Analele ştiinţifice ale Universităţii „AL. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXII, s. I a, 1976, f. 1

SUR LES ORDRES SEMI-TOPOGÈNES ET LES SÉPARATIONS WALLACE

PAR

C. AMIHĂESEI

§ 1. Dans les Notes [1] et [2] nous avons montré que dans le cadre de la théorie générale des structures syntopogènes on peut traiter d'une manière plus unitaire les principales classes de structures quasi-topologiques.

Dans cette note nous allons démontrer que dans ce cadre général on peut présenter aussi quelques classes d'espaces à séparation, introduites par A. D. Wallace dans [6].

Pour la terminologie et les notations, nous renvoyons le lecteur à [3] et à [1].

Dans [6], Wallace a défini de la manière suivante une séparation sur un ensemble:

Définition 1.1. *On dit qu'une relation $\mathcal{S}$ sur 2^E est une séparation sur l'ensemble E, si elle satisfait aux axiomes suivants;*

$$(S_1) \qquad X \subset E \Rightarrow \emptyset \mathcal{S} X,$$

$$(S_2) \qquad X \mathcal{S} Y \Rightarrow Y \mathcal{S} X,$$

$$(S_3) \qquad X \mathcal{S} Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset,$$

$$(S_4) \qquad X \subset X_1, \quad X_1 \mathcal{S} Y \Rightarrow X \mathcal{S} Y.$$

On observe que si $E \neq \emptyset$, alors une séparation ne peut pas être un ordre semi-topogène. L'étude des séparations a été continuée par P. C. Hammer dans [5]. Dans sa note, il a associé à une relation quelconque $\mathcal{S}$ sur 2^E les fonctions suivantes;

$$(1.1) \qquad wX = \cap \{cY;\ Y \mathcal{S} X\}, \quad vX = \cap \{cY;\ X \mathcal{S} Y\}$$

$$(1.2) \qquad w^*X = \cap \{cwY;\ X \mathcal{S} Y\}, \quad v^*X = \cap \{cvY;\ Y \mathcal{S} X\}$$

$$(1.3) \qquad w^{**}X = \cap \{cw^*Y;\ Y \mathcal{S} X\}, \quad v^{**}X = \cap \{cv^*Y;\ X \mathcal{S} Y\}.$$

À deux fonctions arbitraires $f, g : 2^E \to 2^E$, Hammer associe la relation $\mathcal{R}(f, g)$ sur 2^E, par

$$(1.4) \qquad \mathcal{R}(f, g) = \{(X, Y);\ fX \cap gY = \emptyset\}.$$

Compte tenu qu'un ordre semi-topogène $<$ est une relation sur 2^E, il résulte qu'à cet ordre on peut associer les fonctions $w, w^*, w^{**}, v, v^*, v^{**}$ définies ci-dessus et qu'on nomme *fonctions de Wallace-Hammer de l'ordre* $<$. Dans le § 2 nous étudions quelques propriétés des fonctions Wallace-Hammer associées à un ordre semi-topogène; nous caractérisons par ces fonctions quelques classes d'ordres semi-topogènes et établissons certaines relations entre les ordres semi-topogènes et les relations définies par (1.4). Dans le § 3 nous caractérisons quelques classes de séparations à l'aide des ordres semi-topogènes.

§ 2. Le théorème 1 dans [5] peut être complété pour des ordres semi-topogènes de la manière suivante.

Théorème 2.1. *Si $<$ est un ordre semi-topogène sur E, alors*

$$(1) \qquad vX = \emptyset \text{ et } v^*X = E \text{ pour tout } X \subset E,$$

(2) $$cwX = \{x\,;\ x < X\}.$$

(3) *La fonction cw est une t-fonction contractive et la fonction w^* est une t-fonction expansive.*

Démonstration. (1) Parce que $X < Y$ implique $vX \subset cY$ et parce que $X < E$, il résulte que $vX = \emptyset$ pour tout $X \subset E$. Puis, $v^*X = \cap\,(cvY\,;\ Y < X\} = E$ pour tout $X \subset E$. □

(Par le signe □ on indique la fin d'une démonstration).

(2) Compte tenu de la définition (1.1), la relation $x \in cwX$ implique qu'il y a $Y < X$ tel que $x \in Y$; mais de $x \in Y < X$ il résulte que $x < X$, donc $cwX \subset \{x\,;\ x < X\}$. D'autre part, si $x < X$, alors il est évident que $x \in cwX$ et donc $cwX = \{x\,;\ x < X\}$ pour tout $X \subset E$. □

(3) De (2) et du fait que $x < X$ implique $x \in X$, il résulte l'égalité $cw\,\emptyset = \emptyset$, donc cw est une t-fonction. Parce que $Y < X$ implique $Y \subset X$ on obtient $cwX = \cup\,\{Y\,;\ Y < X\} \subset \cup\,\{Y\,;\ Y \subset X\} = X$, donc cw est une fonction contractive. Puis, si $A \subset B$, alors $cwA = \{x\,;\ x < A\} \subset \{x\,;\ x < B\} = cwB$ parce que $x < A \subset B$ implique $x < B$, donc cw est une fonction isotone. On a donc montré que cw est une t-fonction contractive. Nous démontrons maintenant que w^* est une t-fonction expansive. On a $w^*\,\emptyset = \cap\,\{cwY\,;\ \emptyset < Y\} \subset cw\,\emptyset = \emptyset$, donc w^* este une t-fonction. Si $A \subset B$ et $x \in cw^*B$, alors il existe $Y \subset E$ tel que $B < Y$, $x \in wY$; puisque $A \subset B < Y$ implique $A < Y$, on déduit $x \in cw^*A$, donc $cw^*B \subset cw^*A$ et w^* est une fonction isotone. Du théorème 1 de [5] il résulte que w^* est extensive et donc w^* est une t-fonction expansive. □

En utilisant la fonction w associée à un ordre semi-topogène, on démontre le théorème suivant de caractérisation d'un ordre semi-topogène parfait.

Théorème 2.2. (1) *Un ordre semi-topogène $<$ est parfait si et seulement si pour tout $X \subset E$, on a $cwX < X$.*

(2). *Si $<$ est un ordre semi-topogène parfait, alors on a l'égalité $< = \cup\,\{<_{cwX,X}\,;\ X \subset E\}$.*

Démonstration. (1). Soit $<$ un ordre semi-topogène parfait et w la fonction Wallace Hammer associée à l'ordre $<$. Compte tenu de la définition d'un ordre semi-topogène parfait et du fait que $\emptyset < X$ pour pout $X \subset E$, il résulte que $cwX = \cup\,\{Y\,;\ Y < X\} < X$. Réciproquement, on suppose que $<$ est un ordre semi-topogène ayant la propriété que la fonction Wallace-Hammer associée w, satisfait à la condition de (1). Si $A < B$, alors de $cwB < B$ et $A \subset cwB$ il suit que cwB est le surensemble maximal de l'ensemble A qui satisfait à la condition $cwB < B$. Compte tenu du théorème 5 de [4], il résulte que $<$ est un ordre semi-topogène parfait. □

(2). Puisqu'on a $cwX < X$, il résulte que $<_{cwX,X}$ este un ordre topogène élémentaire. La relation $A < B$ entraine $A \subset cwB < B$, donc $A <_{cwB,B} <_{cwB,B} B$ et par conséquent $A <' B$, où $<' = \cup\,\{<_{cwX,X}\,;\ X \subset E\}$. Réciproquement, si $A <' B$, alors il existe $X \subset E$ tel que $A \subset cwX \subset X \subset B$; mais, par hypothèse on a $cwX < X$ et par conséquent $A < B$. Les inclusions $<' \subset <$ et $< \subset <'$ entraînent l'égalité $< = <'$. □

Si $<$ est un ordre semi-topogène, alors la fonction Wallace-Hammer associée à l'ordre semi-topogène complémentaire $<^c$, este définie par $w_1cX = \cap\,\{Y\,;\ X < Y\}$. En notant $u = w_1c$ et en tenant compte du théorème 2.2 on obtient le théorème suivant de caractérisation d'un ordre semi-topogène coparfait.

Théorème 2.3. (1) *Un ordre semi-topogène $<$ est coparfait si et seulement si pour tout $X \subset E$, on a $X < uX$.* □

(2) *Si $<$ est un ordre semi-topogène coparfait, alors on a $< = \cup\,\{<_{X,uX}\,;\ X \subset E\}$.* □

On tire des théorèmes 2.1 et 2.2 le théorème suivant de caractérisation d'un ordre topogène biparfait.

Théorème 2.4. (1) *Un ordre semi-topogène $<$ est un ordre topogène biparfait si et seulement si pour tout $X \subset E$, on a*

$$cwX < X < uX.$$

(2). *Si $<$ est un ordre topogène biparfait, alors*

$$< = \cup\,\{<_{cwX,X} \cup <_{Y,uY}\,;\ X,\ Y \subset E\}.\ \square$$

Soit $<$ un ordre semi-topogène et w, w^* les fonctions Wallace-Hammer associées à l'ordre $<$. Dans ce cas on considère les relations $\mathcal{R}(w^*, w)$, $\mathcal{R}(c, w)$, $\mathcal{R}(v, v^*)$, $\mathcal{R}(v, c)$ et $\mathcal{R}(w, c)$ définies par (1.4). Dans le théorème suivant nous démontrons quelques propriétés de ces relations.

Théorème 2.5. *Si $<$ est un ordre semi-topogène et w, w^*, v, v^* sont les fonctions Wallace-Hammer associées, alors;*

(1) $$\mathcal{R}(v, v^*) = \mathcal{R}(v, c) = 2^E \times 2^E,$$

(2) $$< \subset \mathcal{R}(w, c) \text{ entraîne } E = \emptyset,$$

(3) *$\mathcal{R}(w^*, w)$ est un ordre semi-topogène et $\mathcal{R}(c, w)$ est un ordre semi-topogène parfait. De plus, $< \subset \mathcal{R}(w^*, w) \subset \mathcal{R}(c, w)$, $\mathcal{R}(c, w) = <^p$.*

(4). *Un ordre semi-topogène $<$ est parfait si et seulement si on a $< = \mathcal{R}(c, w)$.*

Démonstration. (1) En vertu du théorème 2.1—(1), on a les équivalences suivantes; $X\mathcal{R}(v, v^*)Y \Leftrightarrow vX \cap v^*Y = \emptyset \Leftrightarrow \emptyset \cap E = \emptyset \Leftrightarrow vX \cap Y = \emptyset$; d'ici on déduit les égalitées de (1). □

(2) est évident. □

(3) Compte tenu de (1) et (2) et du théorème 1 de [4], il résulte $< \subset \mathcal{R}(w^*, w) \subset \mathcal{R}(c, w)$. Les relations $\emptyset < \emptyset$, $E < E$ et les inclusions ci-dessus montrent qu'on a $\emptyset\mathcal{R}(w^*, w)\emptyset$, $E\mathcal{R}(w^*, w)E$ et $\emptyset\,\mathcal{R}(c, w)\,\emptyset$, $E\mathcal{R}(c, w)E$. Si $A\,\mathcal{R}(w^*, w)B$, c'est-à-dire si $w^*A \cap wB = \emptyset$, alors il résulte $A \subset w^*A \subset cwB \subset B$, d'où $A \subset B$. Puis, les relations $A \subset A'\,\mathcal{R}(w^*, w)B' \subset B$ impliquent les inclusions $A \subset A' \subset w^*A' \subset cwB' \subset cwB \subset B$, d'où on obtient $w^*A \subset w^*A' \subset cwB$, c'est-à-dire $A\,\mathcal{R}(w^*, w)B$. Par conséquent, $\mathcal{R}(w^*, w)$ est un ordre semi-topogène. On démontre de la même façon que $\mathcal{R}(c, w)$ est un ordre semi-topogène. Enfin, si $A_i\mathcal{R}(c, w)B$, $i \in I$, alors il résulte successivement; $A_i \subset cwB$, $\bigcup_{i \in I} A_i \subset cwB$, $(\bigcup_{i \in I} A_i)\,\mathcal{R}(c, w)B$; donc $\mathcal{R}(c, w)$ est un ordre semi-topogène parfait. Il reste à montrer que $<^p = \mathcal{R}(c, w)$. Pour établir l'égalité $<^p = \mathcal{R}(c, w)$, il suffit de démontrer que l'ordre semi-topogène parfait $\mathcal{R}(c, w)$ est moins fin que l'ordre semi-topogène parfait $<^p$. Si $A\mathcal{R}(c, w)B$, c'est-à-dire si $A \subset cwB$, alors il suit que $x \in A \subset cwB$ entraine la relation $x < B$, d'où on obtient $A <^p B$, donc $< \subset \mathcal{R}(c, w) \subset <^p$. □

(4) Comme l'ordre semi-topogène $<$ est parfait si et seulement si $< = <^p$, il résulte en vertu de (3), que $<$ est parfait si et seulement si on a $< = \mathcal{R}(c, w)$. □

§ 3. Si $<$ est un ordre topogène parfait idempotent sur un ensemble E, alors la topologie associée à $<$ est T_1-séparée, si $<$ satisfait à la condition suivante;

(T_1) $$x,\ y \in E,\ x \neq y \Rightarrow x < E - y.$$

On observe que la condition (T_1) peut être formulée pour tout ordre semi-topogène, et donc on peut donner la définition suivante.

Définition 3.1. *On dit qu'un ordre semi-topogène $<$ est T_1-séparé s'il satisfait à l'axiome (T_1) ci-dessus.*

Dans le théorème suivant on associe un ordre semi-topogène parfait à une séparation sur un ensemble.

Théorème 3.1. (1) *Si $\mathcal{S}$ est une séparation sur un ensemble E, alors la relation $<_{\mathcal{S}}$ définie par*

(3.1) $$A <_{\mathcal{S}} B \Leftrightarrow A \subset \{x\,;\ x\mathcal{S}cB\}$$

est un ordre semi-topogène parfait sur E.

(2) *Si la séparation $\mathcal{S}$ satisfait à l'axiome*

(S_5) $$x,\ y \in E,\ x \neq y \Rightarrow x\,\mathcal{S}\,y,$$

alors l'ordre semi-topogène parfait $<_{\mathcal{S}}$ défini par (3.1) est T_1 — séparé.

Démonstration. (1) En vertu de l'axiome (S_3), il résulte que la relation $Y\mathcal{S}E$ entraine l'égalité $Y = \emptyset$ et donc $\emptyset \subset \{x\,;\ x\mathcal{S}c\,\emptyset\} = \emptyset$, c'est-à-dire $\emptyset <_{\mathcal{S}} \emptyset$. En utilisant les axio-

mes (S_1) et (S_2) on obtient $\{x;\ x\mathcal{S}cE\} = \{x;\ x\mathcal{S}\,\emptyset\} = E$, donc $E <_{\mathcal{S}} E$ et par conséquent, $<_{\mathcal{S}}$ vérifie l'axiome (O_1) d'un ordre semi-topogène. On observe aisément que $<_{\mathcal{S}}$ est moins fin que la relation d'inclusion, donc $<_{\mathcal{S}}$ est une relation prétopogène sur E. Ensuite, si $A \subset \subset A' <_{\mathcal{S}} B' \subset B$, alors $A \subset A' \subset \{x;\ x\mathcal{S}cB'\} = \{x;\ cB'\mathcal{S}x\} \subset \{x;\ cB\mathcal{S}x\} = \{x;\ x\mathcal{S}cB\}$, donc $A <_{\mathcal{S}} B$ (en vertu de (S_4) et (S_2)). On a démontré par conséquent que $<_{\mathcal{S}}$ est un ordre semi-topogène. Si $A_i <_{\mathcal{S}} B$, $i \in I$, alors $A_i \subset \{x\mathcal{S}cB\}$, $i \in I$, d'où il résulte que $\bigcup_{i\in I} A_i \subset \subset \{x;\ x\mathcal{S}cB\}$, donc $\bigcup_{i\in I} A_i <_{\mathcal{S}} B$ et par suite $<_{\mathcal{S}}$ est parfait. □

(2) Si $x, y \in E$, $x \neq y$, alors en vertu de l'axiome (S_5) on a $x\mathcal{S}y$, c'est-à-dire, $x\mathcal{S}ccy$ et de (3.1) il résulte que $x <_{\mathcal{S}} E - y$. Par conséquent, $<_{\mathcal{S}}$ satisfait l'axiome (T_1). □

Réciproquement, on a le théorème suivant.

Théorème 3.2. (1) *Si $<$ est un ordre semi-topogène, alors la relation $\mathcal{S}_<$ définie par*

$$A\mathcal{S}_< B \Leftrightarrow A(< \cap <^c)cB \tag{3.2}$$

est un séparation.

(2) *Si $<$ est un ordre semi-topogène parfait, alors la séparation $\mathcal{S}_<$ satisfait à l'axiome* (S_6) *Si $A \subset \{x;\ x\mathcal{S}_< B$ et $B \subset \{x;\ x\mathcal{S}_< A\}$, alors $A\mathcal{S}_< B$.*

(3) *Si $<$ est un ordre semi-topogène T_1-separé, alors la séparation $\mathcal{S}_<$ vérifie l'axiome* (S_5).

Démonstration. (1) La symétrie de la relation $\mathcal{S}_<$ résulte en vertu de la symétrie de l'ordre $< \cap <^c$. Puisque pour tout $X \subset E$ on a $\emptyset(< \cap <^c)cX$, il suit que $\emptyset\,\mathcal{S}_< X$, donc $\mathcal{S}_<$ vérifie l'axiome (S_1). Si $X\mathcal{S}_< Y$, alors il résulte que $X(< \cap <^c)cY$, d'où $X \cap Y = \emptyset$, donc $\mathcal{S}_<$ vérifie l'axiome (S_2). Les relations $X_1 \subset X$, $X\mathcal{S}_< Y$ impliquent les relations $X_1 \subset \subset X$, $X(< \cap <^c)cY$, d'où on obtient $X_1(< \cap <^c)cY$, donc $X_1\mathcal{S}_< Y$, c'est-à-dire que l'axiome (S_4) est lui aussi vérifié. □

(2) Soit A, B tels que $A \subset \{x;\ x\mathcal{S}_< B\}$ et $B \subset \{x;\ x\mathcal{S}_< A\}$. De $x\mathcal{S}_< B$ il résulte $x(< \cap <^c)cB$, d'où $x < cB$, donc $A \subset \{x;\ x < cB\}$; parce que $<$ est parfait, il résulte que $A < cB$. De façon analogue, on voit aisément que $B < cA$. Les relations $A < cB$ et $B < cA$ entrainent évidemment que $A(< \cap <^c)cB$, c'est-à-dire que $A\mathcal{S}_< B$. □

(3) Si $x, y \in E$, $x \neq y$, alors en vertu de l'axiome (T_1), il résulte successivement; $x < < E - y$ et $y < E - x$; $x < E - y$ et $x <^c E - y$; $x(< \cap <^c)E - y$ et par (3.2) on a $x\mathcal{S}_< y$. □

Sur l'ensemble $\mathcal{W}$ des séparations Wallace qui satisfont aux axiomes (S_5) et (S_6), considérons la relation d'inclusion et les opérations d'intersection et de réunion. Le lemme suivant est démontré aisément :

Lemme 3.1. *L'ensemble $\mathcal{W}$ muni de l'ordre $\subset$ est un treillis complet, où le plus petit élément est la relation $\mathcal{S}_\emptyset = \{(\emptyset, X), (X, \emptyset), (x, y);\ X \subset E,\ x, y \in E,\ x \neq y\}$, le plus grand élément est la relation $\mathcal{S}_E = \{(X, Y);\ X, Y \subset E,\ X \cap Y = \emptyset\}$ et pour un ensemble de séparations $\{\mathcal{S}_i;\ i \in I\}$ on a $\inf\{\mathcal{S}_i;\ i \in I\} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{S}_i$ et $\sup\{\mathcal{S}_i;\ i \in I\}$ est l'intersection de toutes les séparations Wallace plus fines que la relation $\bigcup_{i\in I} \mathcal{S}_i$.* □

Nous considérons l'ensemble $\mathcal{P}_s$ des tous les ordres semi-topogènes parfaits T_1-séparés et les fonctions $\lambda: \mathcal{W} \to \mathcal{P}_s$, $\gamma: \mathcal{P}_s \to \mathcal{W}$ définiées par $\lambda(\mathcal{S}) = <_{\mathcal{S}}$ et $\gamma(<) = \mathcal{S}_<$. Dans ces conditions on déduit le théorème suivant de caractérisation d'une séparation Wallace.

Théorème 3. 3. *Les fonctions λ et γ sont bijections inverses l'une à l'autre. L'application λ est un isomorphisme du treillis complet $\mathcal{W}$ sur le treillis complet $\mathcal{P}_s$.*

Démonstration. Si $\mathcal{S} \in \mathcal{W}$, alors en vertu du théorème 3.1, il résulte que l'ordre $<_{\mathcal{S}}$ est parfait et T_1-séparé, donc $\lambda(\mathcal{S}) = <_{\mathcal{S}} \in \mathcal{P}_s$. Réciproquement, si $<$ est un ordre semi-topogène parfait T_1-séparé, alors le théorème 3.2 montre que la relation $\mathcal{S}_<$ est une séparation Wallace qui satisfait aux axiomes (S_5) et (S_6). Soit maintenant $\mathcal{S} \to <_{\mathcal{S}}$; $< \to \mathcal{S}_<$; nous allons démontrer que si $< = <_{\mathcal{S}}$, alors $\mathcal{S}_< = \mathcal{S}$. De $A\mathcal{S}_< B$ il résulte successivement; $A(< \cap <^c)cB$; $A(<_{\mathcal{S}} \cap <^c_{\mathcal{S}})cB$ (parce que $< = <_{\mathcal{S}}$); $A \subset \{x;\ x\mathcal{S}B\}$ et $B \subset \{x;\ x\mathcal{S}A\}$ (cf. 3.1); $A\mathcal{S}B$ en vertu de l'axiome (S_6); $\mathcal{S}_< \subset \mathcal{S}$.

D'autre part, si $A\mathcal{S}B$, alors on déduit successivement; $A \subset \{x;\ x\mathcal{S}B\}$ et $B \subset \{x;\ x\mathcal{S}A\}$ (cf. (S_2) et (S_4)); $A <_{\mathcal{S}} cB$ et $B <_{\mathcal{S}} cA$ (cf. (3.1)); $A < cB$ et $B < cA$ en vertu de la définition (3.2) et on a par suite $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_<$. Les inclusions $\mathcal{S}_< \subset \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_<$ impliquent $\mathcal{S} = \mathcal{S}_<$.

Inversement, soient $< \to \mathcal{S}_<$; $\mathcal{S} \to <_{\mathcal{S}}$ et en supposant que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_<$, nous montrons que $<_{\mathcal{S}} = <$. Si $A <_{\mathcal{S}} B$, alors on déduit successivement; $A \subset \{x;\ x\mathcal{S}cB\} = \{x;\ x\mathcal{S}_< cB\}$, $A \subset \{x;\ x(< \cap <^c)B\} \subset \{x;\ x < B\}$, $A < B$ parce que $<$ est parfait, $<_{\mathcal{S}} \subset <$. Réciproquement, si $A < B$, alors on obtient $A \subset \{x;\ x < B\}$. Puisque pour $x \in A$ et $y \in cB$ on a $x \neq y$, il résulte de l'axiome (T_1) que $y < E - x$, d'où $cB < E - x$, donc $x < {}^cB$; par suite on a $A \subset \{x;\ <^c B\}$ et $A \subset \{x;\ x < B\}$, c'est-à-dire $A \subset \{x;\ x(< \cap <^c)B\} = \{x;\ x\mathcal{S}_< cB\}$. Par (3.1) on a $A <_{\mathcal{S}} B$, donc $< \subset <_{\mathcal{S}}$. De $<_{\mathcal{S}} \subset <$ et $< \subset <_{\mathcal{S}}$, il résulte l'égalité $< = <_{\mathcal{S}}$.

Par conséquent, les fonctions λ et σ sont inverses l'une de l'autre et donc $\sigma = \lambda^{-1}$.

Enfin, si $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{W}$, $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$, alors la relation $A <_{\mathcal{S}_1} B$ entraine $A \subset \{x;\ x\mathcal{S}_1 cB\} \subset \subset \{x;\ x\mathcal{S}_2 cB\}$, donc $A <_{\mathcal{S}_2} B$ et on a par suite $<_{\mathcal{S}_1} \subset <_{\mathcal{S}_2}$. □

En ce qui concerne les ordres topogènes $<$ de $\mathcal{P}_s$, on peut dire;

Théorème 3.4. *Par l'isomorphisme λ, les ordres topogènes de $\mathcal{P}_s$ se correspondent avec séparations Wallace $\mathcal{S}$ de $\mathcal{W}$ qui satisfont à l'axiome suivant;*

$$X_1\mathcal{S}Y,\ X_2\mathcal{S}Y \Rightarrow (X_1 \cup X_2)\,\mathcal{S}Y. \tag{S_7}$$

Démonstration. Soit $<$ un ordre topogène de $\mathcal{P}_s$ et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_< = \lambda^{-1}(<)$. Si $<$ est un ordre topogène, alors $<^c$ est aussi un ordre topogène, donc $< \cap <^c$ est un ordre topogène. Compte tenu de ces observations et de (3.2), on déduit que les relations $X_1\mathcal{S}_< Y$, $X_2\mathcal{S}_< Y$ entraînent $X_1(< \cap <^c)cY$ et $X_2(< \cap <^c)cY$, d'où on a $(X_1 \cup X_2)(< \cap <^c)cY$, autrement dit, $(X_1 \cup X_2)\,\mathcal{S}_< Y$, donc $\mathcal{S}_<$ satisfait à l'axiome (S_7). Réciproquement, soit $\mathcal{S}$ une séparation Wallace de $\mathcal{W}$, qui satisfait à l'axiome (S_7) et $<_{\mathcal{S}} = \lambda(\mathcal{S})$. Si $X <_{\mathcal{S}} Y_1$ et $X <_{\mathcal{S}} Y_2$, alors, compte tenu de (3.1), on obtient $X \subset \{x;\ x\mathcal{S}cY_1\} = \{x;\ cY_1\mathcal{S}x\}$ et $X \subset \{x;\ x\mathcal{S}cY_2\} = \{x;\ cY_2\mathcal{S}x\}$; d'ici il résulte en vertu de l'axiome (S_7) que $X \subset \{x;\ (cY_1 \cup cY_2)\ \mathcal{S}x\} = \{x;\ x\mathcal{S}\,c(Y_1 \cap Y_2)\}$, aussi par (3.1) on a $x <_{\mathcal{S}} Y_1 \cap Y_2$, ce qui démontre que $<_{\mathcal{S}}$ est un ordre topogène. □

Dans les théorèmes suivants on obtient une caractérisation des ordres semi-topogènes idempotents en utilisant les séparations Wallace.

Théorème 3.5. *Si $\mathcal{S}$ est une séparation Wallace qui vérifie la condition*

$$x\mathcal{S}Y \Rightarrow x\mathcal{S}kY,\ \text{où}\ kX = \{x;\ x\bar{\mathcal{S}}X\}, \tag{S_8}$$

alors l'ordre semi-topogène parfait $<_{\mathcal{S}} = \lambda(<)$ est idempotent.

Démonstration. Si S est une séparation Wallace, alors la fonction $k: 2^E \to 2^E$, définie dans (S_3) est une t-fonction expansive (voir th. 1 de [5]). En posant $C = \{x;\ x\mathcal{S}kcB\}$, on déduit $cB \subset kcB$ et $C \subset \{x;\ x\mathcal{S}cB\}$; par suite la condition (S_8) implique $\{x;\ x\mathcal{S}cB\} \subset \subset \{x;\ x\mathcal{S}kcB\} = C$, donc $C = \{x;\ x\mathcal{S}cB\}$. Si $x \in cC$, alors $x\overline{\mathcal{S}}cB$, d'où il résulte que $x \in \in kcB$, donc $cC \subset kcB$. Puis, si $z \in C$, alors on obtient $z \in kcB$, qui, avec l'inclusion ci-dessus, implique que $z <_{\mathcal{S}} C$; comme l'ordre $<_{\mathcal{S}}$ est parfait, on a $C <_{\mathcal{S}} C$. La relation $A <_{\mathcal{S}} B$ entraîne les implications; $x \in A \Rightarrow x <_{\mathcal{S}} B$; $x <_{\mathcal{S}} B \Rightarrow x\mathcal{S}cB$; $x\mathcal{S}cB \Rightarrow x \in C$, donc $A \subseteq C$. Enfin, de $x \in C$ il résulte que $x\mathcal{S}cB$, d'où $x \in B$, donc $C \subset B$. Les relations $A \subset C <_{\mathcal{S}} C \subset B$ entraînent $A <_{\mathcal{S}} C <_{\mathcal{S}} B$, donc $<_{\mathcal{S}}$ est idempotent. □

Réciproquement, on a le théorème suivant.

Théorème 3.6. *Si $<$ est un ordre semi-topogène parfait idempotent T_1-séparé, alors la séparation associée $\mathcal{S}_<$ vérifie la condition (S_8).*

Démonstration. Si $x\mathcal{S}_< X$, alors il suit que $x(< \cap <^c)cX$, d'où il résulte que $x < cX$ et parce que $<$ est idempotent, on déduit qu'il existe $C \subset E$ tel que $x < C < cX$. Si $y \in \in cC$, on a $y \neq x$ et en vertu de la définition (3.1) il résulte que $y < E - x$, donc $cC < E - x$, c'est-à-dire $x <^c C$ et par suite on a $x(< \cap <^c)C$. De $z \in C < cX$, il s'ensuit que pour tout $u \in X$ on a $u \neq z$ et donc $u < E - z$; puisque $<$ est parfait, il résulte que $X < E - z$, ou que $z <^c cX$. Cette relation et $z < cX$ impliquent que $z(< \cap <^c)cX$, d'où on a $C \subset \{x;\ x(< \cap <^c)cX\}$. De $x(< \cap <^c)C$ et $C \subset \{x;\ x(< \cap <^c)cX\}$ il résulte que $x(< \cap <^c)\{x;\ x(< \cap <^c)cX\}$ et de la définition de la séparation $\mathcal{S}_<$, on déduit que $\{x;\ x(< \cap <^c)cX\} = = \{x;\ x\mathcal{S}_< X\} = ckX$, donc $x(< \cap <^c)ck_< X$ et par suite $x\mathcal{S}_< k_< X$, c'est-à-dire que $\mathcal{S}_<$ vérifie la condition (S_8). □

Corollaire 3.7. *Les ordres semi-topogènes parfaits idempotents T_1-séparés se correspondent par l'isomorphisme λ avec les séparations Wallace qui satisfont aux conditions (S_3), (S_6) et (S_8).* □

Des théorèmes ci-dessus on déduit le théorème suivant de Wallace de caractérisation d'une topologie au moyen des séparations.

Théorème 3.8. *Les topologies classiques T_1-séparées sont en correspondance bijective avec les séparations qui satisfont aux axiomes $(S_3)-(S_8)$. Par cette bijection, à une fonction fermeture Kuratowski h déterminant une topologie T_1-séparée correspond la séparation $\mathcal{S}$ définie par: $X\mathcal{S}Y \Leftrightarrow X \cap hY = \emptyset = hX \cap Y$, et réciproquement, à une séparation vérifiant les axiomes $(S_3)-(S_8)$ correspond la fonction fermeture Kuratowski h définie par $hX = \{x;\ x\overline{\mathcal{S}}X\}$.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Amihăesei C. — *Sur les espaces quasi-topologiques et les ordres semi-topogènes.* Annales Univ. Sci. Budapest, sect. Math., XVII, 1974, 3—13.
2. Amihăesei C. — *Sur les ordres semi-topogènes finis.* An. şt. Univ. Iaşi, XX, 1974, 267—275.
3. Császár A. — *Grundlagen der allgemeinen Topologie*, Budapest, 1963.
4. Gacsályi S. — *On Hacque's E-mappings and on semi-topogenous orders*, Publ. Math. Debrecen, 12, 1965, 265—270.
5. Hammer P. C. — *Extended Topology; The Wallace functions of a separation*, Nieuw Arch. Wiskunde, 3 (IX), 1961, 25—33.
6. Wallace A. D. — *Separation spaces*, Annals of Math., 2, 42, 1941, 687—697.

Reçu le 2. VII. 1974

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „AL. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXII, s. I a, 1976, f. 1

PSEUDOCONFORMAL MAPPINGS IN SPACE. II

BY

GIOVANNI PORRU(*)

§ 1. Introduction and definitions. In a previous work [5] (see also [2]) we defined the $(\alpha;\ r,\ q)$-pseudoconformal mappings. We recall:

Definition 1. *Let $X = X(\zeta)$ be a diffeomorphism of a domain $D \subset R^n$ onto $D' \subset R^m$ $(m \geqslant n \geqslant 2)$ and let $\lambda_1^2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n^2$ be the proper values of $J^* J$, where J is the Jacobian matrix of $X(\xi)$. If $\alpha \geqslant 1$ is a real constant and if r and q are integers with $1 \leqslant r \leqslant n-1$, $2 \leqslant q \leqslant n-r+1$, $X(\zeta)$ is said $(\alpha;\ r,\ q)$-pseudoconformal, (abbreviated $(\alpha;\ r,\ q)$-pc) when the inequality:*

$$\lambda_2^q \leqslant \alpha(\lambda_r \ldots \lambda_{r+q-1})$$

holds for every $\zeta \in D$. $X(\zeta)$ is $(r,\ q)$-pc if it is $(\alpha;\ r,\ q)$-pc for some α finite.

Remark. In [5] D and D' were both domains in R^n. Now D' can be a suitable manifold n-dimensional in R^m $(m \geqslant n)$.

For $r = 1$ and $q = n$ we obtain the class of quasiconformal diffeomorphisms. For the other values of r and q we obtain wider classes, whose mappings haven't in general, the typical properties of the quasiconformal mappings. Most of these properties are still true if we take the restriction of the mapping $X(\zeta)$ $(\alpha;\ r,\ q)$-pc to suitable manifolds in D belonging to a family $N(r,\ q)$ defined in [5]. We also recall

Definition 2. *The C^1 q-dimensional manifold $V_q \subset D$ is said to belong to the family $N(r,\ q)$ if $V_q' = X(V_q)$ is at every point orthogonal to the semiaxes $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{r-1} \geqslant \lambda_{r+q} \geqslant \ldots \ldots \geqslant \lambda_n$ of $E(\zeta)$, where $E(\zeta)$ is the image of the unit ball B^n under the linear mapping $X'(\zeta)$.*

In this work we deal with manifolds that satisfy the following

Definition 3. *A C^1 q-dimensional manifold V_q is said to be admissible if there exists a domain $O \subset R^q$ and an $(\alpha;\ 1,\ q)$-pc diffeomorphism $\zeta(u)$ of O onto V_q.*

If $M_q^{V_q}(\Gamma)$ is the modulus of the curve family $\Gamma \subset V_q$ with respect to V_q, then we can show ([5]) that if $X(\zeta)$ is an $(\alpha;\ r,\ q)$-pc diffeomorphism, and if $V_q \in N(r,\ q)$ we have:

$$\sup_{\Gamma \subset V_q} [M_q^{V_q}(\Gamma)/M_q^{V_q'}(\Gamma')] \leqslant \alpha, \tag{1}$$

where $\Gamma' = X(\Gamma)$ and the supremum is taken over all curve families Γ in V_q such that $M_q^{V_q}(\Gamma)$ and $M_q^{V_q'}(\Gamma')$ are not both zero or infinite.

In this work, at section § 2, we show that if $X(\zeta)$ is an $(\alpha;\ r,\ q)$-pc mapping and if $V_q \in N(r,\ q)$ we have also

$$\sup_{\Gamma \subset V_q} [M_q^{V_q'}(\Gamma')/M_q^{V_q}(\Gamma)] \leqslant \alpha^{q-1}; \tag{2}$$

(*) Work supported by G.N.A.F.A. of C.N.R.