$$- f(t^0, x^0, x(\overline{\Delta}^0), W[t^0, \overline{x}^0, x(\overline{\Delta}^0)]) + f(t^0, \overline{x}^0, x(\overline{\Delta}^0), W[t^0, \overline{x}^0, x(\overline{\Delta}^0)]) -$$

$$- f(t^0, \overline{x}^0, \overline{x}(\overline{\Delta}^0), W[t^0, \overline{x}^0, x(\overline{\Delta}^0)])$$

$$\leqslant |\lambda|^{-1}(L + NP + M + NQ - |\lambda|)\varepsilon + |\lambda|^{-1} M |x(\Delta^0) - x(\Delta^0)| +$$

$$+ |\lambda|^{-1} NQ \int_0^1 |x(\Delta^0) - x(\overline{\Delta}^0)| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|^{-1}(L + NP - |\lambda| + M + NQ)\varepsilon + |\lambda|^{-1}(M + NQ)B|\Delta^0 - \overline{\Delta}^0| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|^{-1}(L + NP - |\lambda| + M + NQ)\varepsilon + |\lambda|^{-1}(M + NQ)B\varepsilon = \Phi\varepsilon$$

для всех $t \in R^1$. Следовательно $\varepsilon \leqslant \Phi(\varepsilon)$, откуда следует, что $\varepsilon = 0$ и $x = \overline{x}$.

Этим теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. К о н с т а н т и н о в М. М. — Ограниченные решения системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Rev. roum. de math. pures et appl. 1972, № 6, 885—894.

Поступила 18.V.1976

Пловдивский Университет имени П. Хилендарского Болгария

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXIII, S. I a, f. 1, 1977

О ПРИМЕНЕНИИ ОДНОГО СПОСОБА ЧАСТИЧНОГО УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С НЕЛИНЕЙНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. Д. БАЙНОВ и С. Д. МИЛУШЕВА

Метод усреднения является один из самых мощных асимптотических методов. Строгое математическое обоснование он получил в работах Н. Н. Б о г о л ю б о в а и Ю. А. М и т р о п о л ь с к о г о. Метод усреднения для решения начальных задач для интегро-дифференциальных уравнений был обоснован А. Н. Ф и л а т о в ы м. Обширная библиография по этой тематике имеется в его монографиях [1] и [2].

Бурное развитие теории оптимального управления требовало обоснование асимптотических методов для решения краевых задач для обыкновенных и интегро-дифференциальных уравнений. В настоящей работе обоснован один вариант частичного усреднения для решения многоточечных краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений. Надо отметить, что усредненная система является системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \varepsilon A(t, x(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds)\, X(t, x(t)) \tag{1}$$

с краевым условием

$$\sum_{i=0}^{N} B_i x(t_i) = \Gamma(x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_N), \varepsilon), \tag{2}$$

где

$$x \in R_n,\ X \in R_m,\ \varphi \in R_p,\ \Gamma \in R_q,\ A = (a_{ij}(t, x, y))_{n,m}$$

$$B_i = (b_{jk}^{(i)})_{q,n}\ t_i = \alpha_i T,\ i = \overline{0, N},\ 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_N = 1,$$

$T = L\varepsilon^{-1}$, $L = \mathrm{const} > 0$, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Предположим, что можно вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \varphi(t, s, x)\, ds$$

по явно входящему переменному s, считая t и x параметрами. Пусть

$$\int_0^{\infty} \varphi(t, s, x)\,ds = \varphi_1(t, x).$$

Предположим, кроме того, что существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A(t, x, \varphi_1(t, x))\,dt = \bar{A}(x). \tag{3}$$

Тогда системе (1) ставим в соответствие частично усредненную систему

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \bar{A}(\xi(t))\,X(t, \xi(t)) \tag{4}$$

с краевым условием

$$\sum_{i=0}^{N} B_i \xi(t_i) = \Gamma(\xi(t_0), \xi(t_1), \ldots, \xi(t_N), \varepsilon). \tag{5}$$

Отметим, что если $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ и $A = (a_{ij})_{n,m}$ то по определению

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x^{(i)})^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \|A\| = \left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1. *Пусть:*

1. *Функция* $A(t, x, y)$ *непрерывна в области* $\Omega(t, x, y) = \Omega(t) \times \Omega(x) \times \Omega(y)$, *где* $\Omega(t) = [0, \infty)$, $\Omega(x)$ *некоторая открытая область пространства* R_n, $\Omega(y) \subseteq R_p$.

Функция $\varphi(t, s, x)$ *непрерывна в области* $\Omega(t, s, x) = \Omega(t) \times \Omega(s) \times \Omega(x)$, *где* $\Omega(s) = [0, \infty)$.

Функция $X(t, x)$ *непрерывна в области* $\Omega(t, x) = \Omega(t) \times \Omega(x)$.

Функция $\Gamma(z, \varepsilon)$, $z = (z^{(0)}, z^{(1)}, \ldots, z^{(N)})$ *определена в области* $\Omega(z, \varepsilon) = \Omega(z^{(0)}) \times \Omega(z^{(1)}) \times \ldots \times \Omega(z^{(N)}) \times \Omega(\varepsilon)$, *где* $\Omega(z^{(i)}) = \Omega(x)$, $i = \overline{0, N}$, *а* $\Omega(\varepsilon) = (0, \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 = \text{const} > 0$.

2. *Функции* $A(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$, $\varphi_1(t, x)$, $X(t, x)$ *и* $\Gamma(z, \varepsilon)$ *удовлетворяют соответственно в областях* $\Omega(t, x, y)$, $\Omega(t, s, x)$, $\Omega(t, x)$ $\Omega(z, \varepsilon)$ *условиям*

$$\|A(t, x, y)\| \leqslant M, \quad \|X(t, x)\| \leqslant M,$$

$$\|A(t, x, y) - A(t, x', y')\| \leqslant \lambda(t)(\|x - x'\| + \|y - y'\|),$$

$$\|\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x')\| \leqslant \sigma(t, s)\|x - x'\|, \quad \|\varphi_1(t, x) - \varphi_1(t, x')\| \leqslant$$

$$\leqslant h\|x - x'\|, \quad \|X(t, x) - X(t, x')\| \leqslant \mu(t)\|x - x'\|,$$

$$\|\Gamma(z, \varepsilon) - \Gamma(z', \varepsilon)\| \leqslant \sum_{i=0}^{N} \nu_i \|z^{(i)} - (z^{(i)})'\|,$$

где M, h, ν_0 — *положительные постоянные*, ν_i ($i = \overline{1, N}$) *зависят от* ε, *функция* $b(\varepsilon) = \max_i \nu_i(\varepsilon)$ *непрерывна при достаточно малых значениях* ε, $\lim_{\varepsilon\to 0} b(\varepsilon) = 0$,

$$\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau \leqslant c_1 t, \quad \int_0^t \mu(\tau)\,d\tau \leqslant c_2 t, \quad c_1, c_2 = \text{const},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^{\infty} \lambda(\tau)\,\sigma(\tau, s)\,ds = 0.$$

3. *Краевая задача* (1), (2) *имеет единственное, непрерывное решение* $x(t)$ *и* $x(t) \in \Omega(x)$ *при* $t \in [0, T]$.

4. *Равномерно по отношению к* $x \in \Omega(x)$ *существует предел* (3). *Функция* $\bar{A}(x) = (\bar{a}_{ij}(x))_{n,m}$ *непрерывна в области* $\Omega(x)$ *и удовлетворяет там условию Липшица*

$$\|\bar{A}(x) - \bar{A}(x')\| \leqslant \nu\|x - x'\|, \quad \nu = \text{const}.$$

5. *Функция* $a_{ij}(t, x, \varphi_1(t, x)) - \bar{a}_{ij}(x)$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$) *во всей области* $\Omega(t, x)$ *не меняет знака, т.е., или* $a_{ij}(t, x, \varphi_1(t, x)) - \bar{a}_{ij}(x) \geqslant 0$ или $a_{ij}(t, x, \varphi_1(t, x)) - \bar{a}_{ij}(x) \leqslant 0$.

6. *Краевая задача* (4), (5) *имеет единственное, непрерывное решение* $\xi(t)$ *и* $\xi(t) \in \Omega(x)$ *при* $t \in [0, T]$.

7. *Вдоль траектории решения* $\xi(t)$ *задачи* (4), (5)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau \left\|\int_0^{\infty} \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\,ds\right\| = 0.$$

8. *Матрица* B_0 *постоянная и* $\det B_0 \neq 0$.

9. *Матрицы* B_i ($i = \overline{1, N}$) *зависят от* ε, *функция* $d(\varepsilon) = \max_i \|B_i(\varepsilon)\|$ *непрерывна при достаточно малых значениях* ε *и* $\lim_{\varepsilon\to 0} d(\varepsilon) = 0$.

10. *Выполнено неравенство* $\left\|\left(\sum_{i=0}^{N} B_i\right)^{-1}\right\| \sum_{i=0}^{N} \nu_i < 1$.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant T$ *будет выполняться неравенство* $\|x(t) - \xi(t)\| < \eta$.

Доказательство. Для решений краевых задач (1), (2) и (4), (5) выполнены равенства

$$x(t) = x_0 + \varepsilon\int_0^t A\left(\tau, x(\tau), \int_0^{\infty} \varphi(\tau, s, x(s))\,ds\right) X(\tau, x(\tau))\,d\tau, \tag{6}$$

$$\xi(t) = \xi_0 + \varepsilon \int_0^t \overline{A}(\xi(\tau)) X(\tau, \xi(\tau))\, d\tau, \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{N} B_i (x_0 + \varepsilon\beta_i) = \Gamma(x_0, x_0 + \varepsilon\beta_1, \ldots, x_0 + \varepsilon\beta_N, \varepsilon), \tag{8}$$

$$\sum_{i=0}^{N} B_i(\xi_0 + \varepsilon\overline{\beta}_i) = \Gamma(\xi_0, \xi_0 + \varepsilon\overline{\beta}_1, \ldots, \xi_0 + \varepsilon\overline{\beta}_N, \varepsilon), \tag{9}$$

где

$$x_0 = x(0), \quad \xi_0 = \xi(0),$$

$$\beta_i = \int_0^{t_i} A\left(\tau, x(\tau), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, x(s))\, ds\right) X(\tau, x(\tau))\, d\tau,$$

$$\overline{\beta}_i = \int_0^{t_i} \overline{A}(\xi(\tau)) X(\tau, \xi(\tau))\, d\tau, \qquad i = \overline{0, N}.$$

Вычитая (7) из (6) получаем

$$\| x(t) - \xi(t) \| \leqslant \| x_0 - \xi_0 \| + \varepsilon \Big\| \int_0^t \Big[A\Big(\tau, x(\tau), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, x(s))\, ds\Big) X(\tau, x(\tau)) - \overline{A}(\xi(\tau)) X(\tau, \xi(\tau)) \Big] d\tau \Big\|. \tag{10}$$

Для второго слагаемого в правой стороне неравенства (10) имеем

$$\varepsilon \Big\| \int_0^t \Big[A\Big(\tau, x(\tau), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, x(s))\, ds\Big) X(\tau, x(\tau)) - \overline{A}(\xi(\tau)) X(\tau, \xi(\tau)) \Big] d\tau \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \Big\| \int_0^t \Big[A\Big(\tau, x(\tau), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, x(s))\, ds\Big) - A\Big(\tau, \xi(\tau), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, \xi(s))\, ds\Big)\Big] X(\tau, x(\tau))\, d\tau \Big\| + \varepsilon \Big\| \int_0^t \Big[A\Big(\tau, \xi(\tau), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, \xi(s))\, ds\Big) -$$

$$- A\Big(\tau, \xi(\tau), \int_0^{\infty} \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds\Big)\Big] X(\tau, x(\tau))\, d\tau \Big\| + \varepsilon \Big\| \int_0^t A\Big(\tau, \xi(\tau), \int_0^{\infty} \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds\Big) [X(\tau, x(\tau)) - X(\tau, \xi(\tau))]\, d\tau \Big\| + \varepsilon \Big\| \int_0^t \Big[A\Big(\tau, \xi(\tau), \int_0^{\infty} \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds\Big) - \overline{A}(\xi(\tau)) \Big] X(\tau, \xi(\tau))\, d\tau \Big\| \equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \tag{11}$$

На отрезке $[0, T]$, в силу условий теоремы 1 справедливы оценки

$$I_1 = \varepsilon \Big\| \int_0^t \Big[A\Big(\tau, x(\tau), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, x(s))\, ds\Big) - A\Big(\tau, \xi(\tau), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, \xi(s))\, ds\Big) \Big] X(\tau, x(\tau)) \Big\| \leqslant \varepsilon M \int_0^t \lambda(\tau) \| x(\tau) - \xi(\tau) \|\, d\tau +$$

$$+ \varepsilon M \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} \lambda(\tau) \sigma(\tau, s) \| x(s) - \xi(s) \|\, ds,$$

$$I_2 = \varepsilon \Big\| \int_0^t \Big[A\Big(\tau, \xi(\tau), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, \xi(s))\, ds\Big) - A\Big(\tau, \xi(\tau), \int_0^{\infty} \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds\Big) \Big].$$

$$X(\tau, x(\tau))\, d\tau \Big\| \leqslant \varepsilon M \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} \lambda(\tau) \sigma(\tau, s) \| \xi(s) - \xi(\tau) \|\, ds +$$

$$+ \varepsilon M \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau \Big\| \int_0^{\infty} \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds \Big\| \leqslant M^3 L \delta_1(\varepsilon) + M \delta_2(\varepsilon),$$

где

$$\delta_1(\varepsilon) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant L} \tau \sigma_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \quad \sigma_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} \lambda(\tau) \sigma(\tau, s)\, ds,$$

$$\delta_2(\varepsilon) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant L} \tau \sigma_2\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \quad \sigma_2(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau \Big\| \int_{\tau}^{\infty} \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds \Big\|,$$

$$I_3 = \varepsilon \Big\| \int_0^t A\Big(\tau, \xi(\tau), \int_0^{\infty} \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds\Big) [X(\tau, x(\tau)) - X(\tau, \xi(\tau))]\, d\tau \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon M \int_0^t \mu(\tau) \| x(\tau) - \xi(\tau) \|\, d\tau,$$

$$I_4 = \varepsilon \Big\| \int_0^t \Big[A\Big(\tau, \xi(\tau), \int_0^{\infty} \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds\Big) - \overline{A}(\xi(\tau)) \Big] X(\tau, \xi(\tau))\, d\tau \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant M \sqrt{m} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tilde{\gamma}_{ij}^2(\varepsilon) \right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\tilde{\gamma}_{ij}(\varepsilon) = \min(\gamma_{ij}(k', \varepsilon), \gamma_{ij}(k'', \varepsilon))$,

$$\gamma_{ij}(k, \varepsilon) = \frac{L^2M^2}{2k}[\nu + 2c_1(1+h)] + 2k\Psi_{ij}(\varepsilon),$$

$$\Psi_{ij}(\varepsilon) = \varepsilon \sup_{0\leq\tau\leq L}\ \sup_{\xi\in\Omega(x)} \left|\int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}} [a_{ij}(l, \xi, \varphi_1(l, \xi)) - \bar{a}_{ij}(\xi)]\, dl\right|,$$

$k' = \left[\frac{LM}{2}\sqrt{\frac{\nu + 2c_1(1+h)}{\Psi_{ij}(\varepsilon)}}\right]$, $k'' = k' + 1$, k', k'' натуральные числа,

$$\tilde{\gamma}_{ij}(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

ξ – точка траектории решения $\xi(t)$ задачи (4), (5).

Следовательно

$$\varepsilon\left\|\int_0^t \left[A\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s))\, ds\right) X(\tau, x(\tau)) - \bar{A}(\xi(\tau)) X(\tau, \xi(\tau))\right] d\tau\right\| \leq$$

$$\leq M^3L\delta_1(\varepsilon) + M\delta_2(\varepsilon) + 2LM^2\sqrt{m[\nu + 2c_1(1+h)]}\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \Psi_{ij}(\varepsilon)\right]^{1/2} +$$

$$+ \varepsilon M\int_0^t [\lambda(\tau) + \mu(\tau)]\, \|x(\tau) - \xi(\tau)\|\, d\tau + \tag{12}$$

$$+ \varepsilon M\int_0^t d\tau\int_0^\tau \lambda(\tau)\,\sigma(\tau, s)\,\|x(s) - \xi(s)\|\, ds.$$

Используя (8), (9) и (12), находим

$$\|x_0 - \xi_0\| \leq \varepsilon h(\varepsilon)\sum_{i=1}^N \|\beta_i - \bar{\beta}_i\| \leq h(\varepsilon)\{\chi(\varepsilon)N + [(c_1 + c_2)\varkappa L +$$

$$+ N\delta_1(\varepsilon)]M\sup_{0\leq t\leq T}\|x(t) - \xi(t)\|\}, \tag{13}$$

где

$$h(\varepsilon) = [b(\varepsilon) + d(\varepsilon)]\left(1 - \left\|\left(\sum_{i=0}^N B_i\right)^{-1}\right\|\sum_{i=0}^N \nu_i\right)^{-1}\left\|\left(\sum_{i=0}^N B_i\right)^{-1}\right\|, \quad \varkappa = \sum_{i=1}^N \varkappa_i,$$

$$\chi(\varepsilon) = M^3L\delta_1(\varepsilon) + M\delta_2(\varepsilon) + 2LM^2\sqrt{m[\nu + 2c_1(1+h)]}\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \Psi_{ij}(\varepsilon)\right]^{1/2}.$$

Из (10), (12) и (13) следует

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq \chi(\varepsilon)\left\{1 + h(\varepsilon)[N + (c_1 + c_2)\varkappa L + N\delta_1(\varepsilon)]M.\right.$$

$$\left.\sup_{0\leq t\leq T}\frac{\|x(t) - \xi(t)\|}{\chi(\varepsilon)}\right\} + \varepsilon M\int_0^t [\lambda(\tau) + \mu(\tau)]\,\|x(\tau) - \xi(\tau)\|\, d\tau +$$

$$+ \varepsilon M\int_0^t d\tau\int_0^\tau \lambda(\tau)\,\sigma(\tau, s)\,\|x(s) - \xi(s)\|\, ds.$$

Положим $\chi(\varepsilon)u(t) = x(t) - \xi(t)$ и введем обозначение $\|u\|_T = \sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|$.

Тогда имеем

$$\|u(t)\| \leq 1 + h(\varepsilon)\{N + [(c_1 + c_2)\varkappa L + N\delta_1(\varepsilon)]M\|u\|_T\} +$$

$$+ \varepsilon M\int_0^t (\lambda(\tau) + \mu(\tau))\,\|u(\tau)\|\, d\tau + \varepsilon M\int_0^t d\tau\int_0^\tau \lambda(\tau)\,\sigma(\tau, s)\,\|u(s)\|\, ds.$$

Следовательно

$$\|u(t)\| \leq \{1 + h(\varepsilon)[N + [(c_1 + c_2)\varkappa L + N\delta_1(\varepsilon)]M\|u\|_T]\}\cdot$$

$$\cdot \exp\{[(c_1 + c_2)L + \delta_1(\varepsilon)]M\}. \tag{14}$$

Так как $\lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon) = 0$, то существует число $\varepsilon_2 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ выполняется неравенство

$$[(c_1 + c_2)\varkappa L + N\delta_1(\varepsilon)]M\exp\{[(c_1 + c_2)L + \delta_1(\varepsilon)]M\}\,h(\varepsilon) < 1.$$

Тогда при $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ из (14) находим

$$\|u\|_T \leq \omega \equiv \frac{(1 + h(\varepsilon)N)\exp\{[(c_1 + c_2)L + \delta_1(\varepsilon)]M\}}{1 - [(c_1 + c_2)\varkappa L + N\delta_1(\varepsilon)]M\exp\{[(c_1 + c_2)L + \delta_1(\varepsilon)]M\}h(\varepsilon)}$$

т.е.

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leq \omega\chi(\varepsilon). \tag{15}$$

Выберем $\varepsilon_3 > 0$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\omega\chi(\varepsilon_3) < \eta$. Тогда из этого неравенства и (15) при $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ следует утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть:*

1. *Выполнены условия* 1–4 *и* 6–10 *теоремы* 1.
2. *Функция* $X(t, \xi(t))$ *монотонна по* t *для* $t \in \Omega(t)$.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *чтобы при* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. *на отрезке* $0 \leq t \leq T$ *выполнялось неравенство* $\|x(t) - \xi(t)\| < \eta$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание. Метод частичного усреднения для начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений обоснован в (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф и л а т о в А. Н. — *Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.* Изд-во „ФАН", Ташкент, 1971.
2. Ф и л а т о в А. Н. — *Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.* Изд-во „ФАН", Ташкент, 1976.
3. Ш а р о в а Л. В. — *Об одном способе частичного усреднения в дифференциальных уравнениях.* Дифференциальные уравнения, т. 10, № 6, 1974.

Пловдивский университет имени П. Хилендарского

Высший машинно — электротехнический институт имени В. И. Ленина — София

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XXIII, s. I a, 1977, f. 1

ON STABILITY OF DIFFERENCE SYSTEMS

BY

PAVEL TALPALARU

1. Introduction. In recent years considerable attention has been paid to the development of a stability theory for difference equations parallel to that for differential equations. The discrete analogue of so-called direct method of Liapunov has been used by number of authors. Notable among this research is that of H a h n [6], [7], H a l a n a y [8], K a l m a n and B e r t r a m [9], G o r d o n [3], [4]. S t r a u s s [12] has introduced the concept of L^p - stability for differential equations, later adapted to difference differential equations by R a m a k r i s h n a R a o [10]. In [7] H a h n and later C l a m r o c h and A g g a r w a l l [1] have introduced a new type of stability generalizing the L^p- stability for differential equations. F o d o r [2] generalizes the results of H a h n studying a more general type of stability. G o r d o n [5] and S i n h a [11] have extended to difference equations the concept of L^p - stability (l_p - stability).

The aim of the present paper is to extend part of results of [2], and [7] to difference equations. The results provide some sufficient criteria in studying the behavior of solutions of the nonlinear difference equations with respect to another nonlinear difference equation.

2. Basic concepts and definitions. We shall consider the nonlinear difference equations

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \tag{2.1}$$

and

$$y(n+1) = g(n, y(n)); \tag{2.2}$$

$f(n, x)$, $g(n, y)$ here represent functions with values in E^t, an arbitrary t-dimensional vector space, and defined on some region D in $I \times E^t$, where I is the set of non-negative integers. For simplicity, we may choose for D the set $D_{n_0, r} = \{(n, z) \in I \times E^t ;\ n \geqslant n_0 \geqslant 0,\ \|z\| \leqslant r\}$. Here, $\|z\|$ denotes any t-dimensional norm of the vector z. In most cases, r will be taken to be finite. Denote the unique solution to the difference equations (2.1) and (2.2) by $x = x(n; n_0, x_0)$ and $y = y(n; n_0, y_0)$ respectively such that $x(n_0; n_0, x_0) = x_0$, $y(n_0; n_0, y_0) = y_0$. For simplicity, we shall denote sometimes $x(n; n_0, x_0)$ by $x(n)$ and $y(n; n_0, y_0)$ by $y(n)$. We note that if for a particular point $(k, z) \in D_{n_0, r}$, for a finite value r,