Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXIII, s. I a, 1977, f. 1

UN THÉORÈME LIMITE POUR LE MAXIMUM DES SOMMES PARTIELLES ALÉATOIRES DE VARIABLES ALÉATOIRES

PAR

ELENA NENCIU

1. Soit $\{X_j, 1 \leqslant j < +\infty\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le champ de probabilité $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ et $\{\nu_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs entières positives définies aussi sur $\{\Omega, \mathcal{K}\ P\}$, afin de satisfaire à la condition

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{P} \nu \ (n \to +\infty), \tag{1.1}$$

où ν est une variable aléatoire positive quelconque, (par $\xrightarrow{P}$ on a noté la convergence en probabilité). Soit le processus aléatoire $\{Z_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ où $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. On démontre dans [1] que la répartition limite du processus aléatoire $\{Z_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$, convenablement normé, est invariante si l'on remplace le temps habituel n par le temps aléatoire ν_n, dont l'écoulement à l'infini a lieu conformément à la condition (1.1). Si les variables aléatoires X_j, $1 \leqslant j < +\infty$, sont identiquement distribuées avec $M(X_j) = 0$, $D^2(X_j) = 1$, $1 \leqslant j < +\infty$, $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ et $Y_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k$, alors, concernant la répartition limite du processus aléatoire $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$, on démontre dans [4]

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y_n < x\sqrt{n}) = L(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt & \text{si } x > 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

quel que soit le nombre réel x. Dans cette Note, nous allons démontrer un théorème d'invariance de la répartition limite du processus aléatoire $\{Y_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ où l'on remplace le temps habituel par le temps aléatoire.

2. Pour la démonstration du théorème limite de la section 3 on a besoin de deux lemmes.

Lemme 1. *Soit $\{X_j, 1 \leq j < +\infty\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le champ de probabilité $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$; soient $(k_n)_{1 \leq n < +\infty}$ et $(m_n)_{1 \leq n < +\infty}$ des suites croissantes de nombres réels positifs qui tendent à l'infini et $A_n \in \mathcal{K}$ un événement qui dépend seulement des variables aléatoires $X_{k_n}, \ldots, X_{m_n}$ si $k_n \leq m_n$ ou des variables aléatoires $X_{m_n}, \ldots, X_{k_n}$ si $m_n \leq k_n$. Alors pour tout événement $A \in \mathcal{K}$ avec $P(A) > 0$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} [P(A_n \mid A) - P(A_n)] = 0. \tag{2.1}$$

(Par $P(A_n \mid A)$ on a noté la probabilité de l'événement A_n conditionnée par l'événement A).

Démonstration. Soit $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$ l'espace Hilbert des variables aléatoires de carré intégrable, où le produit scalaire de deux éléments arbitraires X et Y est défini par $(X, Y) = \int_\Omega XY \, dP(\omega)$ et la norme de l'élément X par $\| X \| = (X, X)^{1/2}$. Pour un n_0 fixé et $n > n_0$ on a

$$P(A_{n_0} \cap A_n) - P(A_{n_0}) P(A_n) = 0. \tag{2.2}$$

Soit

$$f_n(\omega) = \begin{cases} 1 - P(A_n) & \text{si} \quad \omega \in A_n, \\ -P(A_n) & \text{si} \quad \omega \notin A_n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Alors

$$(f_k, f_n) = \int_\Omega f_k f_n \, dP(\omega) = P(A_k \cap A_n) - P(A_k) P(A_n). \tag{2.4}$$

En tenant compte de (2.2) du (2.4), il résulte

$$\lim_{n \to +\infty} (f_k, f_n) = 0 \tag{2.5}$$

pour tout k. De plus

$$\| f_n \|^2 = P(A_n) - P^2(A_n) \leq 1 \tag{2.6}$$

pour tout n. Conformément au lemme 1 de [8], on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} (g, f_n) = 0 \tag{2.7}$$

pour tout $g \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Soit l'événement $A \in \mathcal{K}$ avec $P(A) > 0$. On considère

$$g(\omega) = \begin{cases} 1 - P(A) & \text{si} \quad \omega \in A, \\ -P(A) & \text{si} \quad \omega \notin A. \end{cases} \tag{2.8}$$

En tenant compte de (2.4), (2.7) et (2.8) il résulte

$$\lim_{n \to +\infty} [P(A_n \cap A) - P(A_n) P(A)] = 0 \tag{2.9}$$

En divisant la relation (2.9) par $P(A)$ on obtient (2.1).

Remarque 1. Si $P(A) = 0$ et si l'on convient de mettre $P(B \mid A) = P(B)$ pour tout $B \in \mathcal{K}$, alors (2.1) est satisfaite d'une manière triviale.

Lemme 2. *Soit $\{X_j, 1 \leq j < +\infty\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le champ de probabilité $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$, identiquement distribuées avec $M(X_j) = 0$, $D^2(X_j) = 1$, $1 \leq j < +\infty$, $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ et $Y_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k$. Alors pour tout événement $A \in \mathcal{K}$, avec $P(A) > 0$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} [P(Y_n < x\sqrt{n} \mid A) - P(Y_n < x\sqrt{n})] = 0. \tag{2.10}$$

Démonstration. Soit $\tilde{Y}_n = \max_{k_n \leq k \leq n} (S_k - S_{k_n})$ où $(k_n)_{1 \leq n < +\infty}$ est une suite croissante de nombres entiers positifs de manière que $k_n \leq n$, $1 \leq n < +\infty$. Evidemment pour tout événement $A \in \mathcal{K}$ avec $P(A) > 0$ et tout nombre réel x, on a

$$\begin{aligned} P(Y_n < x\sqrt{n} \mid A) - P(Y_n < x\sqrt{n}) &= [P(\tilde{Y}_n < x\sqrt{n} \mid A) - \\ - P(\tilde{Y}_n < x\sqrt{n})] &+ [P(\tilde{Y}_n < x\sqrt{n}) - P(Y_n < x\sqrt{n})] + \\ &+ [P(Y_n < x\sqrt{n} \mid A) - P(\tilde{Y}_n < x\sqrt{n} \mid A)]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Il résulte grâce au lemme 1

$$\lim_{n \to +\infty} [P(\tilde{Y}_n < x\sqrt{n} \mid A) - P(\tilde{Y}_n < x\sqrt{n})] = 0. \tag{2.12}$$

Si la suite de nombres entiers positifs $(k_n)_{1 \leq n < +\infty}$ croît d'une manière suffisamment lente, par exemple, $k_n = [\log n]_{1 \leq n < +\infty}$, alors on a

$$\lim_{n \to +\infty} P(\tilde{Y}_n < x\sqrt{n}) = L(x) \tag{2.13}$$

pour tout nombre réel x (par $[q]$ on a noté la partie entière du nombre réel q). On obtient de (1.2) et (2.13)

$$\lim_{n \to +\infty} [P(\tilde{Y}_n < x\sqrt{n}) - P(Y_n < x\sqrt{n})] = 0. \tag{2.14}$$

Vu le fait que

$$\lim_{n \to +\infty} P[(\max_{k_n \leq k \leq n} S_k < x\sqrt{n}) \cap (\tilde{Y}_n > x\sqrt{n})] = 0, \tag{2.15}$$

il résulte

$$\lim_{n \to +\infty} [P(Y_n < x\sqrt{n} \mid A) - P(\tilde{Y}_n < x\sqrt{n} \mid A)] = 0. \tag{2.16}$$

En passant dans (2.11) à la limite, pour $n \to +\infty$ et en tenant compte de (2.12), (2.14) et (2.16), on obtient (2.10).

3. Dans cette section nous allons démontrer un théorème d'invariance de la repartition limite du maximum des sommes partielles aléatoires de variables aléatoires lorsqu'on remplace le temps habituel par le temps aléatoire.

Théorème 1. *Soit* $\{X_j, 1 \leqslant j < +\infty\}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le champ de probabilité* $\{\Omega, \mathcal{X}, P\}$ *identiquement distribuées avec* $M(X_j) = 0$, $D^2(X_j) = 1$, $1 \leqslant j < +\infty$, $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ *et* $Y_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k$ *et* $\{\nu_n, 1 \leqslant n < +\infty\}$ *une suite de variables aléatoires à valeurs entières positives définies aussi sur* $\{X, \mathcal{X}, P\}$ *afin de satisfaire à la condition (2.11).*

Alors pour tout nombre réel x, *on a*

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y_{\nu_n} < x\sqrt{\nu_n}) = L(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Démonstration. Nous allons distinguer deux cas.

Le cas A. Supposons que $x \leqslant 0$. Soient δ et ε des nombres arbitraires positifs tels que $\delta > \varepsilon$. Alors on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant P(Y_{\nu_n} < x\sqrt{\nu_n}) \leqslant P(Y_{\nu_n} < 0) \leqslant P\left(\left|\frac{\nu_n}{n} - \nu\right| > \varepsilon\right) + \\ + P(\nu < \delta) + P(Y_{[n(\delta-\varepsilon)]} < 0). \end{aligned} \tag{3.2}$$

On choisit δ suffisamment petit; en tenant compte de (1.1), vu que ν est une variable aléatoire positive et de (1.2), en passant à la limite dans (3.2), pour $n \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y_{\nu_n} < x\sqrt{\nu_n}) = 0. \tag{3.3}$$

Par conséquent, le théorème est démontré dans ce cas.

Le cas B. Supposons que $x > 0$. Soient i_0 et s deux nombres entiers positifs. Alors on a

$$P(Y_{\nu_n} < x\sqrt{\nu_n}) = \alpha_n + \beta_n + \sum_{i=i_0}^{+\infty} \gamma_{ni}, \tag{3.4}$$

où

$$\alpha_n = P\left(Y_{\nu_n} < x\sqrt{\nu_n}, \left|\frac{\nu_n}{n} - \nu\right| > \frac{1}{s}\right),$$

$$\beta_n = P\left(Y_{\nu_n} < x\sqrt{\nu_n}, \left|\frac{\nu_n}{n} - \nu\right| \leqslant \frac{1}{s}, \nu \leqslant \frac{i_0}{s}\right), \tag{3.5}$$

$$\gamma_{ni} = P\left(Y_{\nu_n} < x\sqrt{\nu_n}, \left|\frac{\nu_n}{n} - \nu\right| \leqslant \frac{1}{s}, \frac{i}{s} < \nu \leqslant \frac{i+1}{s}\right).$$

Evidemment on a les inégalités

$$\alpha_n \leqslant P\left(\left|\frac{\nu_n}{n} - \nu\right| > \frac{1}{s}\right) \tag{3.6}$$

et

$$\beta_n \leqslant P\left(\nu \leqslant \frac{i_0}{s}\right). \tag{3.7}$$

Soit $n_{1i} = \left[n\frac{i-1}{s}\right]$ et $n_{2i} = \left[n\frac{i+2}{s}\right]$. D'une part nous avons

$$\gamma_{ni} \leqslant P\left(Y_{n_{1i}} < x\sqrt{n_{2i}}, \frac{i}{s} < \nu \leqslant \frac{i+1}{s}\right) P\left(\frac{i}{s} < \nu \leqslant \frac{i+1}{s}\right), \tag{3.8}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \gamma_{ni} \geqslant P\left(Y_{n_{2i}} < x\sqrt{n_{1i}}, \frac{i}{s} < \nu \leqslant \frac{i+1}{s}\right) P\left(\frac{i}{s} < \nu \leqslant \frac{i+1}{s}\right) - \\ - P\left(\left|\frac{\nu_n}{n} - \nu\right| > \frac{1}{s}, \frac{i}{s} < \nu \leqslant \frac{i+1}{s}\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

On choisit i_0 si grand de manière que pour tout $\varepsilon > 0$ et dès que $i \geqslant i_0$, on ait les inégalités

$$(1 + \varepsilon) L(x) \geqslant L\left(x\sqrt{\frac{i+2}{i-1}}\right). \tag{3.10}$$

et

$$(1 - \varepsilon) L(x) \leqslant L\left(x\sqrt{\frac{i-1}{i+2}}\right), \text{ où } L(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \tag{3.11}$$

On choisit s suffisamment grand de sorte que:

$$P\left(\nu \leqslant \frac{i_0}{s}\right) < \varepsilon. \tag{3.12}$$

On choisit n_0 suffisamment grand de manière que, dès que $n \geqslant n_0$, on ait

$$P\left(\left|\frac{\nu_n}{n} - \nu\right| > \frac{1}{s}\right) < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Dès que $n \geqslant n_0$ il résulte des relations (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9):

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_0}^{+\infty} P\left(Y_{n_{2i}} < x\sqrt{n_{1i}}, \frac{i}{s} < \nu \leqslant \frac{i+1}{s}\right) P\left(\frac{i}{s} < \nu \leqslant \frac{i+1}{s}\right) - \varepsilon \leqslant P(Y_{\nu_n} < \\ < x\sqrt{\nu_n}) \leqslant \sum_{i=i_0}^{+\infty} P\left(Y_{n_{1i}} < x\sqrt{n_{2i}}, \frac{i}{s} < \nu \leqslant \frac{i+1}{s}\right) P\left(\frac{i}{s} < \nu \leqslant \frac{i+1}{s}\right) + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.14}$$

En utilisant (1.2), le lemme 2 et un résultat de E. E. Slutsky de [3] p. 282 section 20.6, et en supposant que les séries qui interviennent en (3.14) sont convergentes, on obtient

$$\sum_{i=i_0}^{+\infty} L\left(x\sqrt{\frac{i-1}{i+2}}\right) P\left(\frac{i}{s} < \nu \leqslant \frac{i+1}{s}\right) - \varepsilon \leqslant \liminf_{n\to+\infty} P\,Y_{\nu_n} < x\sqrt{\nu_n}) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{n\to+\infty} P\,(Y_{\nu_n} < x\sqrt{\nu_n}) \leqslant \sum_{i=i_0}^{+\infty} L\left(x\sqrt{\frac{i+2}{i-1}}\right) P\left(\frac{i}{s} < \nu \leqslant \frac{i+1}{s}\right) + 2\varepsilon. \tag{3.15}$$

En tenant compte de (3.10) et (3.11) de (3.15), on arrive à :

$$(1-\varepsilon)\,L(x) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} P\,(Y_{\nu_n} < x\sqrt{\nu_n}) \leqslant \limsup_{n\to-\infty} P\,(Y_{\nu_n} < x\sqrt{\nu_n}) \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\,L(x) + 2\varepsilon. \tag{3.16}$$

Vu que ε est arbitraire, de (3.16) il résulte

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_{\nu_n} < x\sqrt{\nu_n}) = L(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \tag{3.17}$$

et donc le théorème est démontré aussi dans ce cas.

Remarque 2. Le théorème 1 reste vrai si la condition (1.1) est remplacée par

$$\frac{\nu_n}{h(n)} \xrightarrow{P} \nu \;(n \to +\infty) \tag{3.18}$$

où $h(n)$ est une fonction arbitraire positive croissante tendant à l'infini pour $n \to +\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Barndorff-Nielsen O. — *On the limit distribution of the maximum of a random number of independent random variables.* Acta Math. Acad. Sci. Hung. 15 (1964), p. 399 — 403.
2. Blum J. R., Hanson D. L., Rosenblatt J. I. — *On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 1, (1963), p. 389 — 393.
3. Cramer H. — *Mathematical methods in statistics.* Princeton, 1946.
4. Erdös P., Kaç M. — *On certain limit theorems of the theory of probability.* Bull. of Amer. Math. Soc., 62 (1946) p. 292 — 302.
5. Gnedenko B. — *Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire.* Ann Math., 44 (1943) p. 423 — 453.
6. Guiaşu Silviu — *Contribuţii la studiul repartiţiei limită a proceselor stocastice cu timp discret aleator.* St. cerc. mat., 19, (1967) p. 971 — 1018.
7. Mogyorodi J. — *A central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables.* Publication Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 7, (1962) 409 — 424.
8. Rényi A. *On mixing sequences of sets.* Acta. Math. Acad. Sci. Hung., 9, (1958) 215 — 228.
9. *On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables.* Acta. Math. Acad. Sci. Hung., 11, (1960) p. 97 — 102.

Reçu le 1. I. 1976

Université „Al. I. Cuza" Jassy
Faculté de mathématiques
Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXIII, s. I a, 1977, f. 1

ON WEAK SOLUTION OF LINEAR QUASI-STATIC VISCOELASTICITY

BY

GH. GR. CIOBANU

1. In [2], [3] we proved existence and uniqueness theorems of the weak solution for the equations of the linear quasi-static viscoelasticity by using a method of succesive approximations. Here we are pointing out some properties of these solutions which result from the method of demonstration mentioned above.

The first five Sections deal with the displacement boundary solution and the last two with the stress boundary solution. In Sec. 2 and 6 we give the definitions of weak viscoelastic solutions $\mathbf{u}_d^{(v)}$ and $\mathbf{u}_s^{(v)}$ and their weak elastic associated solutions $\mathbf{u}_d^{(e)}$ and $\mathbf{u}_s^{(e)}$. In some regards these Sections are a very short precis of [2], [3], strictly necessary for developing the paper. The limitation of $\mathbf{u}_d^{(v)}$ is obtained in Sec. 3 and the approximation of this solution by its elastic associated solution $\mathbf{u}_d^{(e)}$ is given in Sec. 4. Though these two results refer only to the zero displacement data, they hold also in the case of non-homogeneous displacement data on the boundary. We limited ourself to this case for the sake of unity of Sect. 2, 3, 4 and 5, because in Sec. 5 the continuity of the solution $\mathbf{u}_d^{(v)}$ is obtained only for the case of zero displacement data on the boundary. In Sec. 7 we give a bound for the weak solution $\mathbf{u}_s^{(v)}$ and an approximation of it by the weak elastic associated solution, $\mathbf{u}_s^{(e)}$.

In this paper we used the following notations :

— $\mathbf{L}_2(\Omega)$ — the Hilbert space of vector functions $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$ with $u_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$,

— $\mathbf{D}(\Omega)$ — the set of vector functions having continuous partial derivatives of all orders and compact support in Ω,

— $\mathbf{W}_2^k(\Omega)$ — the space of vector functions $\mathbf{u}$ with components u_i having generalized derivatives up to and including k-th order in $L_2(\Omega)$ [8], [7],

— $\mathring{\mathbf{W}}_2^k(\Omega)$ — the closure of $\mathbf{D}(\Omega)$ in $\mathbf{W}_2^k(\Omega)$.

— $\mathbf{W}_2^{-1}(\Omega)$ — the dual space of $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$,

Let I be the time interval $[0, T]$, $T < +\infty$.