Analele ştiinţifice ale Universităţii „AL. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXI, s. I a, 1975

STRUCTURES D'APPROXIMATION, OPÉRATEURS D'ADHÉRENCE GÉNÉRALISÉS ET STRUCTURES SYNTOPOGÈNES

PAR

C. IGNAT

Introduction. Dans cette Note nous nous proposons de présenter la notion de structure d'approximation sur un ensemble, introduite comme un instrument convenable dans l'étude des réalisations numériques des méthodes d'approximation. Généralement dans l'étude des méthodes d'approximation, on suppose que l'espace dans lequel est formulé le problème exact et les espaces utilisés pour la réalisation numérique de l'approximation sont organisés au point de vue algébrique et topologique d'une manière commune et que les opérateurs de projection ou d'extension utilisés jouissent de propriétés de régularité. On peut voir, par exemple, les schémas d'approximation utilisés par H. J. Stetter [7], J. P. Aubin [1], W. V. Petryshin [6] etc.

Dans la réalisation numérique sur un calculateur, il faut tenir compte du caractère fini de l'ensemble des nombres représentés, soit en virgule fixe soit en virgule flottante, simple ou double précision. Soit $\pi : \mathbf{R} \to Q_r$ l'opérateur de représentation machine et la relation d'équivalence

$$x \sim y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y).$$

En tenant compte du caractère monotone de π (qui réalise une projection par arrondi ou troncature), les classes d'équivalence sont des intervalles. Les opérations arithmétiques sur R ne sont pas conservées par l'opérateur π, [4].

On note aussi qu'un mode naturel d'introduire une topologie sur Q_r est celui d'espace facteur dont l'application canonique est π. Compte tenu que pour cette topologie les ensembles ouverts sont en correspondence biunivoque avec les ouverts saturés par rapport à „$\sim$" ([2] pag. 51) il résulte qu'une base pour la topologie sur Q_r est formée par les ensembles de la forme

$$\{0, q_1, q_2, \ldots, q_k\}, \quad \{-q_p, \ldots, -q_1, 0\},$$

où q_j sont des éléments représentables : $\pi(q_j) = q_j$.

Considérons les applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ realisées à l'aide des applications continues $f_m : Q_r \to Q_r$ par le schéma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbf{R} \\ & Q_r \arrow[ur, "f_m"'] & \end{tikzcd}$$

On sait ([2] chap. I, § 3.4, proposition 6) que pour la continuité de f_m il est nécessaire et suffisant que $f = f_m \circ \pi$ soit continue. Supposons que f est continue. Soient $x \in Q_r$ et $V(f_m(x))$

un voisinage de $f_m(x)$ dans R qui contient seulement $f_m(x)$ comme élément représentable. Soit $f_m(x)>0$. Compte tenu de la continuité de $f_m(x)$, il existe $V(x)$, voisinage de x dans Q_r, tel que

$$f_m(V(x)) \subset V(f_m(x))$$

et par suite on a $f_m(0)=f_m(q_i)=f_m(x)$ pour tous les q_i représentables, $q_i \leq x$.

Donc la classe d'applications continues réalisables dans un système de calcul est très limitée.

Si on prend la topologie discrète sur Q_r, évidemment la projection de représentation machine π n'est pas continue. Compte tenu de ces observations nous introduisons dans le paragraphe suivant une structure plus générale pour mesurer le degré d'approximations des éléments dans un ensemble.

§ 1. Espaces à structure d'approximation. Soient X et A deux ensembles et $\mathfrak{R}(A, X)$ la famille des relations binéaires $\alpha \subset A \times X$.

Définition 1.1. *Une relation d'approximation sur X par rapport à A est un sousensemble*

$$\mathcal{A} \subset X \times \mathfrak{R}(A, X) \text{ tel que}$$

$$\forall x \in X \qquad \exists \alpha \in \mathfrak{R}(A, X) : (x, \alpha) \in \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

Un espace à structure d'approximation est un triplet $\{X, \mathcal{A}, A\}$.

Dans ce qui suit nous utiliserons la terminologie suivante :

— la famille

$$\mathcal{A}[x] = \{\alpha \in \mathfrak{R}(A, X) : \quad (x, \alpha) \in \mathcal{A}\}, \quad x \in X, \tag{1.2}$$

est l'approximante de x :

— le sousensemble de X :

$$\mathcal{A}^*[\alpha] = \{x \in X : \quad (x, \alpha) \in \mathcal{A}\} \tag{1.3}$$

est le domaine d'approximation de la relation binaire $\alpha \in \mathfrak{R}(A, X)$.

Soit μ une collection de sousensembles de X. On désigne par

$$[[\mu]] = \{K \subset X : \quad \exists M \in \mu, \ M \subset K\} \tag{1.4}$$

le préfiltre engendré par μ. Pour $\alpha \in \mathfrak{R}(A, X)$ et $a \in A$, on note :

$$r(\alpha, a) = \{z \in X : \quad (a, z) \in \alpha\} \subset X \text{ et} \tag{1.5}$$

$$\pi(\alpha) = [[\{r(\alpha, a) : a \in A\}]]. \tag{1.6}$$

Si $(x, \alpha) \in \mathcal{A}$ l'ensemble

$$S[\alpha] = \{y \in x : (a, y) \in \alpha, \quad a \in A\}$$

est nommé le support d'approximation de x par α : le préfiltre $\pi(\alpha)$ défini dans (1.6) est le support préfiltral d'approximation de x par α. Soit A une classe de modes de représentation machine des nombres réels (en virgule fixe, flottante, simple ou double précision) considérée comme dirigeante de l'approximation. Considérons les relations binaires sur $A \times R$

$$\alpha = \{(a, x) \in A \times \mathrm{R} : \quad \exists x_0 \in \mathrm{R} : a(x_0) = x_0, \quad a(x) = a(x_0)\}. \tag{1.7}$$

La relation d'approximation machine sera

$$\mathcal{A}_m = \{(x, \alpha) : \text{définie dans (1.7) et } \forall a \in A, x \in r(\alpha, a)\}.$$

Définition 1.2. *Si $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont deux relations d'approximation sur X par rapport à A et B respectivement, alors on dit que la relation $\mathcal{A}$ est plus fine que $\mathfrak{B}$ si*

$$\forall x \in X \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}[x] \quad \exists \beta \in \mathfrak{B}[x] : \quad \pi(\beta) \subset \pi(\alpha). \tag{1.8}$$

Soient $\{X, \mathcal{A}, A\}$, $\{Y, \mathfrak{B}, B\}$ deux espaces à structure d'approximation et $g : X \to Y$ une application de X dans Y. Pour $\alpha \in \mathfrak{R}(A, X)$ notons

$$\alpha_g = \{(a, z) \in A \times Y : z = g(a) \ (a, a) \in \alpha\} \in \mathfrak{R}(A, Y). \tag{1.9}$$

Définition 1.3. *L'application $g : X \to Y$ est $(\mathcal{A}, \mathfrak{B})$ approximante si*

$$\forall x \in X \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}[x] \ \exists \beta \in \mathfrak{B}[g(x)] \ \pi(\beta) \subset \pi(\alpha_g). \tag{1.10}$$

Structure d'approximation initiale. Soient X un ensemble nonvide, $\{Y_i, \mathfrak{B}_i, B_i\}$ $i \in I$ une famille d'espaces à structure d'approximation et $\{f_i \ f_i : X \to Y_i\}(i \in I)$ une famille d'applications de X dans Y_i, $i \in I$.

Pour $i \in I$ et $x \in X$ considérons la famille de relations binaires de $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}_i, X)$

$$\tilde{\mathcal{B}}_i[x] = \{\beta_i^{-1} = \{(b_i, a) : b_i \in B_i, \ a \in X \ \exists y_i \in Y_i \ y_i = f_i(a)$$
$$(b_i, y_i) \in \beta_i\} : \ \beta_i \in \mathfrak{B}_i[f_i(x)]\}.$$

Soit $A = \bigcup_{i \in I} B_i \times \{i\}$.

Proposition 1.1. *La relation d'approximation $\mathcal{A}$ sur X par rapport à A définie par*

$$\mathcal{A}[x] = \{\alpha \in \mathfrak{R}(A, X) : \alpha = \bigoplus_{i \in I} \beta_i^{-1} : \ \beta_i^{-1} \in \tilde{\mathfrak{B}}_i[x]\} \tag{1.11}$$

appartient à la classe des moins fines relations d'approximation sur X telles que toutes les applications f_i soient $(\mathcal{A}, \mathfrak{B}_i)$-approximantes.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathcal{A}[x]$ quelconque et $i_0 \in I$ fixé. Compte tenu de (1.11) on a un $\beta_{i_0}^{-1} \in \tilde{\mathfrak{B}}_{i_0}[x]$ appartenant à la somme directe α. Comme $(\beta_{i_0}^{-1})_{f_{i_0}} = \beta_{i_0}$ et $\pi(\alpha_{f_{i_0}}) = \bigcup \pi[(\beta_i^{-1})_{f_{i_0}}]$ il résulte $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}[x] \ \exists \beta_{i_0} \in \mathfrak{B}_{i_0}[f_{i_0}(x)] : \ \pi(\beta_{i_0}) \subset \pi(\alpha_{f_{i_0}})$, c'est-à-dire toute f_i est $(\mathcal{A}, \mathfrak{B}_i)$-approximante.

Soit $\mathcal{C}$ une relation d'approximation sur X pour laquelle toutes les applications sont $(\mathcal{C}, \mathfrak{B}_i)$ approximantes, c'est-à-dire

$$\forall i \in I, \quad \forall x \in X, \quad \forall \gamma \in \mathcal{C}[x] \quad \exists \beta_i \in \mathfrak{B}_i[f_i(x)] : \ \pi(\beta_i) \subset \pi(\gamma_{f_i})$$

et par suite on a une famille $\{\beta_i\}_{i \in I}$ telle que $\bigcup \pi(\beta_i^{-1}) \subset \pi(\gamma)$. Pour $\alpha = \bigoplus_i \beta_i^{-1}$ nous avons $\pi(\alpha) \subset \pi(\gamma)$, donc la relation d'approximation $\mathcal{A}$ définie par (1.11) est moins fine que $\mathcal{C}$.

La structure d'approximation $\{X, \mathcal{A}, A\}$ définie par (1.11) est la structure d'approximation initiale sur X engendrée par les familles $\{Y_i, \mathfrak{B}_i, B_i\}_{i \in I}$, $\{f_i\}_{i \in I}$.

Limites projectives d'espaces à structure d'approximation. Soit $\{\{Y_i, \mathfrak{B}_i, B_i\}, f_{ij}\}_{i,j \in I}$ (I-ensemble préordonné) une famille projective d'espaces à structure d'approximation. Soit X la limite projective de la famille $\{Y_i, f_{ij}\}$ c'est-à-dire l'ensemble $X \subset \Pi Y_i$ dont les éléments jouissent de la propriété

$$\forall x \in X : \ \mathrm{pr}_i(x) = f_{ij}(\mathrm{pr}_j(x)) \quad \forall i, j \ i \leq j.$$

Nous supposons que X est non-vide (voir [2], pag. 190—195). Compte tenu de la proposition 1.1 la structure d'approximation limite projective sur X dont toutes les projections

canoniques $f_i : X \to Y_i$ sont $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_i)$-approximantes a pour dirigeante $A = \bigcup B_i \times \{i\}$ et pour $x \in X$

(1.12) $$\mathcal{A}[x] = \{\alpha \in \mathfrak{R}(A, \Pi Y_i) :$$

$$((b_{ik}, i), z) \in \alpha \Leftrightarrow$$

$$\forall i_k, \quad b_{ik} \in B_i \ (b_{ik}, \mathrm{pr}_i(z)) \in \beta_i \in \mathcal{B}_i[\mathrm{pr}_i(x)]$$

$$\mathrm{pr}_i(z) = f_{ij}(\mathrm{pr}_j(z)), \ i \leqslant j \}.$$

Dans les paragraphes suivants nous présentons quelques structures d'approximation particulières en liaison avec certaines structures topologiques généralisées.

§ 2. **Opérateurs d'adhérence généralisés.** Nous appelerons opérateur d'adhérence généralisé (OAG) une application $\mathcal{J} : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$, $\mathfrak{P}(X)$ étant la famille des sousensembles de X. Remarquons d'abord qu'à chaque relation d'approximation $\mathcal{A}$ sur X on peut associer un opérateur d'adhérence généralisé défini par

(2.1) $$\mathcal{J}_{\mathcal{A}}(M) = \{ y \in X : (y, \alpha) \in \mathcal{A} \ S(\alpha) = M \} \ M \subset X.$$

Réciproquement, si on donne $\mathcal{J} : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ il y a une famillle de relations d'approximation sur X qui engendre $\mathcal{J}$ par (2.1). Retenons de cette famille celles dont A est uniponctuel. Pour cette classe de relations d'approximation on peut établir une correspondence biunivoque entre $\mathfrak{R}(A, X)$ $(A = \{a\})$ et $\mathfrak{P}(X)$. Nous identifierons $\alpha \in \mathfrak{R}(\{a\}, X)$ avec $S(\alpha) \subset \subset X$ et alors la relation d'approximation $\mathcal{A}$ sur X, avec A uniponctuel, attachée à $\mathcal{J}$ est définie par

(2.2) $$\mathcal{A}_{\mathcal{J}} = \{ (x, \alpha) \quad x \in \mathcal{J}(S(\alpha)) \}.$$

Une classe particulière d'opérateurs d'adhérence généralisés est formée par les opérateur d'adhérence de Hammer [5] qui sont des opérateurs expansifs, c'est-à-dire : a) monotone $(M \subset N \Rightarrow \mathcal{J}(M) \subset \mathcal{J}(N))$ et b) amplificateurs $(\forall M \subset X : M \subset \mathcal{J}(M))$.

Une relation d'approximation sur X engendre par (2.1) une OAG monotone si

(SAM) $$S(\alpha) \subset S(\beta) \Rightarrow \mathcal{A}^*[\alpha] \subset \mathcal{A}^*[\beta], \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{R}(A, X);$$

cette relation sera nommée *axiome de monotonie* pour la structure d'approximation sur X

L'OAG $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ engendré par $\mathcal{A}$ est amplificateur si

(SAA) $$x \in S(\alpha) \Rightarrow (x, \alpha) \in \mathcal{A}, \quad x \in X, \ \alpha \in \mathfrak{R}(A, X).$$

Cette relation sera désignée par *axiome d'amplification*. Une famille particulière d'adhérences Hammer est celle des adhérences topologiques qui satisfont encore aux conditions :

c) $\mathcal{J}(B \cup C) \subset \mathcal{J}(B) \cup \mathcal{J}(C)$ (sous-additivité) ; d) $\mathcal{J}(\varnothing) = \varnothing$; e) $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}$.

Pour les structures d'approximation qui engendrent les adhérences topologiques, on aura les trois relations suivantes :

(SASADD) $$\mathcal{A}^*[\alpha \cup \beta] \subset \mathcal{A}^*[\alpha] \cup \mathcal{A}^*[\beta]$$

(que nous appelerons *axiome de sous-additivité*, où $\alpha \cup \beta$ est prise dans le sens de la réunion de sousensensembles de $A \times X$) ;

(SAC) $$(x, \alpha) \in \mathcal{A} \Rightarrow \alpha \neq \varnothing,$$

(*axiome de consistence de l'approximation*) ;

(SAI) $$\mathcal{A}^*[\alpha] = \mathcal{A}^*[\tilde{\mathcal{A}}[\alpha]], \qquad \alpha \in \mathfrak{R}(A, x),$$

où

(2.3) $$\tilde{\mathcal{A}}[\alpha] = A \times \mathcal{A}^*[\alpha],$$

(*axiome d'idempotence de la structure d'approximation*).

Proposition 2.1. *Les axiomes (SAM), (SAA), (SASADD) (SAC) et (SAI) sont indépendants si X a au moins trois éléments.*

Démonstration. Soit $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $A = \{a\}$. Soient $a_i = (a, x)$ $i = 1, 2, 3$ les éléments de $A \times X$ et

$$\alpha_0 = \varnothing ; \quad \alpha_i = \{ a_i \} \quad (i = 1, 2, 3) ; \quad \alpha_{ij} = \{ a_i, a_j \} \ (i, j = 1, 2, 3, i \neq j) ; \ \alpha_{123} = \{ a_1, a_2, a_3 \}$$

les éléments de $\mathfrak{R}(A, X)$.

1. Considérons la structure d'approximation $\mathcal{A}_\infty = X \times \mathfrak{R}(A, X)$ qui est monotone, amplificatrice, sous-additive et idempotente. Mais cette structure n'est pas consistente puisque $(x_i, \alpha_0) \in \mathcal{A}_\infty$, $\forall i$.

2. $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_\infty / \{ (x_1, \alpha_0), (x_2, \alpha_0), \ (x_3, \alpha_0) \}$ est une relation consistente.

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 / \{ (x_1, \alpha_2), (x_1, \alpha_3), (x_2, \alpha_3), (x_3, \alpha_2), (x_1, \alpha_3), \ (x_2, \alpha_{13}), (x_3, \alpha_{12}) \}$$

est une relation amplificatrice, sous-additive, consistente, idempotente. Elle n'est pas monotone puisque $S[\alpha_1] = \{ x_1 \} \subset S[\alpha_{12}] = \{x_1, x_2 \}$, mais

$$\mathcal{A}_2^*[\alpha_{12}] = \{ x_1, x_2 \} \text{ et } \mathcal{A}_2^*[\alpha_1] = X.$$

3. Soit

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 / \{ (x_1, \alpha_1), (x_1, \alpha_2), (x_1, \alpha_3), (x_1, \alpha_{23}), (x_1, \alpha_{12}), (x_1, \alpha_{13}) \ (x_1, \alpha_{123}) \}.$$

On vérifie facilement les axiomes (SAM), (SASADD), (SAC) et (SAI). Cette relation n'est pas amplificatrice parce que

$$x_1 \in S[\alpha_1] \text{ mais } x_1 \notin \mathcal{A}_3^*[\alpha_1] = \{ x_2, x_3 \}.$$

4. Soit

$$\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_1 / \{ (x_1, \alpha_2), (x_1, \alpha_3), (x_2, \alpha_1), (x_2, \alpha_3), (x_3, \alpha_1), (x_3, \alpha_2), (x_2, \alpha_{13}), (x_1, \alpha_{23}) \}.$$

On a (SAM), (SAA), (SAC) (SAI).

Considérons les relations α_1, α_2 et α_{12} pour lesquelles nous avons $\alpha_{12} = \alpha_1 \cup \alpha_2$ et $\mathcal{A}_4^*[\alpha_{12}] = X$, $\mathcal{A}_4^*[\alpha_1] = \{ x_1 \}$, $\mathcal{A}_4^*(\alpha_2] = \{x_2 \}$, donc $\mathcal{A}_4$ n'est pas sous-additive.

5. La relation d'approximation $\mathcal{A}_5 = \mathcal{A}_1 / \{ (x_1, \alpha_2)$ est monotone, sous-additive, amplificatrice et consistente mais, compte tenu de

$$\mathcal{A}_5^*[\alpha_2] = \{ x_2, x_3 \}, \ \tilde{\mathcal{A}}_5[\alpha_2] = \alpha_{23}, \ \mathcal{A}_5^*[\alpha_{23}] = X.$$

il suit que $\mathcal{A}_5$ n'est pas idempotente.

Proposition 2.2. *Si $X = \{ x_1, x_2 \}$ et A est un ensemble non vide quelconque, toute relation d'approximation sur X monotone, amplificatrice et consistente est idempotente et sous-additive.*

Démonstration. Considérons la décomposition de

$$\mathfrak{R}(A, X) = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_{12},$$

où

$$C_0 = \{ \varnothing \} ; \qquad Ci = \{ \alpha \in A \times X : S(\alpha) = \{x_i \} \} \quad (i = 1, 2) ;$$

$$C_{12} = \{ \alpha \in A \times X : S(\alpha) = X \}.$$

Soit $\mathcal{A}$ une relation d'approximation sur X monotone, consistente et amplificatrice. Notons, pour $k = 1, 2, (12)$

$$C_k^0 = \{ \alpha \in C_k : \mathcal{A}^*[\alpha] = \emptyset \},$$

$$C_k^i = \{ \alpha \in C_k : \mathcal{A}^*[\alpha] = \{ x_i \} \} \quad (i = 1, 2),$$

$$C_k^{12} = \{ \alpha \in C_k : \mathcal{A}^*[\alpha] = X \}.$$

Compte tenu de la condition de consistence $a(\emptyset) = \emptyset$ et de la condition d'amplification, on a

$$C_1^2 = C_2^1 = C_{12}^1 = C_{12}^2 = \emptyset. \tag{2.4}$$

Si on impose la condition de monotonie, les seules relations d'approximation pour lesquelles (2.4) a lieu sont :

$$\mathcal{A}_1 : C_1^{12} = C_2^2 = \emptyset, \qquad \mathcal{A}_2 : C_1^1 = C_2^{12} = \emptyset,$$

$$\mathcal{A}_3 : C_1^1 = C_2^2 = \emptyset, \qquad \mathcal{A}_4 : C_1^{12} = C_2^{12} = \emptyset.$$

Notons

$$\rho(\mathcal{A}_i) = \{ \alpha \in \mathfrak{R}(A, X) : \exists x \in X, \ (x, \alpha) \in \mathcal{A}_i \}.$$

On a

$$\rho(\mathcal{A}_1) = C_0 \cup C_1^1 \cup C_2^{12} \cup C_{12}^{12},$$

$$\rho(\mathcal{A}_2) = C_0 \cup C_1^{12} \cup C_2^2 \cup C_{12}^{12},$$

et

$$\mathcal{A}_i^*[\alpha] = \begin{cases} \emptyset & \alpha = \emptyset, \\ \{ x_i \} & \alpha \in C_i^i, \\ X & \alpha \neq \emptyset, \quad \alpha \notin C_i^i, \end{cases} \qquad \tilde{\mathcal{A}}_i[\alpha] \in \begin{cases} C_0 & \alpha = \emptyset, \\ C_i^i & \alpha \in C_i^i, \\ C_{12}^{12} & \alpha \neq \emptyset, \quad \alpha \notin C_i^i, \end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in \rho(\mathcal{A}_i) \ \ \mathcal{A}_i^*[\alpha] = \mathcal{A}_i^*[\tilde{\mathcal{A}}_i[\alpha]]. \qquad (i = 1, 2)$$

donc $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont idempotentes.

Pour les relations $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$ on a la decomposition

$$\rho(\mathcal{A}_3) = C_0 \cup C_1^{12} \cup C_2^{12} \cup C_{12}^{12},$$

$$\rho(\mathcal{A}_4) = C_0 \cup C_1^1 \cup C_2^2 \cup C_{12}^{12}$$

et

$$\mathcal{A}_3^*[\alpha] = \begin{cases} \emptyset & \alpha = \emptyset, \\ X & \alpha \neq \emptyset, \end{cases} \qquad \tilde{\mathcal{A}}_3[\alpha] \in \begin{cases} C_0 & \alpha = \emptyset, \\ C_{12}^{12} & \alpha \neq \emptyset, \end{cases}$$

donc

$$\mathcal{A}_3^*[\alpha] = \mathcal{A}_3^*[\tilde{\mathcal{A}}_3[\alpha]]. \qquad \forall \alpha \in \rho(\mathcal{A}_3)$$

et

$$\mathcal{A}_4^*[\alpha] = \begin{cases} \emptyset & \alpha = \emptyset, \\ \{ x_i \} & \alpha \in C_i^i \\ X & \alpha \in C_{12}^{12} \end{cases} \qquad \tilde{\mathcal{A}}_4[\alpha] \in \begin{cases} C_0 & \alpha = \emptyset, \\ C_i^i & \alpha \in C_i^i \\ C_{12}^{12} & \alpha \in C_{12}^{12} \end{cases} \quad i = 1, 2$$

donc

$$\mathcal{A}_4^*[\alpha] = \mathcal{A}_4^*[\tilde{\mathcal{A}}_4[\alpha]] \ \ \forall \alpha \in \rho(\mathcal{A}_4).$$

Par conséquent toutes les relations $\mathcal{A}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sont idempotentes.

La sous-additivité des relations $\mathcal{A}_i$ résulte immédiatement en observant que : i) les familles sont fermées par rapport à la réunion des sous-ensembles de $A \times X$; ii) $\alpha \in C_1$ et $\beta \in C_2 \Rightarrow \alpha \cup \beta \in C_{12}$; iii) $\forall i \in \{ 1, 2, 3, 4 \}$ $\alpha \in C_1$, $\beta \in C_2 \rightarrow \mathcal{A}_i^*[\alpha] \cup \mathcal{A}_i^*[\beta] = X$.

Compte tenu de ces deux propositions on a le résultat principal du paragraphe formulé dans la

Proposition 2.3. *Les relations (2.1) et (2.2) réalisent une correspondence biunivoque entre la famille des OAG et la famille des relations d'approximation uniponctuellement dirigées sur X. Les opérateurs d'adhérence Hammer sont en correspondence biunivoque par (2.1) et (2.2) avec les relations d'approximation monotones (SAM) et amplificatrices (SAA) sur les ensembles X qui contiennent au moins deux éléments. Les opérateurs d'adhérence topologique* (K u r a t o w s k i) *sont en correspondence biunivoque avec les relations d'approximations monotones, amplificatrices, consistentes, idempotentes et sous-additives uniponctuellement dirigées sur les ensembles X qui contiennent au moins trois éléments.*

§ 3. Structures syntopogènes engendrées par des relations d'approximation. Une généralisation des structures topologiques appartient à C s a s z a r [3] qui a introduit les structures syntopogènes. Nous nous proposons d'établir les conditions afin qu'une structure d'approximation engendre une structure syntopogène.

Définition 3.1. *Soit X un ensemble non vide quelconque. Un ordre semitopogène sur X est un sousensemble*

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X)$$

tel que

$$(\emptyset, \emptyset) \in \mathfrak{S}, \qquad (X, X) \in \mathfrak{S}; \tag{3.1}$$

$$\mathfrak{S} \subset \Sigma = \{ (A, B) : A \subset B \subset X \}; \tag{3.2}$$

$$\Sigma \circ \mathfrak{S} \circ \Sigma \subset \mathfrak{S}. \tag{3.3}$$

On note que (3.3) veut dire :

$$(A_1 \subset A_2) \wedge ((A_2, B_2) \in \mathfrak{S}) \wedge (B_2 \subset B_1) \Rightarrow (A_1, B_1) \in \mathfrak{S}.$$

Notons par $\Pi(X)$ la famille de préfiltres sur X.

Définition 3.2. *Une application semitopogène sur X est une application* $\sigma : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \Pi(X)$ *telle que*

$$\sigma(\emptyset) = \mathfrak{P}(X), \quad \sigma(X) \neq \emptyset; \tag{3.4}$$

$$\sigma(A) \subset [[A]]; \tag{3.5}$$

$$A_1 \subset A_2 \rightarrow \sigma(A_2) \subset \sigma(A_1). \tag{3.6}$$

Proposition 3.1. *Les relations*

$$\sigma(A) = \{ B \subset X \quad (A, B) \in \mathfrak{S} \}, \quad A \subset X, \tag{3.7}$$

$$\mathfrak{S} = \{ (A, B) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) : \quad B \in \sigma(A) \} \tag{3.8}$$

établissent une correspondence biunivoque entre les ordres semitopogènes et les applications semitopogènes sur l'ensemble X.

Définition 3.3. *Un ordre semitopogène sur X est topogène si*

$$((A, B) \in \mathfrak{S}) \wedge ((A', B') \in \mathfrak{S}) \Rightarrow ((A \cap A', B \cap B') \in \mathfrak{S}) \wedge ((A \cup A', B \cup B') \in \mathfrak{S}). \tag{3.9}$$

Proposition 3.2. *Une application semitopogène sur X définit par (3.8) un ordre topogène sur X si*

(3.10) $$\forall A \subset X: \ \sigma(A) \in \mathcal{F}(X) \cup \{\mathcal{P}(X)\}.$$

(3.11) $$\forall A, A' \subset X: \ \sigma(A) \cap \sigma(A') \subset \sigma(A \cup A'),$$

($\mathcal{F}(X)$ est la famille des filtres propres sur X).

Démonstration. Soient $(A, B) \in \mathfrak{S}$, $(A', B') \in \mathfrak{S}$, c'est-à-dire $B \in \sigma(A)$, $B' \in \sigma(A')$. Compte tenu de (3.6) on a $\sigma(A) \subset \sigma(A \cap A')$ et $\sigma(A') \subset \sigma(A \cap A')$ et on a par (3.10) $B \cap B' \in \sigma(A \cap A')$ c'est-à-dire $((A \cap A'), (B \cap B')) \in \mathfrak{S}$. Comme $\sigma(A)$ et $\sigma(A')$ sont des filtres, on a $B \cup B' \in \sigma(A)$, $B \cup B' \in \sigma(A')$. On a par (3.11) $B \cup B' \in \sigma(A) \cap \sigma(A') \subset \sigma(A \cup A')$ donc $(A \cup A'), (B \cup B') \in \mathfrak{S}$.

Définition 3.4. *Une application semitopogène σ pour laquelle* (3.10), (3.11) *ont lieu s'appelle application topogène sur X.*

Remarque. On a une correspondence biunivoque entre la famille des ordres topogènes et la famille d'application topogènes établie par (3.7)—(3.8).

Définition 3.5. [3]. *Une structure syntopogène sur X est une famille $\mathcal{S} = \{\mathfrak{S}_i : i \in I\}$ d'ordres topogènes sur X telle que :*

(3.12) $$\forall \mathfrak{S}_i, \mathfrak{S}_j \in \mathcal{S} \ \exists \ \mathfrak{S}_k \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathfrak{S}_i \subset \mathfrak{S}_k, \ \mathfrak{S}_j \subset \mathfrak{S}_k;$$

(3.13) $$\forall \mathfrak{S} \in \mathcal{S} \ \exists \ \mathfrak{S}' \in \mathcal{S} \ \mathfrak{S}\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}' \circ \mathfrak{S}'.$$

Soit $\mathcal{A}$ une relation d'approximation sur X par rapport à A. Notons par

$$\mathcal{A}[M] = \{\alpha \in \mathfrak{R}(A, X) : \alpha \in \mathcal{A}[x] \ \ \forall x \in M\} \quad M \subset X$$

et considérons la famille d'applications

$$\sigma_a : \mathfrak{P}(X) \to \Pi(X) \quad a \in A,$$

définies par

(3.14) $$\sigma_a(M) = [\{\{r(\alpha, a) : \ \alpha \in \mathcal{A}[M]\} \quad M \subset X, \ a \in A\}].$$

Proposition 3.3. *Soit $\mathcal{A}$ une relation d'approximation sur X telle que*

(3.15) $$\forall M \subset X \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}[M] \quad \forall a \in A: \quad M \subset r(\alpha, a)$$

(3.16) $$\mathcal{A}[X] \neq \emptyset.$$

Alors les applications σ_a définies par (3.14) sont semitopogènes sur X.

Démonstration. La relation binaire vide de $A \times X$ n'a pas d'éléments approximés. En effet, si nous avons $N \neq \emptyset$ tel que $\emptyset \in \mathcal{A}[N]$ alors par (3.15) il résulte $N \subset r(\emptyset, a) = \emptyset \ \forall a \in A$. Donc $\mathfrak{P}(X) = [[\emptyset]] \subset \sigma_a(\emptyset) \ \forall a \in A$, c'est-à-dire la première partie de la condition (3.4). Compte tenu de (3.16) on a $\sigma_a(X) \neq \emptyset$ et par (3.15) il résulte que $\sigma_a(X) = \{X\} \ \forall a \in A$.

Soit $M \subset N$ et $K \in \sigma_a(N)$, donc on a $\alpha \in \mathcal{A}[N]$ tel que $r(\alpha, a) \subset K$. Mais si $\alpha \in \mathcal{A}[N]$ on a $\alpha \in \mathcal{A}[M]$ et par suite $K \in \sigma_a(M)$ donc $\sigma_a(N) \subset \sigma_a(M) \ \forall a \in A$, c'est-à-dire (3.6). La condition (3.5) résulte immédiatement par (3.15).

Proposition 3.4. *Les applications σ_a définies par (3.14) sont topogènes si on a (3.15), (3.16) et :*

(3.17) $$\begin{cases} \forall a \in A \ \ \forall M \subset X, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}[M] \ \exists \ \alpha_a \in \mathcal{A}[M]: \\ \qquad r(\alpha_a, a) \subset r(\alpha_1, a) \cap r(\alpha_2, a), \end{cases}$$

(3.18) $$\begin{cases} \forall a \in A \quad \forall M_1 \subset X \quad \forall \alpha_1 \in \mathcal{A}[M_1], \quad \forall M_2 \subset X, \quad \forall \alpha_2 \in \mathcal{A}[M_2] \\ \qquad \exists \alpha_a \in \mathcal{A}[M_1 \cup M_2]: \quad r(\alpha_a, a) \subset (\alpha_1, a) \cup r(\alpha_2, a). \end{cases}$$

Démonstration. Par (3.17) il résulte que $\{r(\alpha, a) : a \in \mathcal{A}[M]\}$ est une base de filtre sur X, donc $\sigma_a(M) \in \mathcal{F}(X) \ \forall a \in A, \ \forall M \neq \emptyset$, et pour $M = \emptyset$ nous avons $\sigma_a(\emptyset) = \mathfrak{P}(X)$. (3.11) résulte de (3.18).

Proposition 3.5. *Soit $\mathcal{A}$ une relation d'approximation sur X pour laquelle on a* (3.15), (3.16), (3.17), (3.18) et

(3.19) $$\begin{cases} \forall a_1, a_2 \in A, \ \exists a_0 \in A, \ \forall M \subset X, \ \forall \alpha_1 \in \mathcal{A}[M], \forall \alpha_2 \in \mathcal{A}[M], \\ \exists \alpha_0 \in \mathcal{A}[M]: \\ (r(\alpha_0, a_0) \subset r(\alpha_1, a_1)) \vee (r(\alpha_0, a_0) \subset r(\alpha_2, a_2)); \end{cases}$$

(3.20) $$\begin{cases} \forall a \in A \ \ \exists a' \in A \ \ \forall M \subset X \ \ \forall \alpha \in \mathcal{A}[M] \ \exists \alpha' \in \mathcal{A}[M] \\ \exists \ \alpha'' \in \mathcal{A}[r(\alpha', a')] : r(\alpha'', a') \subset r(\alpha, a). \end{cases}$$

Alors la famille d'applications $\{\sigma_a : a \in A\}$ définies par (3.14) engendre par (3.8) une structure syntopogène sur X.

Démonstration. Compte tenu de la proposition 3.4 et de la remarque 1, les ordres $\mathfrak{S}_a$ définis par (3.8) sont topogènes. Nous montrerons que les conditions (3.12) et (3.13) sont vérifiées.

Soient $\mathfrak{S}_{a_1}$, et $\mathfrak{S}_{a_2}$ deux ordres topogènes engendrés par σ_{a_1}, et σ_{a_2}.

$$(M, N) \in \mathfrak{S}_{a_1} \cup \mathfrak{S}_{a_2} \Leftrightarrow N \in \sigma_{a_1}(M) \cup \sigma_{a_2}(M) \Leftrightarrow$$

$$(r(\alpha_1, a_1) \subset N : \alpha_1 \in \mathcal{A}[M]) \vee (r(\alpha_2, a_2) \subset N : \alpha_2 \in \mathcal{A}[M])$$

et compte tenu de (3.19) $\exists a_0 \in A \ \exists \alpha_0 \in \mathcal{A}[M]$:

$$r(\alpha_0, a_0) \subset N \text{ donc } N \in \sigma_{a_0}(M) \text{ c-est-à-dire } (M, N) \in \mathfrak{S}_{a_0}.$$

Soit un ordre topogène $\mathfrak{S}_a$ engendré par σ_a, $a \in A$ et $(M, N) \in \mathfrak{S}_a \Leftrightarrow N \in \sigma_a(M) \Leftrightarrow r(\alpha, a) \subset \subset N \ \alpha \in \mathcal{A}[M]$. Compte tenu de (3.20) on a $a' \in A$ et les relations binaires $\alpha \in \mathcal{A}[M]$, $\alpha'' \in \mathcal{A}[r(\alpha', a')]$ telles que $r(\alpha'', a') \subset r(\alpha, a)$. Soit $D = r(\alpha', a')$. On a $r(\alpha, a) \in \sigma_{a'}(D)$ c'est-à-dire $N \subset \sigma_{a'}(D)$ et $D \in \sigma_{a'}(M) \Leftrightarrow (M, D) \in \mathfrak{S}_{a'}$, $(D, N) \in \mathfrak{S}_{a'}$ donc $(M, N) \subset \mathfrak{S}_{a'} \circ \mathfrak{S}_{a'}$.

Soit maintenant $\mathcal{S} = \{\mathfrak{S}_i i \in I\}$ une structure syntopogène sur X et $\{\sigma_i : i \in I\}$ la famille des applications topogènes définies par (3.7).

Considérons la structure d'approximation sur X définie par

(3.21) $$\forall \alpha \in \mathfrak{R}(I, X); \ \forall i \in I, \ r(\alpha, i) \in \sigma_i(M) \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}[M] : M \neq \emptyset.$$

Proposition 3.6. *La structure d'approximation $\{X, \mathcal{A}_{\mathcal{S}}, I\}$ définie par (3.21) à l'aide d'une structure syntopogène $\mathcal{S}$ vérifie les conditions (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20) avec $A = I$.* La démonstration est immédiate.

Proposition 3.7. *Soit $\mathcal{S}$ une structure syntopogène sur X, $\{X, \mathcal{A}_{\mathcal{S}}, I\}$ la structure d'approximation construite par (3.21) et $\mathcal{S}'$ la structure syntopogène construite par (3.8) (3.14) pour $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. Alors $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.*

Démonstration. Compte tenu de la proposition 3.6 la structure $\{X, \mathcal{A}_{\mathcal{S}}, I\}$ vérifie les conditions de la proposition 3.5 donc la collection $\{\mathfrak{S}'_i : i \in I\}$ obtenue par (3.8) — (3.14) est une structure syntopogène sur X.

Soit $i_0 \in I$ fixé et $(M, N) \in \mathfrak{S}_{i_0}$ où $N \subset \sigma_{i_0}(M)$. On a par (3.21) une $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}[M]$ telle que $N = r(\alpha, i_0)$ et par (3.14) $N \in \sigma'_{i_0}$ donc $(M, N) \in \mathfrak{S}'_{i_0}$.

Si $(M', N') \in \mathfrak{S}'_j$, alors $N' \in \sigma'_j(M')$, c'est-à-dire $\exists \alpha \in \mathfrak{cl}_{\mathfrak{S}}(M')$ telle que $r(\alpha, j) \subset N'$ et par (3.21), compte tenu de la propriété préfiltrale de $\sigma_j(M')$, il résulte $N' \subset \sigma_j(M')$ où $(M', N') \in \mathfrak{S}_j$ Donc $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}'_i \; \forall i \in I$.

On peut démontrer aisément que dans la famille des relations d'approximation engendrant par (3.8) – (3.14) une structure syntopogène $\mathfrak{S}$ sur X la structure $\mathfrak{cl}_{\mathfrak{S}}$ constante par (3.21) est la moins fine.

BIBLIOGRAPHIE

1. Aubin J. P. — *Approximation of elliptic boundary-value problems*, Wiley-Interscience, New York, 1972.
2. Bourbaki, N. — *Topologie générale, Structures topologiques*, Troisième édition, Hermann-Paris, S. a.
   b. *Théorie des ensembles*, Deuxième édition, Hermann-Paris, 1960.
3. Csaszar, A. — *Fondements de la topologie générale*, Budapest, Akadémiai Kiado, 1960.
4. Forsythe, G. E. — *Pitffalls in computation, or why a math book isn't enough*. Amer, Math. Monthly, 77 (1970), p. 931–955.
5. Hammer, P. C. — *Extended topologic-Set valued set-functions. Nieuw Archief voor Wiskunde*, X(3), 1962, p. 55–77.
6. Petryshyn, W. N. — *On the approximation-solvability of non-linear equations*. Math. Ann. 177, (1968), p. 156–164.
7. Stetter, H. J. — *Analysis of discretization methods for ordinary differential equations*, Springer Verlag, Berlin 1973.

Reçue 15.X.1874

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
Roumanie

STRUCTURI DE APROXIMARE, OPERATORI DE ÎNCHIDERE GENERALIZAȚI ȘI STRUCTURI SINTOPOGENE

Rezumat

În această Notă se introduce noțiunea de structură de aproximare pe o mulțime X, în raport cu dirijanta A, ca o submulțime a produsului cartezian $X \times \mathfrak{R}(A, X)$, în care $\mathfrak{R}(A, X)$ este mulțimea tuturor $\alpha \subset A \times X$.

În primul paragraf sînt studiate structurile inițiale și limitele proiective de spații cu structură de aproximare.

În al doilea paragraf se stabilește, prin propoziția 2.3, legătura dintre structurile de aproximare unipunctual dirijate și operatorii de închidere generalizați.

Se stabilesc, de asemenea, în ultimul paragraf, legăturile între structurile de aproximare și cele sintopogene.

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XXI, s. I a, 1975

OPERATORS AND FUNCTIONALS ON BANACH SPACES THAT ARE TOPOLOGICALLY INVARIANT UNDER THE ACTION OF A σ-COMPACT UNIMODULAR AMENABLE GROUP

BY

JEAN-PAUL PIER

§ 1. **Topologically invariant operators.** Let X be a locally compact space endowed with a bounded positive measure λ and let $E(X)$ be a complex Banach subspace either of the space $\mathcal{C}(X)$ of bounded complex continuous functions defined on X or of $L^p(X) = L^p(X, \lambda)$; $1 \leq p \leq \infty$. Suppose further that, if $f \in E(X)$, then $\bar{f} \in E(X)$ and $|f| \in E(X)$. By $K(E(X), E(X))$ will be denoted the convex set of all positive linear (continuous) operators on $E(X)$ such hat $|||T||| \leq 1$. In case $E(X)$ contains the constant functions, assume that $T(1_X) = 1_X$; hence $|||T||| = 1$. In the same manner, $K(E(X))$ will be the convex set of all positive linear (continuous) functionals L on $E(X)$ such that $|||L||| \leq 1$. In case $E(X)$ contains the constant functions, assume again that L is normalized; hence $K(E(X))$ will then be the set of all the means on $E(X)$.

Definition 1.1. *A topological group G is said to act on X with respect to $E(X)$ if there exists a measurable mapping $(x, \xi) \to x\xi$ from $G \times X$ to X such that, if $A_x f(\xi) = f(x\xi)$ for $f \in E(X)$ $x \in G$, $\xi \in X$, then*

(i) *for every $x \in G$, $f \to A_x f$ belongs to $K(E(X), E(X))$,*

(ii) *for every $f \in E(X)$ and all $x, x' \in G$, $A_{x'}(A_x f) = A_{xx'} f$,*

(iii) *λ is invariant by the action of G i. e. for every $f \in E(X)$ and every $x \in G$, $\lambda(A_x f) = \lambda(f)$.*

In the sequel, G will always be a *locally compact group* with Haar measure denoted by μ or dx; $L^+(G) = \{\varphi \in L^1(G) : \varphi \geq 0, \int_G \varphi(x) dx = 1\}$.

The following lemmas can be readily proved:

Lemma 1.2. *Let G act on X with respect to $E(X)$. If $f \in E(X)$, $\varphi \in L^1(G)$, then $\int_G \varphi(x) f(x\xi) dx$ exists for almost all $\xi \in X$. Put $\varphi * f(\xi) = \int_G \varphi(x) f(x\xi) dx$ for almost all $\xi \in X$. If $f \in L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, one has $\varphi * f \in L^p(X)$ and $\|\varphi * f\|_{X,p} \leq \|\varphi\|_{G,1} \|f\|_{X,p}$.*

Lemma 1.3. *If, for some $f \in L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, one has $A_x f = f$, for every $x \in G$, then also $\varphi * f = f$, for every $\varphi \in L^1(G)$.*

Definition 1.4. *$E(X)$ is said to be topologically invariant (for the action of G) if, for every $f \in E(X)$ and every $\varphi \in L^1(G)$, $\varphi * f \in E(X)$. We then say that an operator $T \in K(E(X), E(X))$ is topologically invariant (for the action of G), if, for every $f \in E(X)$ and every $\varphi \in L^1(G)$, $T(\varphi * f) = T(f)$; a functional $L \in K(E(X))$ is said to be topologically invariant for the action of G) if, for every $f \in E(X)$ and every $\varphi \in L^1(G)$, $L(\varphi * f) = L(f)$.*

By $K_G(E(X), E(X))$ will be denoted the set of all topologically invariant operators in $K(E(X), E(X))$; $K_G(E(X))$ will be the set of all topologically invariant functionals in $K(E(X))$.