2. Enriques F. — *Intorno alla memoria, Le superficie con infinite transformazioni proiettivè in sè stesse*, Ibidem s. VII Vol. IV—V — 1893-94.
3. Fano G. — *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in sè stesse* Rend. Acc. Lincei s. V Vol. IV, 1895 p. 149—155.
4. Marcus F. — *Sur les surfaces qui admettent ∞^2 transformations projectives en elles-mêmes*, Academia Nazionale dei XL Roma (in press).
5. Fubini G. — *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*, Rendiconti Circolo Matematico di Palermo T. 43, 1—46, (1919).
6. Marcus F. — *Sur les surfaces de troisième espèce de Terracini*, Czehoslovak Math. Journal T. 6 (81) 559—562, Praga 1956.
7. Wilczynski E. Y. — *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, New York, Chelsea.
8. Wilczynski E. Y. — *Über Flächen mit unbestimten Direktrixkurven*, Mathematische Annalen Vol. 76, 1915, p. 129—160.
9. Wilczynski E. Y. — *A new representation for a certain class of surfaces with indetermined directrix curves*, Communication, see Bulletin of the American Math. Soc. Vol. XX 1913-14, p. 312.
10. Terracini A. — *Sulle superficie le cui asintotiche dei due sistemi sono cubiche sghembe*. Selecta. Volume primo Edizione Cremonese Roma p. 130—153.
11. Rozet O. et Legrain-Pissard N. — *Sur les congruences dont une des nappes focales et une surface ayant ses asymptotiques des deux familles dans des complexes linéaires*. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, No. 9—10, pag. 280—296, 1954.
12. Fubini G., Cech E. — *Geometria proiettiva differenziale*. T. 1 et T. 2, N. Zanichelli Bologna 1926.
13. Fubini G., Cech E. — *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, Paris, Gauthier-Villars 1931.
14. Mayer O. — *Contribution à l'étude des surfaces minima projectives*, Bull. des Sci. Math. 1932, T.LVI. Paris.
15. Demoulin A. — C. R. Acad. Sc. Paris, 147, 1908, p. 493.
16. Demoulin A. — C. R. Acad. Sc. Paris V. 179, 1924, p. 20.
17. Lane E. P., MacQuenn M. L. — *Surfaces whose asymptotic curves are twisted cubics*. American Journal of Math. Vol. 60, 1938, p. 337—344.
18. Boruvka O. — *Sur certains types de surfaces qui sont projectivement applicables sur elles-mêmes*, Publications de la Faculté ds Sciences de l'Université Masaryk 1924, Brno.
19. Cartan E. — *Sur la déformation projective des surfaces*, Ann. Ecole Normale Supérieure, T. 37 (1920) p. 259—356.

Received 13. II. 1975

Haifa, Israel
Technion I. I. T.
Department of Mathematics
and
Bar-Ilan University
Ramat-Gan

Analele ştiinţifice ale Universităţii „AL. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXII, s. I a, 1976, f. 1

SUR UNE VARIÉTÉ PRESQUE PARACOKÄHLÉRIENNE MUNIE D'UNE CONNEXION SELF-ORTHOGONALE INVOLUTIVE

PAR

R. ROŞCA, L. VANHECKE

On considère une C_∞-variété pseudo-riemannienne V_k^{2n+1} d'indice d'inertie $n+1$ qui est douée d'une structure cosymplectique $\mathbf{C}$ et structurée par une connexion self-orthogonale involutive ∇_I [7]. Une hypersurface $V_{\mathcal{H}}$, horizontale par rapport à $\mathbf{C}$, est une variété parakählérienne minimale dont les $2n$ courbures principales sont $\pm (a^i a^{i'})^{1/2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $i' = i + n)$. Eu égard à la connexion ∇_I, à la forme symplectique canonique Ω de $V_{\mathcal{H}}$ est naturellement associée une 2-forme presque symplectique $\Omega' = \Sigma a^i a^{i'} \theta^i \wedge \theta^{i'}$ qui est telle que les coefficients sont des invariants par rapport au groupe symplectique $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ de Ω et l'agrégat de Pfaff d'ordre maximal de Ω' est homothétique à la courbure gaussienne K de $V_{\mathcal{H}}$. En faisant usage de l'a-opérateur et de la notion de a-concourance définie dans [9] on démontre que si $V_{\mathcal{H}}$ admet un champ normal $\mathbf{N}$ a-concourant alors $V_{\mathcal{H}}$ ne possède que deux courbures principales $\pm \dfrac{1}{\|\mathbf{N}\|}$ qui sont de plus constantes. On retrouve ainsi un type d'hypersurfaces qui a été étudié par plusieurs auteurs mais dans des contextes différents [2, 6, 12]. Dans ce cas Ω' est homothétique à Ω et dans un sous-cas particulier $V_{\mathcal{H}}$ est einsteinienne. L'a-opérateur permet de plus de formuler la propriété intéressante suivante : Soient $\mathbf{X}$ et ${}_a\mathbf{X}$ respectivement un champ isotrope (d'un des sous-espaces tangentiels self-orthogonaux de $T_x(V_{\mathcal{H}})$) et le a-champ correspondant. Si $\alpha_{\mathbf{X}}$ este la 1-forme duale de $\mathbf{X}$ par rapport à Ω, alors la condition nécessaire et suffisante pour que $\alpha_{\mathbf{X}}$ soit cofermée est que ${}_a\mathbf{X}$ soit un automorphisme de la $SL(2n; \mathbf{R})$-structure sur $V_{\mathcal{H}}$. Enfin, la qualité soit pour $\mathbf{X}$ soit pour ${}_a\mathbf{X}$ d'être parallèle dans le faisceau tangent de $V_{\mathcal{H}}$ entraîne une série de propriétés qui sont liées aux systèmes hamiltoniens sur $(V_{\mathcal{H}}, \Omega)$, à l'harmonicité et à la Ω-harmonicité (dans le sens de P. Libermann [5]) des covecteurs hamiltoniens et aussi à certaines transformations infinitésimales conformes sur $V_{\mathcal{H}}$.

1. Soit V^{2n+1} une C^∞-variété pseudo-riemannienne *d'indice d'inertie* $n+1$ [11]. En chaque point $x \in V^{2n+1}$ on peut écrire

$$T_x(V^{2n+1}) = \mathcal{H}_x^{2n} \oplus \mathcal{D}_x \tag{1}$$

où $T_x(V^{2n+1})$, $\mathcal{H}_x^{2n}$ et $\mathcal{D}_x$ sont respectivement l'espace tangent à V^{2n+1}, un sous-espace *parahermitien* [5] vectoriel de dimension $2n$ et une droite temporelle. Soient $\mathcal{S}_x^{+n}$ et $\mathcal{S}_x^{-n}$ respectivement l'espace *temporel* et l'espace *spatial* qui définissent un automorphisme $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{H}_x^{2n}$ tel que $\mathcal{U}^2 = +1$ [5]. Le champ $\mathcal{D}_x$ est orthogonal à $\mathcal{H}_x^{2n}$ et $\mathcal{U}(\mathbf{X}) = 0$ pour tout champ $\mathbf{X} \in \mathcal{D}_x$.

Soient $\mathbf{h}_i$, $\mathbf{h}_{i'}$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n;\ i' = i + n)$ les vecteurs isotropes réels qui définissent la *base canonique symplectique* de $\mathcal{H}_x^{2n}$ et $\mathbf{h} = \mathbf{h}_{2n+1}$ le *vecteur unitaire anisotrope* (temporel)

de $\mathcal{D}_x$. Si $e_i \in \mathcal{S}_p^{+n}$ et $e_i \in \mathcal{S}_p^{-n}$ forment une base orthonormale, alors moyennant la transformation

$$h_i = \frac{e_i + \mathcal{U}_{e_i}}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

on peut décomposer $\mathcal{H}_x^{2n}$ en

$$\mathcal{H}_x^{2n} = \mathcal{J}_x^n \oplus \mathcal{J}_x'^n, \tag{3}$$

où $\mathcal{J}_x^n$ et $\mathcal{J}_x'^n$ sont deux sous-espaces vectoriels *self-orthogonaux* [11] (isotrope de dimension maximale n). Les repères $\{x, h_A;\ A, B, C = 1, 2, \ldots, 2n+1\}$ sont normés et de (2) on a

$$\begin{gathered} < h_i, h_{i'} > = 1, \quad < h, h > = 1, \quad < h_i, h_A > = 0, \quad < h_{i'}, h_B > = 0, \\ A \neq i', \quad B \neq i, \quad < h, h_C > = 0, \quad C \neq 2n+1. \end{gathered} \tag{4}$$

Si $\{\theta^A\}$ est le corepère associé, alors *l'élément linéaire* dx de V^{2n+1} s'écrit

$$dx = \theta^A \oplus h_A \tag{5}$$

et la métrique ds^2 de V^{2n+1} est exprimée par

$$ds^2 = \mathcal{X} + (\theta)^2. \tag{5'}$$

Dans (5') $\mathcal{X} = 2 \sum_i \theta^i \theta^{i'}$ est la *forme quadratique parahermitienne* de $\mathcal{H}_x^{2n}$ et $\theta = \theta^{2n+1}$ est le covecteur temporel associé à h. La forme $\mathcal{X}$ est échangeable avec la 2-forme locale (de rang $2n$) $\Omega = \sum_i \theta^i \wedge \theta^{i'}$ et les deux sont laissées invariantes par le *groupe paraunitaire* $\mathring{\mathcal{U}}^n$ [5]. Ce groupe est isomorphe au groupe linéaire réel L^n [5].

En nous rapportant aux définitions données dans [1], [5] nous dirons que la variété est une *variété presque paracohermitienne.*

Si $\mathcal{J} = U\{x, h_A\}$ est le fibré principal des repères $\{x, h_A\}$, alors V^{2n+1} est structurée par *la connexion*

$$\nabla h_A = \theta_A^B \oplus h_B, \tag{6}$$

où $\theta_A^B = l_{AC}^B\ \theta^C$ sont les formes de connexion sur le fibré principal $\mathcal{J}$. En vertu de (4) il vient

$$\theta_s^r + \theta_{r'}^{s'} = 0, \quad r, s = 1, 2, \ldots, 2n, \quad ' = \pm n; \tag{7}$$

$$\theta_{2n+1}^{2n+1} = 0, \quad \theta_i^{2n+1} + \theta_{2n+1}^{i'} = 0, \quad \theta_{2n+1}^i + \theta_{i'}^{2n+1} = 0. \tag{7'}$$

La connexion ∇ sur V^{2n+1} étant sans torsion, les deux groupes *d'équations de structure* sont

$$d \wedge \theta^A = \theta^B \wedge \theta_B^A, \tag{8}$$

$$d \wedge \theta_A^B = \theta_A^C \wedge \theta_C^B + \Omega_A^B \tag{8'}$$

où Ω_A^B sont les 2-formes de courbure.

2. Considérons sur V^{2n+1} la *structure presque cosymplectique* locale $\mathbf{C}_{pc}$ définie par Ω et la forme θ (covecteur de Reeb). X étant un champ *horizontal* quelconque de la structure $\mathbf{C}_{pc}$, on peut en vertu de (3) décomposer la composante horizontale $(\nabla X)_{\mathcal{H}}$ de ∇X en

$$(\nabla X)_{\mathcal{H}} = (\nabla X)_{\mathcal{J}} + (\nabla X)_{\mathcal{J}'}. \tag{9}$$

En utilisant la terminologie de K. Yano et B. Y. Chen [13] nous disons que X est *parallèle dans le faisceau self-orthogonal* $U\mathcal{J}_x^n$ (resp. $U\mathcal{J}_x'^n$) si $(\nabla X)_{\mathcal{J}} = 0$ (resp. $(\nabla X)_{\mathcal{J}'} = 0$).

Eu égard à (6) et (9) les conditions qui expriment que les vecteurs de base $h_i \in \mathcal{J}_x^n$ et $h_{i'} \in \mathcal{J}_x'^n$ sont chacun parallèles dans le faisceau self-orthogonal *supplémentaire* par rapport à $\mathcal{H}_x^{2n}$ s'écrivent

$$\theta_{i'}^k = 0 \Leftrightarrow (\nabla h_{i'})_{\mathcal{J}'} = 0, \tag{10}$$

$$\theta_i^{k'} = 0 \Leftrightarrow (\nabla h_i)_{\mathcal{J}} = 0. \tag{11}$$

Dans les considérations à suivre nous supposerons que le covecteur de Reeb est fermé et dans ce cas la connexion est une *connexion self-orthogonale involutive* (notée par ∇_I) [7].

Si la structure $\mathbf{C}_{pc}$ devient une structure cosymplectique (notée par $\mathbf{C}$) la variété V^{2n+1} sera nommée une *variété presque paracokählérienne munie d'une connexion* ∇_I (notée par V_k^{2n+1}). Eu égard à (8), (10) et (11) les conditions

$$d \wedge \Omega = 0, \quad d \wedge \theta = 0 \tag{12}$$

donnent

$$\theta_i^{2n+1} = l_{ij}^{2n+1}\ \theta^j, \quad l_{ij}^{2n+1} = l_{ji}^{2n+1}, \quad \theta_{i'}^{2n+1} = l_{i'j}^{2n+1}\ \theta^{j'}, \quad l_{i'j'}^{2n+1} = l_{j'i'}^{2n+1}. \tag{13}$$

Par un changement de base dans $\mathcal{J}_x^n$ et $\mathcal{J}_x'^n$ on peut toujours supposer

$$\theta_i^{2n+1} = a^i \theta^i, \quad \theta_{i'}^{2n+1} = a^{i'}\ \theta^{i'}. \tag{14}$$

La différentiation extérieure de (10) et (11) donnent alors

$$\Omega_i^{k'} = a^i a^k \theta^i \wedge \theta^k, \quad \Omega_{i'}^k = a^{i'}\ a^{k'}\ \theta^{i'} \wedge \theta^{k'}. \tag{15}$$

En premier lieu, il est facile de voir que chacun des sous-espaces $\mathcal{J}_x$, $\mathcal{J}_x'$ et $\mathcal{D}_x$ définit une *distribution involutive.* En second lieu, considérons les deux sous-espaces

$$\mathcal{R}_x = \mathcal{J}_x \oplus \mathcal{D}_x, \quad \mathcal{R}_x' = \mathcal{J}_x' \oplus \mathcal{D}_x. \tag{16}$$

Si $\mathcal{R}_x^\perp$ et $\mathcal{R}_x'^\perp$ désignent les espaces orthogonaux de $\mathcal{R}_x$ et $\mathcal{R}_x'$ on a

$$\mathcal{R}_x^\perp = \mathcal{J}_x \subset \mathcal{R}_x, \quad \mathcal{R}_x'^\perp = \mathcal{J}_x' \subset \mathcal{R}_x'. \tag{17}$$

Conformément aux définitions données dans [11] $\mathcal{R}_x$ et $\mathcal{R}_x'$ sont des sous-espaces vectoriels *co-isotropes* et les sous-variétés intégrales des distributions involutives qu'ils définissent sont des sous-variétés co-isotropes.

3. Une *hypersurface horizontale* $V_{\mathcal{H}}$ de V_k^{2n+1} par rapport à $\mathbf{C}$ étant définie par

$$\theta = 0, \tag{18}$$

on trouve que la *seconde forme fondamentale* associée à l'immersion $f : V_{\mathcal{H}} \to V_k^{2n+1}$ est exprimée par

$$\varphi = - < df(x), \ \nabla h > = \theta^i\ \theta_i^{2n+1} + \theta^{i'}\ \theta_{i'}^{2n+1} \tag{19}$$

et eu égard à (14) elle s'écrit

$$\varphi = \sum_i \{a^i (\theta^i)^2 + a'^i\ (\theta^{i'})^2\}. \tag{20}$$

(On prend la même notation pour les formes induites sur $V_{\mathcal{H}}$). De (20) on déduit que les valeurs propers par rapport au ds^2 *(courbures principales)* sont déterminées par

$$\prod_{i=1}^{n} (\rho^2 - a^i a^{i'}) = 0. \tag{21}$$

Il résulte aussitôt de (20) que l'immersion f est *minimale* et que les courbures principales sont deux par deux de signe contraire. Si K est la *courbure gaussienne* de $V_{\mathcal{H}}$ on a

$$K = \prod_{i=1}^{n} a^i. \tag{22}$$

D'autre part, la différentiation des composantes d'homothétie θ_i^j de la connexion ∇_I nous donne à l'aide de (8') et (14)

$$d \wedge \tau = \sum_i \Omega_i^i - \Omega' \tag{23}$$

où

$$\tau = \sum_i \theta_i^i, \ (\text{1-}\textit{forme d'Einstein}), \tag{24}$$

$$\Omega' = \sum_i a^i a^{i'} \theta^i \wedge \theta^{i'}. \tag{25}$$

$\sum_i \Omega_i^i$ est la *2-forme de Ricci* induite de V_k^{2n+1}, la 2-forme de Ricci de $V_{\mathcal{H}}$ étant

$$\sum_i \Omega_i^i - \Omega'. \tag{26}$$

Il suit de (22) et (25) que

$$K \neq 0 \Leftrightarrow (\Omega')^n \neq 0$$

et si $K \neq 0$ l'on voit que sur toute $V_{\mathcal{H}}$ de V_k^{2n+1} on peut associer à Ω la forme presque symplectique Ω' qu'on dénomme la *2-forme associée*. Mais la forme Ω étant canonique, le *polynôme caractéristique* de Ω' [10] est

$$(\Omega' - s\Omega)^n \tag{27}$$

ou

$$w(s)\eta \tag{27'}$$

avec

$$\eta = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^n \wedge \theta^{1'} \wedge \theta^{2'} \wedge \ldots \wedge \theta^{n'}, \tag{28}$$

$$w(s) = s^n - \rho_1 s^{n-1} + \ldots + (-1)^n \rho_n. \tag{29}$$

De (25) on trouve que les racines caractéristiques s_i sont

$$s_i = a^i a^{i'}. \tag{30}$$

On peut donc dire que les produits $a^i a^{i'}$ sont des invariants de Ω' par rapport au groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{R})$ de Ω et *l'agrégat de Pfaff* d'ordre $2n$ est égal à la courbure gaussienne K à un facteur constant près. De plus, les deux formes Ω et Ω' déterminent une *involution*

$$\lambda\Omega + \lambda'\Omega' \tag{31}$$

dont la matrice associée est

$$M = \frac{1}{4}\{(M_\Omega \times M_{\Omega'})^2 - M_\Omega^2 \times M_{\Omega'}^2\} \tag{32}$$

où M_Ω resp. $M_{\Omega'}$ est la matrice de Ω resp. Ω'. On trouve aussitôt $M = 0$ ce qui montre que l'involution (31) est *singulière*.

Conformément aux définitions données dans [5] $V_{\mathcal{H}}$ est une *variété parakählérienne* et elle este structurée par une *connexion spin-euclidienne propre* si et seulement si $\tau = 0$ [3].

Nous énonçons le

Théorème. *Soient $f : V_{\mathcal{H}} \to V_k^{2n+1}$, Ω et $\pm (a^i a^{i'})^{1/2}$ respectivement l'immersion d'une hypersurface horizontale $V_{\mathcal{H}}$ dans V_k^{2n+1}, la forme symplectique de $V_{\mathcal{H}}$ et les $2n$ courbures de $V_{\mathcal{H}}$. Alors*

(i) $V_{\mathcal{H}}$ est une variété parakählérienne ;

(ii) l'immersion f est minimale ;

(iii) à Ω il correspond (dans le cas $K \neq 0$) une 2-forme associée presque symplectique Ω' dont le polynôme caractéristique par rapport à Ω a les produits $a^i a^{i'}$ pour racines ; ces produits sont des invariants du groupe symplectique de Ω.

(iv) l'agrégat de Pfaff d'ordre maximal de Ω' est homothétique à la courbure gaussienne K de $V_{\mathcal{H}}$;

(v) Ω et Ω' définissent une involution singulière.

4. L'élément linéaire de $V_{\mathcal{H}}$ est

$$df(x) = \theta^i \otimes \mathbf{h}_i + \theta^{i'} \otimes \mathbf{h}_{i'}. \tag{33}$$

Dans [9] nous avons défini la *1-forme vectorielle associée* ${}_a df(x)$ par

$${}_a df(x) = \theta^{i'} \otimes \mathbf{h}_i + \theta^{i'} \otimes \mathbf{h}_{i'}. \tag{34}$$

L'opérateur a est alors défini sur une variété symplectique par

$${}_a\theta^i = \theta^{i'}, \quad {}_a\theta^{i'} = \theta^i. \tag{35}$$

Il est facile de vérifier les propriétés suivantes de cet opérateur :

(i) $a^2 = 1$;

(ii) a est *symplectiquement anti-canonique* [11], c'est-à-dire ${}_a\Omega = -\Omega$;

(iii) ${}_a(\alpha \wedge \beta) = {}_a\alpha \wedge {}_a\beta$;

(iv) a commute ou anticommute avec l'opérateur d'adjonction $*$ suivant que n est pair ou impair :

$$a^* = (-1)^n * a.$$

D'autre part, conformément à la définition que nous avons donnée dans [9], le champ

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{h}, \quad \lambda \in \mathcal{D}(V_{\mathcal{H}}), \tag{36}$$

est *a-concourant* s'il satisfait à

$${}_a df(x) + \nabla \mathbf{N} = 0. \tag{37}$$

A l'aide de (6), (14) et (34) cette condition s'écrit

$$a^i = a^{i'} = \frac{1}{\lambda}, \quad d\lambda = 0. \tag{38}$$

En nous rapportant à (21), (25) et (26) on peut donc formuler le

Théorème. *Si $V_{\mathcal{H}}$ admet un champ normal $\mathbf{N}$ a-concourant alors*

(i) $\|\mathbf{N}\| = |\lambda|$ est constant ;

(ii) $V_{\mathcal{H}}$ ne possède que deux courbures principales constantes $(\pm 1/\lambda)$;

(iii) la 2-forme associée Ω' est homothétique à Ω avec $1/\lambda^2$ comme facteur ;

(iv) si la 2-forme de Ricci de V_k^{2n+1} induite est conforme à Ω, alors $V_{\mathcal{H}}$ est einsteinienne.

Remarque. La propriété (ii) fait que $V_{\mathcal{H}}$ appartient au même type d'hypersurfaces que celles qui sont étudiées dans [2], [6], [12].

5. Considérons maintenant les deux champs *isotropes* définis en chaque point $f(x)$ par

$$X = \lambda^i h_i \in \mathcal{J}_{f(x)}, \quad X' = \lambda^{i'} h_{i'} \in \mathcal{J}'_{f(x)} \tag{39}$$

et les *a-champs* correspondants

$$_aX = \lambda^i h_{i'} \in \mathcal{J}'_{f(x)}, \quad _aX' = \lambda^{i'} h_i \in \mathcal{J}'_{f(x)} \tag{40}$$

qu'on obtient de X et X' à l'aide des isomorphismes

$$\begin{aligned} {}_aX \lrcorner\, \Omega &= -\, a(X \lrcorner\, \Omega) \\ {}_aX' \lrcorner\, \Omega &= -\, a(X' \lrcorner\, \Omega) \end{aligned} \tag{41}$$

On en déduit aussitôt que

$$\sum_i \lambda^i \lambda^{i'} = \langle X, X' \rangle = \langle {}_aX, {}_aX' \rangle = \Omega(X, X') = -\,\Omega({}_aX, {}_aX'). \tag{42}$$

Les *formes duales* des champs (39) ont pour expression

$$\alpha_X = \sum_i \lambda^i \theta^{i'}, \quad \alpha_{X'} = -\sum_i \lambda^{i'} \theta^i \tag{43}$$

et l'on a

$$\alpha_{{}_aX} = -\,{}_a\alpha_X, \quad \alpha_{{}_aX'} = -\,{}_a\alpha_{X'}. \tag{44}$$

L'adjointe de α_X (resp. $\alpha_{X'}$) par rapport à la métrique étant exprimée par

$$_*\alpha_X = \sum (-1)^{n+i-1} \lambda^i \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^n \wedge \theta^{1'} \wedge \theta^{2'} \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}^{i'} \wedge \ldots \wedge \theta^{n'}, \tag{45}$$

resp.

$$_*\alpha_{X'} = -\sum (-1)^{i-1} \lambda^{i'} \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}^i \wedge \ldots \wedge \theta^n \wedge \theta^{1'} \wedge \theta^{2'} \wedge \ldots \wedge \theta^{n'} \tag{46}$$

ou

$$_*\alpha_X = {}_aX \lrcorner\, \eta, \quad _*\alpha_{X'} = -\,{}_aX' \lrcorner\, \eta, \tag{47}$$

on trouve les formules remarquables

$$d \wedge {}_*\alpha_X = (\operatorname{div} {}_aX)\eta, \quad d \wedge {}_*\alpha_{X'} = -\,(\operatorname{div} {}_aX')\,\eta. \tag{48}$$

d'où le

Théorème. *Soient $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ les deux espaces self-orthogonaux de l'espace tangent en chaque point de $V_{\mathcal{H}}$ et soit $X \in \mathcal{J}$ (resp. $X' \in \mathcal{J}'$) un champ isotrope et $_aX$ (resp. $_aX'$) le a-champ correspondant. Si α_X (resp. $\alpha_{X'}$) est la forme duale de X (resp. X') alors la condition nécessaire et suffisante pour que α_X (resp. $\alpha_{X'}$) soit cofermée est que l'a-champ correspondant soit un automorphisme de la $SL(2n, R)$-structure sur $V_{\mathcal{H}}$.*

On peut évidemment formuler un théorème analogue pour la variété V_k^{2n+1}.

6. Eu égard à (14) nous sommes amenés à considérer les champs X et X' de (39) où

$$\lambda^i = a^i, \quad \lambda^{i'} = a^{i'}. \tag{49}$$

En tout point $f(x)$ de $V_{\mathcal{H}}$ on a pour un champ $Z \in T_{f(x)}(V_{\mathcal{H}})$:

$$\nabla Z = (\nabla Z)_t + (\nabla Z)_n, \tag{50}$$

où $(\nabla X)_t \in T_{f(x)}(V_{\mathcal{H}})$, $(\nabla X)_n \in \mathcal{D}_{f(x)}$. Nous dirons d'après [13] que Z est parallèle dans le faisceau tangent $UT_{f(x)}(V_{\mathcal{H}}) = U(\mathcal{J}_{f(x)} \oplus \mathcal{J}'_{f(x)})$ si

$$(\nabla Z)_t = 0. \tag{51}$$

A l'aide de (6), (14), (39) et (49) on déduit aussitôt :

$$\text{(S)}\ (\Delta X)_t = 0 \Leftrightarrow da^i + a^j \theta^i_j = 0, \quad (\nabla X')_t = 0 \Leftrightarrow da^{i'} - \sum_j a^{j'} \theta^i_j = 0, \tag{52}$$

$$\text{(S')}\ (\nabla_a X)_t = 0 \Leftrightarrow da^{i'} + a^{j'} \theta^i_j = 0 \quad (\nabla_a X')_t = 0 \Leftrightarrow da^i - \sum a^j \theta^i_j = 0. \tag{53}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (S) (resp. (S')) soit fermé sont dans les deux cas

$$\det(\Omega^i_j - a^j a^{i'} \theta^j \wedge \theta^{i'}) = 0 = \det(\Omega^j_i - a^i a^{j'} \theta^i \wedge \theta^{j'}). \tag{54}$$

Les variétés V_k^{2n+1} qui possèdent de tels champs sur $V_{\mathcal{H}}$ seront notées dans le premier cas par $\tilde{V}_k^{2n+1}$ et dans le second cas par $\tilde{\tilde{V}}_k^{2n+1}$.

En premier lieu on déduit que pour $\tilde{V}_k^{2n+1}$ et $\tilde{\tilde{V}}_k^{2n+1}$ on a sur la variété horizontale $V_{\mathcal{H}}$.

$$\sum_i a^i a^{i'} = \text{constante} \tag{55}$$

et que les formes duales des champs parallèles resp. des a-champs sont *fermées* pour $\tilde{V}_k^{2n+1}$ resp. $\tilde{\tilde{V}}_k^{2n+1}$. Il résulte de là que les champs X et X' (resp. $_aX$ et $_aX'$) paraissent comme des *systèmes hamiltoniens* sur $V_{\mathcal{H}}$. De plus, en notant par $(\ ,\ )_P$ la *parenthèse de Poisson* [4] des formes duales des systèmes hamiltoniens, la relation (55) permet de voir que

$$(\alpha_X, \alpha_{X'}) = 0 \text{ resp. } (\alpha_{{}_aX}, \alpha_{{}_aX'})_P = 0. \tag{56}$$

En nous rapportant à (48) on trouve aussitôt pour $\tilde{\tilde{V}}_k^{2n+1}$:

$$\operatorname{div} {}_aX = 0 = \operatorname{div} {}_aX' \tag{57}$$

et pour $\tilde{V}_k^{2n+1}$

$$\operatorname{div} X = 0 = \operatorname{div} X'. \tag{58}$$

D'autre part, si l'on considère *l'adjointe symplectique* [5]

$$_{\tilde{*}}\sigma_Z = \sigma_Z \wedge \frac{\Omega^{n-1}}{(n-1)!} \tag{59}$$

d'une forme duale σ_Z d'un champ Z, on trouve pour $\tilde{V}_k^{2n+1}$:

$$d \wedge {}_{\tilde{*}}\alpha_X = 0 = d \wedge {}_{\tilde{*}}\alpha_{X'} \tag{60}$$

et pour $\tilde{\tilde{V}}_k^{2n+1}$

$$d \wedge {}_{\tilde{*}}\alpha_{{}_aX} = 0 = d \wedge {}_{\tilde{*}}\alpha_{{}_aX'}. \tag{60'}$$

On a en effet

$$_{\tilde{*}}\alpha_X = {}_*\alpha_{{}_aX}, \quad _{\tilde{*}}\alpha_{X'} = -\,{}_*\alpha_{{}_aX'}, \quad _{\tilde{*}}\alpha_{{}_aX} = -\,{}_*\alpha_X, \quad _{\tilde{*}}\alpha_{{}_aX'} = {}_*\alpha_X. \tag{61}$$

On a donc le

Théorème. *Soit* $\widetilde{V}_k^{2n+1}$ (resp. $\widetilde{\widetilde{V}}_k^{2n+1}$) *une* V_k^{2n+1} *admettant deux champs* $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{X}'$ (resp. ${}_a\mathbf{X}$ *et* ${}_a\mathbf{X}'$) *qui sont parallèles dans le faisceau tangent de* $V_{\mathcal{H}}$. *Alors*

(i) *les champs* $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$ (resp. ${}_a\mathbf{X}$, ${}_a\mathbf{X}'$) *sont des systèmes hamiltoniens de la structure symplectique et la parenthèse de Poisson des formes duales est nulle ;*

(ii) *les formes duales* $\alpha_{\mathbf{X}}$, $\alpha_{\mathbf{X}'}$ (resp. $\alpha_{a\mathbf{X}}$, $\alpha_{a\mathbf{X}'}$) *sont harmoniques sur* $\widetilde{V}_k^{2n+1}$ (resp. $\widetilde{\widetilde{V}}_k^{2n+1}$) *et symplectiquement harmoniques sur* $\widetilde{V}_k^{2n+1}$ (resp. $\widetilde{\widetilde{V}}_k^{2n+1}$).

7. Notons par

$$\eta' = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^n, \quad \eta'' = \theta^{1'} \wedge \theta^{2'} \wedge \dots \wedge \theta^{n'} \tag{62}$$

les *n-formes simples self-orthogonales*. En faisant usage de (52) on trouve

$$d \wedge (\mathbf{X} \lrcorner \eta') = -\tau \wedge (\mathbf{X} \lrcorner \eta'), \quad d \wedge (\mathbf{X}' \lrcorner \eta'') = \tau \wedge (\mathbf{X}' \lrcorner \eta'') \tag{63}$$

et pour (53) on a

$$d \wedge ({}_a\mathbf{X} \lrcorner \eta'') = \tau \wedge ({}_a\mathbf{X} \lrcorner \eta''), \quad d \wedge ({}_a\mathbf{X}' \lrcorner \eta') = -\tau \wedge ({}_a\mathbf{X}' \lrcorner \eta'') \tag{64}$$

d'où

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \eta' = -(\mathbf{X} \lrcorner \tau)\eta', \quad \mathcal{L}_{\mathbf{X}'} \eta'' = (\mathbf{X}' \lrcorner \tau)\eta'', \tag{65}$$

$$\mathcal{L}_{a\mathbf{X}'} \eta'' = ({}_a\mathbf{X} \lrcorner \tau)\eta'', \quad \mathcal{L}_{a\mathbf{X}'} \eta' = -({}_a\mathbf{X}' \lrcorner \tau)\eta'.$$

On peut donc formuler le

Théorème. *Etant donnée une* $\widetilde{V}_k^{2n+1}$ (resp. $\widetilde{\widetilde{V}}_k^{2n+1}$), *le champ* $\mathbf{X}$ (resp. ${}_a\mathbf{X}'$) *définit une transformation conforme de la n-forme simple self-orthogonale* η' *et le champ* $\mathbf{X}'$ (resp. ${}_a\mathbf{X}$) *à la même propriété par rapport à* η''. *Si la connexion est une connexion spin-euclidienne propre* ($\tau = 0$) *alors ces champs sont des automorphismes infinitésimaux des n-formes respectives.*

8. Considérons maintenant l'immersion $g : \widetilde{V}_{\mathcal{H}} \to \widetilde{V}_k^{2n+1}$ où $\widetilde{V}_{\mathcal{H}}$ est une *variété horizontale et parakählérienne de codimension trois*. Elle peut être définie analytiquement par

$$\theta^n = \theta^{n'} = \theta = 0. \tag{66}$$

On peut s'assurer que *l'immersion g est minimale* et on peut démontrer que cette propriété est aussi valable pour n'importe quelle codimension (voir aussi [8]).

Un vecteur normal $\mathbf{N}$ peut s'écrire

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\mathcal{H}} + \mu \mathbf{E} \tag{67}$$

où

$$\mathbf{N}_{\mathcal{H}} = \mu_n \mathbf{h}_n + \mu_{n'} \mathbf{h}_{n'} \tag{68}$$

est la partie horizontale et $\mathbf{E}$ le vecteur de Reeb par rapport à la structure cosymplectique $\mathbf{C}$. Le vecteur $\mathbf{N}_{\mathcal{H}}$ est donc un vecteur du 2-*plan hermitien* $P_{\mathcal{H}} \equiv \{\mathbf{h}_n, \mathbf{h}_{n'}\}$. Dans le cas qui nous occupe la seconde forme fondamentale dans la direction du vecteur normal est exprimée par

$$\begin{aligned} \varphi &= -\langle dg(x), \nabla \mathbf{N} \rangle \\ &= -\mu_n \sum_j \theta^{j'} \theta_n^j + \mu_{n'} \theta^j \theta_j^n + \mu \sum_j \{a^j (\theta^j)^2 + a^{j'} (\theta^{j'})^2\}. \end{aligned} \tag{69}$$

En faisant usage des équations d'intégrabilité de (66) on trouve que les valeurs propres ρ de φ par rapport au ds^2 satisfont à une équation de degré $n-1$ dans ρ^2 et ceci démontre le caractère minimale de g.

9. Supposons maintenant que le vecteur $\mathbf{N}$ (67), (68) est un vecteur *a-concourant*. En vertu de ce qu'on a dit n°4 les conditions nécessaires et suffisantes pour l'*a*-concourance sont

$$\begin{aligned} &(1 - \mu a^{i'})\theta^{i'} + \mu_n \theta_n^i = 0, && d\mu_n + \mu_n \theta_n^n = 0, \\ &(1 - \mu a^i)\theta^i - \mu_{n'} \theta_i^n = 0, && d\mu_{n'} - \mu_n \theta_n^n = 0, \\ & && d\mu = 0. \end{aligned} \tag{70}$$

Nous supposerons que ce système est fermé et dans ce cas on déduit de (70) :

(i) $\| \mathbf{N}_{\mathcal{H}} \|$ et $\| \mu \mathbf{E} \|$ sont constantes ;

(ii) la composante d'homothétie θ_n^n correspondant aux vecteurs isotropes de $P_{\mathcal{H}}$ est fermée ;

(iii) l'équation des courbures principales dans la direction d'un vecteur unitaire

$$\mathbf{M} = \lambda_n \mathbf{h}_n + \lambda_{n'} \mathbf{h}_{n'} + \lambda \mathbf{h}_n, \quad \lambda^2 + 2\lambda_n \lambda_{n'} = 1 \tag{71}$$

est

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \rho^2 - \left[\lambda a^i + \frac{\lambda_{n'}}{\mu_{n'}}(1 - \mu a^i)\right]\left[\lambda a^{i'} + \frac{\lambda_n}{\mu_n}(1 - \mu a^{i'})\right]\right\} = 0. \tag{72}$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{N} \in P_{\mathcal{H}}$ la 2-forme de courbure correspondant à θ_n^n est homothétique à la forme symplectique induite, le facteur d'homothétie étant $-2/\| \mathbf{N} \|^2$. Enfin, pour tous les vecteurs normaux de $P_{\mathcal{H}}$ l'équation (72) devient

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \rho^2 - \frac{1}{\| \mathbf{N} \|^2} \right\} = 0. \tag{73}$$

On retrouve ainsi une propriété que nous avons déjà mise en évidence dans le cas de l'*a*-concourance sur une hypersurface d'une variété kählérienne [9].

BIBLIOGRAPHIE

1. Bouzon J. — *Structures presque cocomplexes*. Rend. Sem. Torino, 24.
2. Chern S. S., do Carmo M., Kobayashi S. — *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*. Functional Analysis and Related Fields. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
3. Crumeyrolle A. — *Dérivations, formes et opérateurs usuels sur les champs spinoriels des variétés différentiables de dimension paire*, Ann. Inst. H. Poincaré, XVI, 3, 1972.
4. Godbillon Cl. — *Géométrie différentielle et mécanique analytique*. Hermann, Paris, 1969.
5. Libermann, P. — *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales*, Ann. di Matem., 36, 1954.
6. Otsuki, T. — *Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature*, Amer. Journ. of Math., 92, 1970.
7. Roşca, R., Vanhecke, L. — *Espace pseudo-euclidien* E^{2n+1} *de signature* $(n+1, n)$ *structuré par une connexion self-orthogonale involutive*, C. R. Acad. Sc. Paris, série, A, 277, 1973.
8. Roşca, R. — *Variétés pseudo-riemanniennes* $V^{n,n}$ *de signature* (n, n) *et à connexion self-orthogonale involutive*. C. R. Acad. Sc. Paris, série A, 277, 1973.
9. Roşca, R., Vanhecke, L. — *Sur les a-hypersurfaces kählériennes d'une variété kähler-einsteinienne*, C. R. Acad. Sc. Paris, série A., 1974.

10. Slebodzinski, W. — *Formes extérieures et leurs applications*, I, Warszawa, 1954.
11. Souriau, J. M. — *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.
12. Vanhecke, L. — *On the immersions of manifolds in elliptic spaces and a theorem of S. S. Chern, M. do Carmo, S. Kobayashi and T. Otsuki*, Math. Journ. Okayama Univ., sous presse.
13. Yano, K., Chen, B. Y. — *On the concurrent vector fields of immersed manifolds*, Kodai Math. Sem. Rep., 23, 1971.

Reçu le 23. X. 1974

Katholieke Universiteit te Leuven
Departement Wiskunde
Celestijnenlaan 200B
B-3030 HEVERLEE (Belgique)

Analele ştiinţifice ale Universităţii „AL. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXII, s. I a, 1976, f. 1

ON THE ANALYTIC SOLUTION OF CERTAIN LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS

BY

S. B. JAIYESIMI

Introduction. Consider a linear difference equation

$$\sum_{i=0}^{m} \mu_i(n) Z_{n-i} = \lambda \beta_n Z_{n+r} \tag{1.1}$$

$$Z_0(\lambda) = f(\lambda),\ Z_n(0) = C^1, \text{ a constant,}$$

where $\mu_i(n)$ are functional coefficients, λ is a parameter and β_n a function of the discrete variable n. Of the few ways of obtaining analytic solutions of (1.1) already studied, the formal series generation is of fundamental importance.

The existence of analytic solutions of linear as well as non-linear difference equations have been discussed by Stephens [7] and Trijitzinsky [8] who showed that analytic formal solutions of such equations exist and also by Milne-Thomson [5] who applied Nörlund's approach to obtain an integral form of the solution. Milne-Thomson attempts to solve a given difference equation of a very low order via a much-higher order differential equation thereby leading to several limitations.

However the questions arise:

If there exists a formal solution $y_n(\lambda)$ of (1.1), which converges to an analytic solution, to what analytic solution does $y_n(\lambda)$ converge?

What is the radius of convergence of this formal solution?

Can an analytic solution be so constructed in a well defined region while every singular solution is sieved off?

These questions are fully answered in this paper. It will be shown here that if $Z_n(\lambda)$ is an analytic non-formal solution of (1.1) then $y_n(\lambda)$ converges to $Z_n(\lambda)/Z_0(\lambda)$ and that the radius of convergence of $y_n(\lambda)$ is given by the first zero of $Z_0(\lambda)$, the contour integral form of which is obtained in the discourse that follows.

We shall construct the solution $y_n(\lambda)$ by taking arbitrary initial values and transforming (1.1) into the two-layer equation

$$\sum_{i=0}^{m} \mu_i(n) y_{n-i}^{(k+1)} = \lambda \beta_n y_{n+r}^{(k)}, \tag{1.1 A}$$

$$y_0^{(k)} = y_n^{(0)} = C^1,\ k \geqq 0,\ n \geqq 1,$$

which uses previously computed values at the kth layer to obtain values at the $(k+1)^{th}$ layer. The main advantages of this method over the traditional method [8] are that the initial values may be completely arbitrary, the method is easily adaptible on a digital machine and the region of convergence of the solution can be characteristically predicted.

The method here is an improvement on Milne-Thomson's as it will become evident that every arbitrarily high order linear difference equation can be replaced by a simple first order ordinary differential equation.

We will here assume the existence of a uniquely defined solution of the difference equation (1.1A) and that such solution converges to an analytic function, $y_n(\lambda)$ satisfying