Example 3.1. Consider the equations

$$x_1' = \frac{2}{3} x_1^{-1/2} + x_2, \quad x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0$$

$$x_2' = \frac{2}{3} x_2^{-1/2} + x_1, \; x_1(0) = 0, \; x_2(0) = .$$

Applying theorem 2.1, corollary 2.1 and the theory of differential inequalities, the estimate on the solution of above equations is given by

$$x_1(t) \quad [(h(t))^{3/2} + t]^{2/3}$$
$$\leqslant$$
$$x_2(t) \quad [(h(t))^{3/2} + t]^{2/3}.$$

REFERENCES

1. Deo, S. G. and Murdeswar, M. G. — *A note on Gronwall inequality*, to appear.
2. Lakshmikantham, V. — *A variation of constants formula and Bellman-Gronwall-Reid inequalities*, to appear in J. Math. Anal. Appl.
3. Lakshmikantham, V. and Leela, S. — *Differential and Integral Inequalities* vols. I and II, Academic Press, New York, 1969.

Received 17.V.1974

FORMULA VARIAȚIEI CONSTANTELOR (ÎN CAZUL NELINIAR) ȘI O INEGALITATE FUNCȚIONALĂ

Rezumat

Se consideră sistemul neliniar (2.1) unde matricea $A(t)$ de tipul $n \times n$ este așa fel incît $a_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$, $a_{ii} \in C(I, R)$, $I = [t_0, T_0]$, $t_0 \geqslant 0$ iar $g(u)$ și $R(t, u)$ sînt vectori n-dimensionali, componentele lui $g(u)$ satisfăcînd condițiile $g_i(u_i) > 0$ pentru $u_i > 0$, $g_i(0) = 0$. În prima parte a lucrării se demonstrează că o soluție $v(t)$ a sistemului (2.1) se poate exprima sub forma (2.2). În partea a doua a lucrării, plecînd de la inegalitatea funcțională (3.1), se stabilește evaluarea (3.2), care în particular conține cunoscuta inegalitate a lui Bellman-Gronwall.

Analele științifice ale Universității „Al. I. CUZA" din Iași
Tomul XXI, s. I a, 1975

ÜBER UNGLEICHUNGEN VON PÓLYA IN DER THEORIE DER GANZEN FUNKTIONEN

VON

L. VOLKMANN

Einleitung. Sei $f(z)$ eine ganze Funktion. Es bezeichne $n(r, 0)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ im Kreis $|z| \leqslant r$ und $M(r) = M(r, f)$ das Maximum des absoluten Betrages dieser Funktion auf dem Kreis $|z| = r$. Mit

$$\lambda = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \quad \text{bzw.} \quad \mu = \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$

werden die Ordnung bzw. die untere Ordnung von $f(z)$ bezeichnet.

Für ganze Funktionen der Ordnung λ sind seit 1923 folgende Ungleichungen von G. Pólya [7] bekannt:

$$\underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r, 0)}{\log M(r)} \geqslant \frac{\sin \pi\lambda}{\pi}, \quad \text{für } \lambda < 1, \tag{1}$$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r, 0)}{\log M(r)} \leqslant \lambda. \tag{2}$$

Die Ungleichung (2) wurde 1941 von S. M. Shah [8] durch

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r, 0)}{\log M(r)} \leqslant \mu_1 \tag{2'}$$

verschärft, wobei

$$\mu_1 = \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log n(r, 0)}{\log r}$$

bedeutet und $\mu_1 \leqslant \mu \leqslant \lambda$ gilt.

Die Ungleichung (1) soll in dieser Arbeit durch den folgenden Satz erweitert werden.

Satz 1. *Sei $f(z)$ eine ganze Funktion der unteren Ordnung $\mu < 1$, dann gilt für jedes ρ, mit $\mu \leqslant \rho \leqslant \min(\lambda, 1)$,*

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r, 0)}{\log M(r)} \geqslant \frac{\sin \pi\rho}{\pi}. \tag{3}$$

Mit der gleichen Beweismethode kann auch der nächste Satz bewiesen werden.

Satz 2. *Sei $f(z)$ eine ganze Funktion der unteren Ordnung $\mu < 1$, mit reellen negativen Nullstellen, dann gilt für jedes ρ, mit $\mu \leqslant \rho \leqslant \min(\lambda, 1)$,*

$$\underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r, 0)}{\log M(r)} \leqslant \frac{\sin \pi\rho}{\pi}. \tag{4}$$

Satz 2 bedeutet unter den einschränkenden Voraussetzungen eine Verbesserung der Ungleichung (2) und zum Beispiel im Fall $0<\mu_1=\lambda<1$ auch eine Verbesserung der Ungleichung (2'). Aus beiden Sätzen zusammen ergibt sich sofort die

Folgerung. *Sei $f(z)$ eine ganze Funktion der unteren Ordnung $\mu<1$, mit reellen negativen Nullstellen, und es existiere*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\ 0)}{\log M(r)}=L.$$

Dann gilt $\mu=\lambda$ und $L=\dfrac{\sin\pi\lambda}{\pi}$.

1. Über das Wachstum reeller Funktionen. Der folgende Hilfssatz, der seinen Ursprung in der oben genannten Arbeit von G. Pólya ([7], S. 170, Satz III) besitzt und später vor allem durch A. Edrei, W. H. J. Fuchs und D. F. Shea ([1], [2], [3] und [9]) weiter entwickelt wurde, spielt beim Beweis der Sätze eine wesentliche Rolle.

Hilfssatz. *Sei $G(t)$ für $t\geqslant t_0>0$ eine reellwertige, stetige, positive, monotone und unbeschränkt wachsende Funktion. Man bezeichne durch*

$$\lambda=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log G(t)}{\log t}\quad\text{bzw.}\quad \mu=\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log G(t)}{\log t}$$

die Ordnung bzw. die untere Ordnung von $G(t)$, dann gilt:

a) *Es existieren zu jedem endlichen ρ, mit $\mu\leqslant\rho\leqslant\lambda$, eine Folge (r_n) (eine Folge von Pólya peaks erster Art der Ordnung ρ) und zwei Folgen (a_n) und (A_n), mit*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{r_n}=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r_n}=0,$$

so dass gleichzeitig die beiden Ungleichungen

$$(5)\qquad \begin{aligned} &G(t)\leqslant(1+o(1))\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho}G(r_n) && (n\to\infty,\ a_n\leqslant t\leqslant A_n),\\ &G(t)\leqslant\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho-\frac{1}{n}}G(r_n) && (t_0\leqslant t\leqslant a_n)\end{aligned}$$

gelten.

b) *Es existieren zu jedem endlichen ρ, mit $\mu\leqslant\rho\leqslant\lambda$, eine Folge (r_n) (eine Folge von Pólya peaks zweiter Art der Ordnung ρ) und zwei Folgen (a_n) und (A_n), mit obigen Eigenschaften, so dass die Ungleichung*

$$(6)\qquad G(t)\geqslant(1+o(1))\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho}G(r_n)\qquad (n\to\infty,\ a_n\leqslant t\leqslant A_n)$$

gilt.

Für einen Beweis dieses Hilfssatzes vergleiche man A. Edrei [3], D. F. Shea [9] und S. Hellerstein und J. Williamson [5].

2. Beweis von Satz 1. Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(0)=1$ und $\lambda>0$ vorausgesetzt werden, und es kann angenommen werden, daß

$$(7)\qquad \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\ 0)}{\log M(r)}=u<\infty$$

gilt, da im Fall $u=\infty$ nichts zu beweisen wäre. Nun gilt (vgl. A. Edrei [2], S. 1)

$$(8)\qquad \log|f(z)|=\log\left|\prod_{|b_n|\leqslant R}\left(1-\frac{z}{b_n}\right)\right|+S_0(z,\ R),$$

wobei $b_1,\ b_2,\ldots$ die Nullstellen von $f(z)$ bedeuten,

$$0\leqslant|z|=r\leqslant\frac{1}{2}R\ \text{und}\ S_0(z,\ R)\leqslant 14\frac{r}{R}T(2R)\ \text{gilt.}$$

Für die Nevanlinnasche charakteristische Funktion $T(r)=T(r,\ f)$ gilt bekanntlich

$$T(r,\ f)\leqslant\log M(r,\ f)$$

(vgl. R. Nevanlinna [6], S. 220) und somit folgt aus (8)

$$(9)\qquad \log M(r)\leqslant r\int_0^R\frac{n(t,\ 0)}{t(t+r)}\,dt+n(R,\ 0)\int_R^\infty\frac{r}{t(t+r)}\,dt+14\frac{r}{R}\log M(2R).$$

Nun gilt

$$n(R,\ 0)\int_R^\infty\frac{r}{t(t+r)}\,dt\leqslant\frac{N(2R,\ 0)}{\log 2}\log\left(1+\frac{r}{R}\right)\leqslant 2T(2R)\frac{r}{R}\leqslant 2\frac{r}{R}\log M(2R),$$

wobei

$$N(r,\ 0)=\int_0^r\frac{n(t,\ 0)}{t}\,dt$$

die Nevanlinnasche Anzahlfunktion der Nullstellen bedeutet. Damit ergibt sich aus (9)

$$(10)\qquad \log M(r)\leqslant r\int_0^R\frac{n(t,\ 0)}{t(t+r)}\,dt+16\frac{r}{R}\log M(2R).$$

Wegen (7) existiert zu jedem $\varepsilon>0$ ein $t_1=t_1(\varepsilon)>0$, so daß für alle $t\geqslant t_1$ gilt $n(t,\ 0)\leqslant\log M(t)(u+\varepsilon)$. Damit erhält man aus (10)

$$(11)\qquad \log M(r)\leqslant r(u+\varepsilon)\int_{t_1}^R\frac{\log M(t)}{t(t+r)}\,dt+16\frac{r}{R}\log M(2R)+K(t_1),$$

wobei $K(t_1)$ eine nur von ε abhängige Konstante ist. Nun wende man Teil a) des Hilfssatzes auf die Funktion $G(t)=\log M(t)$ an und wähle n_0 so, daß für alle $n>n_0$

$$r_n>a_n\geqslant t_1\ \text{und}\ A_n\geqslant 4r_n$$

gilt. Setzt man für diese n

$$r=r_n\ \text{und}\ R=R_n=\frac{1}{2}A_n,$$

dann folgt aus (11) für alle $n>n_0$ und alle endlichen ρ, mit $\mu\leqslant\rho\leqslant\lambda$,

$$\log M(r_n)\leqslant(u+\varepsilon)(1+o(1))\log M(r_n)\int_{a_n}^{A_n}\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho}\frac{r_n}{t(t+r_n)}\,dt+$$

$$+(u+\varepsilon)\log M(r_n)\int_{t_1}^{A_n}\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho-\frac{1}{n}}\frac{r_n}{t(t+r_n)}\,dt+16\frac{r_n}{R_n}\log M(2R_n)+K(t_1).$$

Mit $t/r_n = s$ ergibt sich daraus für $\rho > 0$, $n > \bar{n} \geqslant n_0$ und $\bar{n}\rho - 1 > 0$

$$\log M(r_n) \leqslant (\mu + \varepsilon)(1 + o(1)) \log M(r_n) \int_0^\infty \frac{s^{\rho-1}}{s+1}\, ds + \tag{12}$$

$$+ o(\log M(r_n)) + 16 \frac{r_n}{R_n} \log M(2R_n).$$

Da bekanntlich für $0 < \rho < 1$ (vgl. A. Dinghas [1], S. 179)

$$\int_0^\infty \frac{s^{\rho-1}}{s+1}\, ds = \Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho}$$

ist, folgt aus (12) für alle $n > \bar{n}$, $\mu \leqslant \rho \leqslant \lambda$ und $0 < \rho < 1$

$$1 \leqslant (\mu + \varepsilon)(1 + o(1)) \frac{\pi}{\sin \pi\rho} + 16 \frac{r_n}{R_n} \frac{\log M(2R_n)}{\log M(r_n)} + o(1). \tag{13}$$

Aus dem Hilfssatz und der Definition von r_n und R_n erkennt man, daß

$$16 \frac{r_n}{R_n} \frac{\log M(2R_n)}{\log M(r_n)} \leqslant 32(1 + o(1)) \left(\frac{A_n}{r_n}\right)^{\rho-1} = o(1)$$

für $n \to \infty$ gilt. Daher folgt aus (13) mit $n \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ und der Definition von μ

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r, 0)}{\log M(r)} \geqslant \frac{\sin \pi\rho}{\pi}$$

für jedes ρ, mit $\mu \leqslant \rho \leqslant \lambda$ und $0 < \rho < 1$ und damit auch für jedes ρ, mit $\mu \leqslant \rho \leqslant \min(\lambda, 1)$.

3. Beweis von Satz 2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $f(0) = 1$, dann gilt wieder (8), und da die Nullstellen von $f(z)$ negativ sind, folgt aus (8)

$$\log M(r) \geqslant r \int_0^R \frac{n(t, 0)}{t(t+r)}\, dt - 14 \frac{r}{R} \log M(2R). \tag{14}$$

Nun gelte $0 < \mu \leqslant \lambda < 1$. Wegen (2') gilt

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r, 0)}{\log M(r)} = v \leqslant \mu_1 \leqslant \mu < \infty,$$

und somit folgt, wie beim Beweis des Satzes 1, aus (14) für jedes $\varepsilon > 0$ und $t \geqslant t_1 = t_1(\varepsilon)$

$$\log M(r) \geqslant r(v - \varepsilon) \int_{t_1}^R \frac{\log M(t)}{t(t+r)}\, dt - 14 \frac{r}{R} \log M(2R). \tag{15}$$

Hier kann $v > 0$ vorausgesetzt werden, da im Fall $v = 0$ nichts mehr zu beweisen ist. Nun wende man Teil b) des Hilfssatzes auf die Funktion $G(t) = \log M(t)$ an und erhält dann, ähnlich wie beim Beweis des Satzes 1, für alle $n > n_0$ und alle ρ, mit $\mu \leqslant \rho \leqslant \lambda$, aus (15)

$$\log M(r_n) \geqslant (v - \varepsilon)(1 + o(1)) \log M(r_n) \int_{a_n}^{\frac{1}{2} t_n} \left(\frac{t}{r_n}\right)^\rho \frac{r_n}{t(t+r_n)}\, dt - 14 \frac{r_n}{R_n} \log M(2R_n).$$

Daraus ergigt sich (4) genauso wie beim Beweis von Satz 1. Nun gelte $\mu = 0$ oder $\lambda \geqslant 1$. In diesem Fall macht man die Annahme $v > 0$ und erhält dann durch obige Schlußweise einen Widerspruch und damit die Ungleichung (4).

4. Bemerkungen. Für ganze Funktionen $f(z)$ der Ordnung $\lambda < 1$, mit negativen reellen Nullstellen und $f(0) = 1$, gilt bekanntlich

$$\log M(r) = r \int_0^\infty \frac{n(t, 0)}{t(t+r)}\, dt, \tag{16}$$

(vgl. E. C. Titchmarsh [10], S. 271).

1) Geht man von (16) aus und benutzt, ähnlich wie beim Beweis von Satz 1, einen einfachen Hilfssatz über Pólya peaks (vgl. A. Edrei und W. H. J. Fuchs [4], S. 237), so erhält man für ganze Funktionen der Ordnung $\lambda < 1$ die Ungleichung (1) von G. Pólya.

2) Setzt man im Satz 2 $\lambda < 1$ voraus, so kann der Beweis dieses Satzes schon mit Hilfe von (16) geführt werden. Beim Beweis kann auch auf (2') und (2) verzichtet werden, da sich aus (16) sofort

$$v = \lim_{r \to \infty} \frac{n(r, 0)}{\log M(r)} \leqslant \lim_{r \to \infty} \frac{n(r, 0)}{\log M(r)} \leqslant \frac{1}{\log 2} < \infty$$

ergibt.

LITERATUR

1. Dinghas, A. — *Vorlesungen über Funktionentheorie*. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer—Verlag 1961.
2. Edrei, A. — *The deficiencies of meromorphic functions of finite lower order*. Duke Math. J. 31 (1964), 1—21.
3. — — *Sums of deficiencies of meromorphic functions*. J. Analyse Math. *14* (1965), 79—107.
4. Edrei, A. und Fuchs, W. H. J. — *The deficiencies of meromorphic functions of order less than one*. Duke Math. J. *27* (1960), 233—249.
5. Hellerstein, S. und Williamson, J. — *Entire functions with negativ zeros and a problem of R. Nevanlinna*. J. Analyse Math. *22* (1969), 233—267.
6. Nevanlinna, R. — *Eindeutige analytische Funktionen*. 2. Aufl., Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer—Verlag 1953.
7. Pólya G. — *Bemerkungen über unendliche Folgen und ganze Funktionen*. Math. Ann. 88 (1923). 169—183.
8. Shah, S. M. — *Note on a theorem of Pólya*. J. Indian Math. Soc. *5* (1941) 189—191.
9. Shea, D. F. — *On the Valiron deficiencies of meromorphic functions of finite order*. Trans. Amer. Math. Soc. *124* (1966), 201—227.
10. Titchmarsh, E. C. — *The theory of functions*. 2. Aufl., Oxford Univ. Press 1939.

Eingereicht am 12.V.1974

Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
1 Berlin 33
Hüttenweg 9

ASUPRA UNOR INEGALITĂŢI ALE LUI PÓLYA ÎN TEORIA FUNCŢIILOR ÎNTREGI

Rezumat

Se generalizează inegalităţile (1) şi (2) prin inegalităţile (3) şi (4), valabile pentru funcţii întregi de ordin $\mu < 1$ şi pentru orice ρ care satisface relaţia $\mu \leqslant \rho \leqslant \min(\lambda, 1)$.