est donné par les produits cartésiens $S_E\times S_F$ où S_E est une intersphère avec le centre à l'origine de E.

Définition. *Soit un ensemble $U\subset E$ et $x\in U$. Nous notons par E_x le sous-espace linéaire de E engendré par l'ensemble $U-x$ et nous supposons que $U-x$ est un ensemble absorbant pour E_x (c'est-à-dire pour tout $y\in E_x$, il existe $\lambda>0$ tel que $\mu x\in U-x$ pour tout $\mu\in R$ avec $|\mu|<\lambda$. Nous dirons qu'une application $f: U\subset E\to F$ est différentiable Fréchet au point x s'il existe une application $\varphi:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ et une application $T\in L_\varphi(E, F)$ tel que nous ayons :*

(4) $\qquad f(x+h) = f(x) + T\,.\,h + \varepsilon(x, h)$ où $\varepsilon(x): E\to F$ *satisfait à la condition :*

$$(5)\qquad \lim_{\substack{h\to 0,\ |h|\neq 0\\ \varphi(\beta)}} \frac{|\varepsilon(x, h)|_\beta}{|h|_{\varphi(\beta)}} = 0 \text{ et } |\varepsilon(x, h)|_\beta = 0 \text{ si } |h|_{\varphi(\beta)} = 0\ \forall\beta\in\mathcal{B} \text{ et } h\in U-x.$$

Nous dirons que l'application $\varepsilon(x, \ .\ )$ qui satisfait à la condition (5) est de l'ordre de h et nous écrivons $\varepsilon(x, \ .\ ) = o(h)$. L'application T s'appelle *la dérivée Fréchet* de l'application f en x et on la note par $f'(x)$. L'expression $T\,.\,h = f'(x).h$ s'appelle la différentielle Fréchet de f en x dans la direction h.

Les propriétés essentielles de la dérivée Fréchet dans le cas des espaces normés sont étendues aux espaces localement convexes. C'est toujours dans [10, chap IV] qu'on démontre le théorème des accroissements finis pour des applications entre des e. l. c.

Définition. *L'application $f: U\subset E\to F$ s'appelle de classe C^1 si pour tout $x\in U$, il existe une application $\varphi:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$, telle que l'application f admet la dérivée Fréchet $f'(x)\in L_\varphi(E, F)$ et l'application $f': U\to L_\varphi(E, F)$ est continue dans les topologies localement convexes et dans celles raffinées aussi.* La définition et les propriétés essentielles de la dérivée d'ordre supérieur sont aussi étendues au cas des espaces localement convexes, [5], [10].

Si les espaces localement convexes E et F sont complets pour les suites, le théorème d'inversion locale des applications de classe C^1, le théorème des fonctions implicites et le théorème de Taylor sont démontrés aussi dans [10, chap IV].

Dans ce qui suit nous supposons que les espaces localement convexes qui interviennent sont complets pour les suites.

Soit alors E (respectivement F) un e. l. c. c. p. s., $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$) l'ensemble de toutes les semi-normes continues sur E (respectivement F) et A_0 (respectivement B_0 l'ensemble des semi-normes qui définissent la convergence des suites dans E (respectivement F). A coté de la topologie localement convexe, nous considérons aussi dans E la topologie raffinée définie par l'ensemble A_0.

Proposition 5. *Soit U un sous-ensemble convexe, raffiné ouvert de E et soit $f_n: U\to F$ une suite d'applications de classe C^1. Si :*

(a) *il existe un point $x_0\in U$, tel que la suite $f_n(x_0)\in F$ est convergente*

(b) *il existe $\varphi:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ tel que la suite des applications $f'_n: U\to L_\varphi(E, F)$ converge uniformément dans U vers $g: U\to L_\varphi(E, F)$,*

alors, pour tout $x\in U$, la suite $f_n(x)$ est convergente. Si nous notons par $f(x)$ la limite de la suite $f_n(x)$, la convergence de la suite $\{f_m\}$ vers f est uniforme sur toute partie bornée de U f est de classe C^1 et $f'(x) = g(x)$.

Démonstration. La relation :

$$(6)\qquad |(f_m(x) - f_m(x_0)) - (f_n(x) - f_n(x_0))|_\beta \leqslant |x - x_0|_{\varphi(\beta)} \sup_{y\in[x, x_0]} |f'_m(y) - f'_n(y)|_{\beta,\varphi(\beta)}$$

$$\forall\beta\in\mathcal{B}, \text{ où } [x, x_0] = \{y = tx_0 + (1-t)x,\ t\in[0, 1]\}$$

résulte du théorème des accroissements finis [10, page 16]. Mais (b) implique le fait que le second membre de (6) tend vers zéro quand m et n tendent vers l'infini et de plus, le second membre tend vers zéro uniformément quand x reste dans une partie bornée de U

De (a) il résulte $|f_m(x_0)-f_n(x_0)|_\beta \to 0$ quand m et $n\to\infty$, $\forall\beta\in\mathfrak{B}$. Donc, pour tout $\beta\in\mathfrak{B}$, $|f_m(x)-f_n(x)|_\beta\to 0$ uniformément quand x appartient à toute partie bornée de U.

Soit f la fonction limite de la suite $\{f_n\}$. Parceque chaque point de U a un voisinage où f est la limite uniforme de la suite $\{f_n\}$, il résulte que f est localement continue dans les topologies localement convexes. Montrons que f est de classe C^1 et que $f'(x)=g(x)$. Soit x_1 un point quelconque fixé dans U. Il suffit de montrer que :

(7) $f(x)-f(x_1)-g(x_1)(x-x_1)=o(x-x_1)$ (dans le sens de la relation (5)). Mais $\forall\beta\in\mathfrak{B}$ nous avons : $|f(x)-f(x_1)-g(x_1)(x-x_1)|_\beta \leqslant |(f(x)-f(x_1))-(f_n(x)-f_n(x_1))|_\beta + |f_n(x)-f_n(x_1)-f_n'(x_1)(x-x_1)|_\beta + |f_n'(x_1)(x-x_1)-g(x_1)(x-x_1)|_\beta$.

Si nous faisons dans (6) $m\to\infty$, on constate que le premier terme du second membre est $o(x-x_1)$ pour $n>n_1$. D'autre part, de (b) on voit que pour tout $\beta\in\mathfrak{B}$ fixé et pour tout $\varepsilon>0$, il existe un n_2 tel que pour $n>n_2$ nous avons $|f_n'(x)-g(x)|_\beta<\varepsilon$. Donc il existe $n_0=\max(n_1, n_2)$ tel que pour $n\geqslant n_0$ le premier et le dernier terme du second membre de l'inégalité de plus haut sont de $o(x-x_1)$ et, par la définition de la différentielle Fréchet, il résulte que le second terme est aussi de $o(x-x_1)$.

Par suite $f(x)-f(x_1)-g(x_1)(x-x_1)=o(x-x_1)$, pour tout $x_1\in U$ fixé et donc on a $f'(x)=g(x)$.

Pour montrer que f est de classe C^1 il faut montrer encore que f' est continue dans les topologies localement convexes et aussi dans les topologies raffinées. Mais $f'=g$; il suffit donc de montrer que g est continue dans les deux topologies. L'application g étant la limite uniforme dans U de la suite $\{f_n'\}$, suite d'applications continues dans les deux topologies, nous avons

$$|g(x)-g(y)|_{\beta,\varphi(\beta)} \leqslant |g(x)-f_n'(x)|_{\beta,\varphi(\beta)} + |f_n'(x)-f_n'(y)|_{\beta,\varphi(\beta)} + |f_n'(y)-g(y)|_{\beta,\varphi(\beta)},\ \forall\beta\in B.$$

Évidemment, le premier et le dernier terme du second membre tendent vers zéro lorsque $n\to\infty$ et parceque, pour tout n, l'application f_n' est continue dans les deux topologies pour tout $x\in U$, il résulte que g est continue dans les deux topologies.

2. Soit R l'espace vectoriel réel, considéré comme e. l. c. dont l'ensemble de toutes les semi-normes continues est formé d'un seul élément (la norme ordinaire).

Évidemment, la topologie de la norme, la topologie localement convexe et la topologie raffinée coïncident sur R.

Si E est un espace localement convexe, $\mathfrak{A}$ l'ensemble de toutes les semi-normes continues sur E, A_0 l'ensemble des semi-normes qui définit la convergence des suites de E et si nous notons par $c:\mathfrak{A}\to\{\|\cdot\|\}$ l'application constante qui associe à toute semi-norme continue sur E la norme ordinaire sur R, alors $L_c(R, E)\approx E$ (isomorphisme topologique qui conserve les semi-normes).

Nous noterons toujours par $\mathfrak{A}$ l'ensemble de toutes les semi-normes continues sur $L_c(R\,;E)$ et aussi par A_0 l'ensemble des semi-normes qui définit la convergence des suites dans $L_c(R, E)$.

Soit $I=[-1, 1]\subset R$. Pour $k\geqslant 0$ nous notons par $C^k(I, E)$ l'ensemble de toutes les applications de classe C^k de l'interval I dans E. ($I\subset R$ étant fermé, dans les extrémités, nous considérons les dérivées latérales).

Proposition 6. *$C^k(I, E)$ est un espace localement convexe.*

Si E est complet pour les suites, $C^k(I, E)$ l'est aussi.

Démonstration. Pour tout $\gamma\in C^k(I, E)$ et tout $\alpha\in\mathfrak{A}$ nous définissons :

(8) $$|\gamma|_\alpha = \sup_{t\in I}|\gamma(t)|_\alpha + \sup_{t\in I}|\gamma'(t)|_\alpha + \dots + \sup_{t\in I}|\gamma^k(t)|_\alpha.$$

Nous observons que pour tout $\alpha\in\mathfrak{A}$ et tout $\gamma\in C^k(I, E)$, $|\gamma|_\alpha$ est un nombre positif fini parceque : $t\to|\gamma(t)|_\alpha, \dots, t\to|\gamma^k(t)|_\alpha$ sont des fonctions continues avec des valeurs positives sur le compact I.

Il est évident que, pour tout $\alpha\in\mathfrak{A}$, $|\gamma|_\alpha$ est une semi-norme continue sur $C^k(I, E)$, donc $C^k(I, E)$ est un e. l. c. pour lequel l'ensemble de toutes les semi-normes continues est en correspondance bijective avec $\mathfrak{A}$ (et nous la noterons toujours par $\mathfrak{A}$). Nous supposons que E est complet pour les suites et soit $\{\gamma_n\}$ une suite Cauchy de $C^k(I, E)$. Donc $\forall\alpha\in\mathfrak{A}$ et $\forall\varepsilon>0$, il existe un n_0 tel que $m, n>n_0$ implique $|\gamma_m-\gamma_n|_\alpha<\varepsilon$.

De (8) nous avons $\sup_{t\in I}|\gamma_m(t)-\gamma_n(t)|_\alpha \leqslant |\gamma_m-\gamma_n|_\alpha$ est pour tout $\alpha\in\mathfrak{A}$ donc $\{\gamma_n\}$ est une suite uniformément Cauchy dans I.

Par suite $\{\gamma_n\}$ converge vers une application continue $\gamma: I\to E$. Il reste à montrer que γ est C^k. Nous montrerons cela par induction d'apres k. Soit $k=1$. De (8) il résulte que $\sup_{t\in I}|\gamma_m'(t)-\gamma_n'(t)|_\alpha \leqslant |\gamma_m-\gamma_n|_\alpha<\varepsilon$ pour tout $\alpha\in\mathfrak{A}$, donc la suite des dérivées est une suite uniformément Cauchy sur I dans la topologie localement convexe et, par suite, $\{\gamma_n'\}$ converge uniformément dans I vers une application $\bar\gamma: I\to E$.

En appliquant la proposition 5 à la suite $\{\gamma_n\}$ il résulte que γ est C^1 et que $\gamma'(x)=\bar\gamma(x)$. De façon analogue, par induction il résulte que γ est C^k.

Nous notons par $C_0^k(I, E)=\{\gamma\in C^k(I, E)\,;\ \gamma(0)=0\}$.

Proposition 7. *$C_0^k(I, E)$ est un sous-espace raffiné fermé de $C^k(I, E)$.*

Démonstration : Soit $\{\gamma_n\}$ une suite de $C_0^k(I, E)$ convergente à γ, la convergence étant définie par A_0. Évidemment $\gamma\in C^k(I, E)$. Parce que $\gamma_n(t)$ est uniformément convergente dans I pour la convergence définie par A_0, de (8) il résulte que pour tout système $\{r_\alpha\}(\alpha\in A_0)$, il existe n_0 tel que $n>n_0$ implique $|\gamma_n(0)-\gamma(0)|_\alpha<r_\alpha$. Comme, pour tout n, $\gamma_n(0)=0$, il résulte $\gamma\in C_0^k(I, E)$.

Soit $C_0^k(I, U_0)=\{\gamma\in C_0^k(I, E)\,;\ \gamma(I)\subset U_0\}$ où U_0 est un ensemble raffiné ouvert de E.

Proposition 8. *$C_0^k(I, U_0)$ est un ensemble raffiné ouvert de $C_0^k(I, E)$.*

Démonstration : Soit $\gamma_0\in C_0^k(I, U_0)$.

Nous montrerons que $C_0^k(I, U_0)$ contient une intersphère de centre γ_0. Soit $K\subset U_0$ l'image de l'application $t\to\gamma_0(t)$, qui est évidemment continue dans les topologies raffinées (γ_0 est C^k) et, comme la topologie raffinée est séparée, il résulte K compact (l'image d'un compact par une application continue, les topologies étant séparées). Alors, pour tout $\alpha\in A_0$, il existe $\rho>0$ tel que tout $x_0\in E$ qui satisfait $|x_0-\gamma_0(t)|_\alpha<\rho_\alpha$ appartient aussi à U_0. Nous considérons alors $\gamma\in C_0^k(I, E)$ tel que $|\gamma-\gamma_0|_\alpha<\rho_\alpha$, $\forall\alpha\in A_0$.

De (8) nous avons $|\gamma(t)-\gamma_0(t)|_\alpha<\rho_\alpha$ pour tout $t\in I$ donc $\gamma(t)\in U_0$ pour tout $t\in I$.

Il en résulte qu'il existe une intersphère de centre γ_0 et rayons $\{\rho_\alpha\}$ $(\alpha\in A_0)$ telle que $\gamma\in S(\gamma_0\,;\{\rho_\alpha\})$, donc $\gamma(I)\subset U_0$ et par suite $C_0^k(I, U_0)$ est raffiné ouvert dans $C_0^k(I, E)$.

3. Le théorème de Taylor pour le cas des applications différentiables de classe $C^k(k\geqslant 1)$ entre des e. l. c. est démontrée dans [10, page 52]. Nous démontrerons dans ce qui suit la réciproque du théorème de Taylor qui donne un critère général pour montrer que diverses applications sont de classe C^k.

Théorème 1. *Soit E (respectivement F) un e. l. c., $\mathfrak{A}$ (respectivement $\mathfrak{B}$) l'ensemble de toutes les semi-normes continues sur E (respectivement F), A_0 (respectivement B_0) l'ensemble des semi-*

normes qui définissent la convergence des suites dans E (respectivement F). Soit $U \subset E$ un ensemble convexe, raffiné ouvert tel que pour tout $x \in U$ l'ensemble $U - x$ est absorbant pour le sous-espace linéaire E_x qu'il engendre.

Soit $f : U \subset E \to F$ une application qui satisfait à la condition : pour tout $j = 1, 2, \ldots, k$ il existe une application ${}_j\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_j) : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \times \ldots \times \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^n$ telle que pour tout $h \in U - x$ nous ayons:

$$f(x+h) = a_0(x) + a_1(x)h + \frac{a_2(x)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{a_k(x)}{k!}h^k + o(h^k), \tag{9}$$

où $h^k = (h, \ldots, h)$ k-fois et $a_j(x) \in L^j_{\mathrm{sym}}$, ${}_j\varphi(E, F)$ pour tout $j = 0, 1, \ldots, k$ sont des applications continues dans les topologies localement convexes tout comme dans les topologies raffinées. Dans ces conditions f est de classe C^k dans U et $a_j = f^{(j)}$ pour $j = 0, 1, \ldots, k$ où $f^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de f.

Pour la démonstration de ce théorème nous employons une idée de E. Nelson [11].

Démonstration. Nous procédons par induction d'après k. Pour $k = 1$ le théorème est vrai par suite de la définition d'une application de classe C^1, a_1 étant continue dans les deux topologies.

Nous supposons le théorème vrai pour $k - 1$.

Alors de (9) il résulte $a_j = f^{(j)}$ pour $j = 0, 1, \ldots, k-1$ et $a_k(x)\, h^k/k! = o(h^{k-1})$. Pour tout q tel que $x + h + q \in U$ nous exprimons $f(x+h+q)$ de deux manières différentes :

$$f(x+h+q) = f(x+h) + f'(x+h)q + \ldots + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x+h)q^{(k-1)} + \frac{a_k(x+h)}{k!} q^k + o(q^k) \tag{10}$$

et

$$f(x+h+q) = f(x) + f'(x)(h+q) + \ldots + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x)(h+q)^{(k-1)} + \frac{1}{k!} a_k(x)(h+q)^k + o(h+q)^k). \tag{11}$$

Nous fixons x et considérons q tel que : $(\ast)$ $1/4\, |h|_\alpha \leq |q|_\alpha \leq 1/2\, |h|_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$. La relation $(\ast)$ dit qu'il n'importe pas si nous écrivons $o(q^k)$, $o(h+q)^k$ où $o(h^k)$. En soustrayant la relation (11) de (10) et notant les coefficients de q^j par $g_j(h)$ nous obtenons

$$g_0(h) + g_1(h)q + \ldots + g_{k-1}(h)\, q^{k-1} + g_k(h)q^k = o(h^k) \quad (\text{grâce à } (\ast)). \tag{12}$$

où $g_k(h)q^k = [a_k(x+h) - a_k(x)]q^k/k!$. Grâce à la continuité de a_k dans les deux topologies il résulte $g_k(h)q^k = o(h^k)$. Nous montrons que chaque terme de (12) est $o(h^k)$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des nombres réels distincts et remplaçons dans (12) q par $\lambda_i\, q$ pour $= 1, 2, \ldots, k$. Nous obtenons k équations qui, formellement, s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda_k & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(h) \\ g_1(h)q \\ \vdots \\ g_k(h)q^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o(h^k) \\ o(h^k) \\ \vdots \\ o(h^k) \end{pmatrix}. \tag{!}$$

Puisque λ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sont distinctes, le déterminant de la matrice du système (!) est un déterminant de Vandermonde, donc non-zéro, et, par suite, la matrice est inversible. Nous obtenons $g_j(h)q^j = o(h^k)$; en particulier cela est vrai aussi pour $j = k - 1$.

Mais $g_{k-1}(h)\, q^{k-1} = \left[\frac{f^{(k-1)}(k+h)}{(k-1)!} - \frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!} - \frac{k a_k(x)h}{k!}\right] q^{k-1}$ (nous avons employé la symétrie de a_k). Il résulte :

$$g_{k-1}(h)q^{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}[f^{(k-1)}(x+h) - f^{(k-1)}(x) - a_k(x)h]q^{(k-1)}$$ et comme $g_{k-1}(h)q^{(k-1)} = o(h^k)$ il résulte $f^{(k-1)}(x+h) - f^{(k-1)}(x) - a_k(x).h = o(h)$.

Avec la définition de la dérivée Fréchet il résulte $f^{(k)}(x) = a_k(x)$ et $f^{(k)}$ continue dans les deux topologies, par suite $f \in C^k$ et $f^{(j)} = a_j$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Nous employons la réciproque du théorème de Taylor pour démontrer que l'application d'évaluation :
$W : C^k_0(I, U_0) \times I \to U_0$ définie par $W(\gamma, x) = \gamma(x)$ pour toute $(\gamma, x) \in C^k_0(I, U_0) \times I$ est de classe C^k.

Théorème 2. *L'application d'évaluation définie ci-dessus est de classe C^k.*

Démonstration. Soit $(\gamma, x) \in C^k_0(I, U_0) \times I$ et $(\eta, h) \in C^k_0(I, E) \times R$ avec h suffisamment petit, tel que $x + th$ soit dans I. Alors : $W(\gamma + \eta, x + h) = \gamma(x+h) + \eta(x+h)$. Mais γ et $\eta \in C^k_0(I, E)$, E est complet pour des suites, donc les conditions du théorème de Taylor sont satisfaites. Nous obtenons alors :

$$W(\gamma + \eta, x+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\gamma^{(j)}(x)}{j!} h^j + R_\gamma(x, h) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\eta^{(j)}(x)}{j!} h^j + R_\eta(x, h). \tag{13}$$

Notons par :

$$\psi_j(\gamma, x)[(\eta_1, h_1), \ldots, (\eta_j, h_j)] = \gamma^{(j)}(x)(h_1, \ldots, h_j) + \sum_{i=0}^{j} \eta_i^{(j-1)}(h_j)(h_1, \ldots, h_{i-1}, h_{i+1}, \ldots, h_j) \tag{i}$$

pour $j = 0, 1, \ldots, k$ et

$$\rho(\gamma, x, \eta, h) = R_\gamma(x, h) + R_\eta(x, h) + \frac{\eta^{(k)}(x)h^k}{k!}. \tag{ii}$$

Par ces notations, (13) s'écrit :

$$W(\gamma + \eta, x+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\psi_j(\gamma, x)}{j!} (\eta, h)^j + \rho(\gamma, x, \eta, h). \tag{14}$$

Sur $C^k_0(I, E) \times R$ nous définissons les semi-normes :

$(\eta, h)|_\alpha = \max\{|\eta|_\alpha, \|h\|\}$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ et alors, compte tenu de (ii) il résulte

$$\frac{|\rho(\gamma, x, \eta, h)|_\alpha}{|(\eta, h)|^k_\alpha} \to 0 \tag{15}$$

pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, quand $|(\eta, h)|_\alpha \to 0$, c'est-à-dire $\rho(\gamma, x, \eta, h) = o((\eta, h)^k)$. De la relation (i) il résulte que l'application $\psi_j : C^k_0(I, E) \times R \to L^j_{\mathrm{sym},I}(C^k_0(I, E) \times R, E)$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots, k$ et où $I : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \times \ldots \times \mathfrak{A}$ est l'application $\alpha \to (\alpha, \ldots, \alpha)$.
Montrons que les applications ψ_j sont continues dans les deux topologies.

Soient (γ, x) et $(\eta, h) \in C^k_0(I, U_0) \times I$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$,

$$|\psi_0(\gamma, x) - \psi_0(\eta, h)|_\alpha = |\gamma(x) - \eta(h)|_\alpha \leq |\gamma(x) - \gamma(h)|_\alpha + |\gamma(h) - \eta(h)|_\alpha \leq |\gamma(x) - \gamma(h)|_\alpha + |\gamma - \eta|_\alpha$$

et donc la continuité de ψ_0 dans les deux topologies résulte de l'uniforme continuité de γ sur I dans les deux topologies.

D'autre part, dans le cas $j=1, 2, \ldots, k$ nous avons pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$:

$$(16) \qquad |\{\psi_j(\gamma, x)-\psi_j(\eta, h)\}[(\eta_1, h_1), \ldots, (\eta_j, h_j)]|_\alpha \leqslant |\gamma^{(j)}(x)-\eta^{(j)}(x)|_\alpha |h_1|_\alpha \ldots |h_j|_\alpha +$$

$$+ \sum_{i=1}^{j} |\eta_i^{(j-1)}(x) - \eta_i^{(j-1)}(h)|_\alpha |h_1|_\alpha \ldots |h_{i-1}|_\alpha |h_{i+1}|_\alpha \ldots |h_j|_\alpha \text{ (on a employé (i))}$$

Par le théorème des accroissements finis il résulte :

$$(17) \qquad |\eta_i^{(j-1)}(x)-\eta_i^{(j-1)}(h)|_\alpha \leqslant \sup_{t\in[x,h]} |\eta_i^{(j-1)}(t)|_\alpha |x-h|_\alpha \text{ pour tout } \alpha \in \mathcal{A}.$$

En remplaçant (17) dans (16) on obtient :

$$(18) \qquad |\psi_j(\gamma, x)-\psi_j(\eta, h)|_\alpha \leqslant |\gamma^{(j)}(x)-\eta^{(j)}(h)|_\alpha + M_\alpha |x-h|_\alpha \leqslant |\gamma^{(j)}(x)-\gamma^{(j)}(h)|_\alpha +$$

$$+ |\gamma^{(j)}(h)-\eta^{j}(h)|_\alpha + M_\alpha |x-h|_\alpha \leqslant |\gamma^{(j)}(x)-\gamma^{(j)}(h)|_\alpha + 2M_\alpha |(\gamma, x)-(\eta, h)|_\alpha$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ (on a tenu compte du fait que : $|(\gamma, x)-(\eta, h)|_\alpha = |\gamma-\eta, x-h|_\alpha = \max\{|\gamma-\eta|_\alpha, \|x-h\|\}$ et de la relation (8). De la relation (18), puisque $\gamma^{(j)}$ sont uniformément continues sur I dans les deux topologies, il résulte que ψ_j sont des applications continues dans les deux topologies pour tout $j=1, 2, \ldots, k$. Les relations (14), (15), (18) et les observations faites montrent que les conditions du théorème 1 sont satisfaites et, par suite, que l'application W est de classe C^k.

4. Dans [10, p. 34] on démontre le théorème des fonctions implicites pour des e. l. c dans les conditions suivantes :

Théorème 3. *Soient E, F, G trois e. l. c. p. s., $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les ensembles de toutes les semi-normes continues sur ces espaces, $A_0 \subset \mathcal{A}$ $B_0 \subset \mathcal{B}$ et $C_0 \subset \mathcal{C}$ les esembles de semi-normes qui définissent la convergence des suites dans les espaces respectifs. Soit φ(respectivement ψ) une application de l'ensemble $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$). Nous supposons que ψ est biunivoque et que $\psi(C_0)=B_0$. Nous considérons un ensemble raffiné ouvert $W \subset E \times F$, un point $(x_0, y_0) \in W$ et une application f de classe C^1 relative à $L_{(\varphi,\psi)}(E \times F, G)$ de l'ensemble W dans G satisfaisant aux conditions :*

(1°) $$f(x_0, y_0)=0$$

(2°) $$f'_y(x_0, y_0) \in \mathrm{Isom}_\psi(F, G) \text{ (raffiné ouvert dans } L_\psi(F, G)).$$

Dans ces conditions il existe un voisinage raffiné ouvert W_1, de (x_0, y_0), un voisinage raffiné ouvert U de x_0 et une application g de classe C^1 de l'ensemble U dans F tels que la relation :

$$(x, y) \in W_1, \text{ et } f(x, y)=0 \text{ est équivalent avec } x \in U \text{ et } y=g(x).$$

La démonstration résulte comme une conséquence du théorème d'inversion locale démontré pour des applications de classe C^1 entre des e. l. c. dans [10, p. 32].

En employant ces résultats et une idée due à J. Robbin [13] nous démontrons le théorème d'existence des solutions de classe C^k pour des équations différentielles ordinaires de premier ordre dans le cas des espaces localement convexes.

Théorème 4. *Soient E un espace localement convexe complet pour les suites, U un ensemble raffiné ouvert de E, $f: R \times U \to E$ une application de classe $C^k (k \geqslant 1)$.*

Alors pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage raffiné ouvert V de x_0, $V \subset U$, un intervalle $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset R$ et une application $\Phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to U$ telle que soient satisfaites les trois conditions suivantes :

(a) *Φ est de classe C^k ;* (b) *$\Phi(0, x)=x$ pour tout $x \in V$;* (c) *$\dot{\Phi}(t, x)=f(t, \Phi(t, x))$ pour tout $(t, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V$, ou par $\dot{\Phi}$ nous avons noté la dérivée de Φ par rapport à t.*

Démonstration. Sans restreindre le généralité nous pouvons supposer x_0 comme l'origine de E, U une intersphère de centre x_0 et de rayons $\{r_\alpha\}$ $(\alpha \in A_0)$. Notons par $U_0 \subset U$ l'intersphère de centre x_0 et de rayons $\{r_\alpha/2\}$ $(\alpha \in A_0)$. Soit $I=[-1, 1] \subset R$ et pour $k \geqslant 0$ soit $C^k(I, E)$ l'espace localement convexe complet pour les suites des applications de classe C^k de I dans E. Soient $C_0^k(I, E)=\{\varphi \in C^k(I, E) ; \varphi(0)=0\}$ et $C_0^k(I, U_0)=\{\varphi \in C_0^k(I, E) : \varphi(I) \subset U_0\}$.

Nous démontrons le théorème par induction d'après k. Supposons $k=1$ et considérons la fonction $F: R \times U_0 \times C_0^1(I, U_0) \to C^0(I, E)$ définie par $F(a, x, \varphi)(t)=\varphi(t)-a.f(at, x+\varphi(t))$ où $a \in R$, $x \in U_0$, $\varphi \in C_0^1(I, U_0)$ et $t \in I$.

Lemme. *L'application F définie ci-dessus est une application de classe C^1 entre des e. l. c.*

Nous supposons le lemme démontré et calculons la dérivée partielle de F par rapport à φ au point $a=0$, $x=x_0$, $\varphi=0$ en direction $\delta \in C_0^1(I, E)$. Nous obtenons : $\partial_3 F(0, x_0, 0).\delta(t)=\delta(t)$. Il est évident que $\partial_3 F(0, x, 0)$ est un isomorphisme topologique linéaire de $C_0^1(I, E)$ dans $C^0(E, I)$. Mais $F(0, x, 0)=0$ (vraie par la définition de F) implique que les conditions du théorème 3 sont satisfaites ; par suite il existe un voisinage raffiné ouvert $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times V$ de $(0, x_0)$ dans $R \times U_0$ et une application $g: (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times V \to C_0^1(I, U_0)$ de classe C^1 telle que $F(a, x, g(a, x))=0$ pour tout $(a, x) \in (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times V$. Nous définissons alors $\Phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to U$ par $\Phi(t, x)=g(t, x)(t/\varepsilon)+x$. Par le choix de U_0 et U, évidemment $\Phi(t, x) \in U$. Vérifions que Φ satisfait aux trois conditions de l'énoncé du théorème : (a) Φ est de classe C^1 parceque l'application d'évaluation $\varpi: C_0^1(I, U_0) \times I \to U_0$ est de classe C^1 (théorème 2) et $\Phi(t, x)=\varpi(g(t, x), t/\varepsilon)+x$. La condition (b) résulte du fait que $g(t, x) \in C_0^1(I, U_0)$; donc $g(t, x)(0)=0$ et par suite $\Phi(0, x)=x$ pour tout $x \in V$.

$$(c) \qquad \dot{\Phi}(t, x)-f(t, \Phi(t, x))=(1/\varepsilon)\, g(t, x)(t/\varepsilon)-f(t, x+g(t, x)(t/\varepsilon))=$$

$$=1/\varepsilon\,(g(t, x)(t/\varepsilon-\varepsilon f(\varepsilon \cdot t/\varepsilon)x+g(t, x)(t/\varepsilon)))=1/\varepsilon\, F(\varepsilon, x, g(t, x))(t/\varepsilon)=0$$

parceque $F(a, x, g(a, x))=0$ pour tout $(a, x) \in (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times V$.

Il résulte que $\dot{\Phi}(t, x)=f(t, \Phi(t, x))$ pour tout $(t, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ c'est-à-dire la condition (c). En employant le même raisonnement par induction il résulte que le théorème est vrai pour tout k.

La démonstration du lemme. Faisons d'abord les remarques suivantes :

Soit E un e. l. c., $U_0 \subset E$ un sous-ensemble raffiné ouvert et $g: U_0 \to E$ une application

Soit $I=[-1, 1]$ et définissons l'application $\Omega_g: C^0(I, U_0) \to C^0(I, E)$ par $\Omega_g(f)=g \circ f$. Alors les affirmations suivantes sont vraies :

(I) Si g est continue dans les deux topologies, Ω_g est continue dans les deux topologies.

(II) Si g est de classe C^1, Ω_g est de classe C^1 aussi. La première affirmation se vérifie comme dans le cas des espaces normés compte tenu de la définition des semi-normes sur $C^0(I, E)$. Pour la démonstration de (II) nous notons par $L_I(E)$ l'espace localement convexe des applications linéaires continues de E dans E, où par $I: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ on a noté l'application identique de l'ensemble de toutes les semi-normes continues sur E en elle-même. Nous notons par $\lambda^1: C^0(I, L_I(E)) \to L_I(C^0(I, E))$ l'application définie par $[\lambda^1(T)h](t)=T(t)(h(t))$ pour tout $T \in C^0(I, L_I(E))$, $h \in C^0(I, E)$, $t \in I$. Evidemment, l'application λ^1 est linéaire et continue. Alors, si g est de classe C^1 nous obtenons :

$$[\Omega_g(f+h)](t)-[\Omega_g(f)](t)=g(f(t)+h(t))-g(f(t))=dg(f(t))\,h(t)+o(h(t))=[\Omega_{dg}(f)\,h](t)+o(h(t))$$

Comme $dg: I \to L_I(E)$ et $\Omega_{dg}: C^0(I, U_0) \to C^0(I, L_I(E))$ il résulte que $d(\Omega_g)$ existe et $d(\Omega_g)(f)=\Omega_{dg}(f) \circ h$ pour tout $h \in C^0(I, U_0)$ par suite $d(\Omega_g)=\lambda^1 . \Omega_{dg}$. Puisque λ^1 et Ω_g sont continues dans les deux topologies, il résulte que $d(\Omega_g)$ est continue dans les deux topologies donc, Ω_g est de classe C^1. D'une façon analogue, si g est de classe C^k il résulte que Ω_g est de classe

C^k. Soit maintenant $F: R\times U_0\times C_0^1(I, U_0)\to C^0(I, E)$ définie par $F(a, x, \varphi)(t)=\dot{\varphi}(t)-af(at, x+\varphi(t))$ et montrons que F est de classe C^k. Eidemment F s'écrit comme différence de deux applications $F=F_1-F_2$ où $F_1: R\times U_0\times C_0^1(I, U_0)\to C^0(I, E)$ est définie par $F_1(a, x, \varphi)(t)=\dot{\varphi}(t)$ et $F_2: R\times U_0\times C_0^1(I, U_0)\to C^1(I, E)$ est définie par $F_2(a, x, \varphi)(t)=a\, f(at, x+\varphi(t))$. Comme F_1 est une application linéaire et continue, donc de classe C^1, il reste à montrer que F_2 est de classe C^1. Soit alors $\tau: R\to C^1(I, R)$ l'application définie par $[\tau(a)](t)=a.t$ pour tout $a\in R$ et $t\in I$. L'application τ est linéaire et continue. Notons par $\sigma: C(I, U_0)\times C_0^1(I, U_0)\to C^1(I, U)$ l'application définie par: $\sigma(x, \varphi)=x+\varphi$ où par $C(I, U_0)$ on a noté les applications $x: I\to U_0$ définies par $x(t)=x$ pour tout $t\in I$. L'application σ est un plongement de $C(I, U_0)\times C_0^1(I, U_0)$ dans $C^1(I, U)$ et donc elle est de classe C^1. Notons encore par $\mathfrak{M}$ $R\times C^1(I, E)\to C^1(I, E)$ l'application définie par $\mathfrak{M}(a, g)=ag$ qui, évidemment, est une application linéaire et continue. On déduit alors que:

$$R\times U_0\times C_0^1(I, U_0)\xrightarrow{\tau\times\sigma} C^1(I, R)\times C^1(I, U)\xrightarrow{\Omega_f} R\times C^1(I, E)\xrightarrow{\mathfrak{M}} C^1(I, E)$$

donc $F_2=\mathfrak{M}.\Omega_f\circ(\tau\times\sigma)$ est une application de classe C^1 comme composition d'applications de classe C^1.

D'une façon analogue, si f est de classe C^k, il résulte que F_2 est de classe C^k et donc que F est de classe C^k.

BIBLIOGRAPHIE

1. Abraham R. and Robbin J. — *Transversal mappings and flows*, Benjamin, New York, 1967.
2. Averbuh V. I., Smolianov O. G. — *Teoria differenţirovania v lineinih topologiceskih prostranstvah*, Uspehi Mat. Nauk 22 (1967) pp. 201—258.
3. Craioveanu M. — *Elemente de analiză locală*, (à parraître).
4. Gheorghiev Gh. şi Oproiu V. — *Geometrie diferenţială*, Iaşi 1971.
5. Graff R. A. — *Elements of local non-linear functional analysis*, Princeton, 1972.
6. Keller H. H. — *Differential calculus in locally convex spaces*, Zürich, 1973.
7. Kijowski J. and Szczyrba W. — *On differentiability in an important class of locally convex spaces*, Studia Math. 30 (1968) p. 247—257.
8. Marinescu G. — *Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice*, Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1957.
9. Marinescu G. — *Tratat de analiză funcţională*, I, Ed. Academiei, Bucureşti, 1970.
10. Marinescu G. — *Tratat de analiză funcţională*, II, Ed. Academiei, Bucureşti, 1972.
11. Nelson E. — *Topices in Dynamics*, I. Math. Notes, Princeton Univ. Press, 1969.
12. Penot J. P. — *Calcul différentiel dans les espaces vectoriels topologiques*, Studia Math., 47 (1973), p. 1—23.
13. Robbin J. W. — *On the existence theorem for differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 19 (1968), p. 1005—1006.
14. Simonnet M. — *Calcul différentiel dans les espaces non normables*, Cahiers Topo. et Géo. diff., 14(1973), pp. 1—40.

Reçu le 18.III.1874

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXI, s. I a, 1975

UNSTEADY FLOW OF A SECOND ORDER FLUID BETWEEN TWO POROUS CO-AXIAL CIRCULAR CYLINDERS

BY

MOHAMMED LATIF PASHA

Introduction. Markovitz and Coleman [1] have suggested some practical methods for the determination of the material constants of a Second order fluid. One of those methods makes use of Helical flow. A Helical flow is a combination of two flows, one axial flow through an annulus of two co-axial circular cylinders and the other, a rotational flow due to the rotation of one of the cylinders about their common axis. Several authors have discussed similar flow problems [2—5].

In this paper a generalized Helical flow of a Second order fluid is considered by assuming the cylinders to be porous. Different cases of this problem have been solved. It has been assumed that the rate of suction at one cylinder is equal to the rate of injection at the other cylinder and that the Reynolds number of the flow is small.

Equations of Motion.: The constitutive equation of an incompressible second order fluid as suggested by Coleman and Noll [6] is

$$p_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu_1 A_{(1)ij}+\mu_2 A_{(2)ij}+\mu_3 A_{(1)ik}A_{(1)kj}$$

where

$$A_{(1)ij}=v_{i,j}+v_{j,i}$$

and

$$A_{(2)ij}=a_{i,j}+a_{j,i}+2v_{m,i}v_{m,j},$$

p_{ij} is the stress tensor, v_i and a_i the velocity and acceleration vectors, μ_1, μ_2, μ_3 the material constants, p an undetermined hydro-static pressure and a comma denotes covariant differentiation. Let us consider the cylindrical polar co-ordinates system (r, θ, z) assuming z axis along the common axis and r along the radii of the cylinders. Let an incompressible second order fluid be contained between two porous co-axial circular cylinders of radii a and b $(a<b)$.

Since the rate of suction at one cylinder is equal to the rate of injection at the other, the velocity profile will be independent of θ and z. For the present case the equations of motion and continuity, in cylindrical co-ordinates (r, θ, z), are

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{v^2}{r}\right)=\frac{\partial p_{rr}}{\partial r}+\frac{p_{rr}-p_{\theta\theta}}{r},\quad \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{uv}{r}\right)=\frac{\partial p_{\theta r}}{\partial r}+\frac{2p_{r\theta}}{r},$$

(1)

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}\right)=\frac{\partial p_{zr}}{\partial r}+\frac{p_{zr}}{r},$$

(2)
$$\frac{\partial}{\partial r}(ur)=0.$$

where ρ is the density of the fluid and u, v and w the velocity components along r, θ and z respectively. The equation of continuity (2) suggests that the form of radial velocity should be

(3)
$$u=\frac{H(t)}{r}.$$