Definition 6.2. *We call $T_{1,f}$ the initial space of T_2 by f.*

Theorem 6.3. *Let $\mathcal{F} = \{f_a\}_{a \in A}$ be a set with $f_a : X_1 \to X_a$, for any a in A. Consider for every $a \in A$ the fuzzy topological space $T_a = (X_a, \mathcal{O}_a, \lambda_a, \chi_a, L, L')$. Then the mapping*

$$\mathcal{O}_{1,\mathcal{F}} : X_1 \to (X_1, L, L')$$

$$\mathcal{O}_{1,\mathcal{F}}(x) = \bigwedge_a \mathcal{O}_{1,a}(x) \cdot f_a, \text{ for all } x \text{ in } X_1$$

defines a fuzzy topological space $T_{1,\mathcal{F}} = (X_1, \mathcal{O}_{1,\mathcal{F}}, \lambda_{1,\mathcal{F}}, \chi_{1,\mathcal{F}}, L, L')$ where $\lambda_{1,\mathcal{F}} \equiv 0$, $\chi_{1,\mathcal{F}} \equiv \bigvee_a \mathcal{L}(f_a)(\chi_a)$. For every $a \in A$, f_a is $(T_{1,\mathcal{F}}, T_2)$-continuous.

The proof is based on 6.1. We omit him.

Definition 6.4. *We call $T_{1,\mathcal{F}}$ the initial space of T_2 by $\mathcal{F}$.*

Theorem 6.5. *Let X_1 be the direct product of sets $\prod_{a \in A} X_a$ and $f_a = p_a$ the natural projections of X_1, then $T_{1,\mathcal{F}}$ has the universal property for direct products.*

We omit the proof.

BIBLIOGRAPHY

1. Birchoff G. — *Lattice Theory* (Colloquium Publ. Co., New York, 1948).
2. Bourbaki N. — *Topologie générale* (Hermann, Paris, 1970).
3. Butnariu D. — *L-fuzzy automata. A neural model* (Proc. of the 3-rd International Congress for Systems and Cybernetics, București, 1975).
4. Chang C. L. — *Fuzzy Topological Spaces* (J. Math. Anal. Appl., nr. 24, 1968, pp. 182 — 190).
5. Goguen J. A. — *L-fuzzy Sets.* (J. Math. Anal. Appl., 18, 1967, pp. 145 — 174).
6. Zadeh L. A. — *Fuzzy Sets* (Inf. and Contr., 8, 1965, p. 338 — 352).

Received 21. III. 1975

Faculty of Mathematics
University of Iași
România

Analele științifice ale Universității „Al. I. CUZA" din Iași
Tomul XXIII, s. I a, 1977, f. 1

SUR LES GROUPES LINÉARISABLES

PAR

I. TOFAN et S. NISTOR

Soit G un groupe relativement à l'opération $\cdot : G \times G \to G$, dont l'élément neutre est l'élément $e \in G$. On dit que le groupe G est linéarisable, s'il existe sur G une relation d'ordre totale „$\leqslant$" qui soit compatible à gauche et à droite par rapport à l'opération „$\cdot$", c-à.d. quels que soient $x, y, z \in G$, on a l'implication $x \leqslant y \Rightarrow xz \leqslant yz$ et $zx \leqslant zy$ (par ab on a noté $a \cdot b$, $a, b \in G$).

Un groupe G muni d'une relation d'ordre totale compatible à gauche et à droite avec l'opération du groupe est nommé groupe linéairement ordonné ou o-groupe.

Notre Note présente une condition nécessaire et suffisante afin qu'un groupe soit linéarisable : on obtient comme des corollaires quelques théorèmes connus sur les groupes linéarisables.

D'autres conditions, avec une applicabilité plus restreinte, sont énoncées dans [7, 16, 17, 21, 22, 23, 25] et divers développements dans [1, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 18, 19, 24]. [3] concerne les groupes qui peuvent être dotés d'une relation d'ordre totale compatible à droite.

Pour les définitions non présentées, nous renvoyons à [2], [4] ou [11].

Soit $(G, \cdot, e)$ un groupe. Un sous-ensemble P de G est dit p-monoïde, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $PP \subseteq P$.
2. $P \cap P^{-1} = \{e\}$,
3. $aPa^{-1} \subseteq P$, pour tout $a \in G$,
4. $P \cup P^{-1} = G$.

Il est clair qu'un groupe G est un o-groupe s'il possède un p-monoïde, plus précisément, si $(G, \leqslant)$ est un o-groupe alors $P = \{x \in G / e \leqslant x\}$ est un p-monoïde du groupe G et réciproquement, étant donné un p-monoïde P du groupe G alors G est un o-groupe par l'équivalence : $x \leqslant y \Leftrightarrow yx^{-1} \in P$.

Pour ennoncer le théorème central nous avons besoin encore de certaines notions et notations.

Définition. *Soit $(G, \cdot, e)$ un groupe. Un système $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de sous-groupes invariants du groupe G est dit système invariant si :*

i) $\mathcal{H}$ este totalement ordonné par rapport à l'inclusion ;

ii) $\mathcal{H}$ est stable par rapport à la réunion et à l'intersection quelconque ;

iii) $\{e\}$, $G \in \mathcal{H}$.

Pour tout $g \in G$, $g \neq e$, *on va noter*, $H_g = \bigcup_{g \notin H_\alpha \in \mathcal{H}} H_\alpha$, $H_g^* = \bigcap_{g \in H_\alpha \in \mathcal{H}} H_\alpha$

Définition. *Un système invariant* $\mathcal{H}$ *est dit o-invariant si :*

1. *Pour tout* $g \in G$, H_g^*/H_g *est o-groupe ; on note* P_g *le p-monoïde correspondant ;*

2. *Si* $g \in G$ *est tel que* $gH_g \in P_g$ *alors pour tout* $a \in G$, $aga^{-1}H_g \in P_g$.

Théorème : *Un groupe* $(G, \cdot, e)$ *est linéarisable ssi il possède un système o-invariant.*

Démonstration : La nécessité est évidente car $\{e\} \subset G$ est un système o-invariant. Pour démontrer que l'existence d'un système o-invariant $\mathcal{H}$ est suffisante pour que G soit linéarisable, on fait d'abord la remarque que pour tout $g \in G$ il n'existe pas $H_\alpha \in \mathcal{H}$ tel qu'on ait, $H_g \subset H_\alpha \subset H_g^*$: il en résulte que si $H_\alpha \in \mathcal{H}$ est tel que $H_g \subseteq H_\alpha \subseteq H_g^*$ alors $H_\alpha = H_g$ ou $H_\alpha = H_g^*$.

Soit $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un système o-invariant du groupe G. On va démontrer que $P = \{g/g \in G,\ g = e$ ou $(g \neq e$ et $gH_g \in P_g)\}$ est un p-monoïde du groupe G.

1. Soient $g, h \in P$; on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $H_g \subseteq H_h$, d'où il résulte que $H_g^* \subseteq H_h$. On constate que $h \notin H_h$ et $gh \in H_h$ entraînent $g \notin H_h$ et par suite, $H_g \supseteq H_h$, d'où $H_g = H_h$ et donc $P_g = P_h$. De $gh \in H_h$, il résulte $gh\ H_h = H_h$, c'est-à-dire $(g\,H_h)\,(h\ H_h) = H_h$ d'ou $gH_h = h^{-1}H_{h^{-1}}$. Mais, $gH_h = gH_g \in P_g$ et donc $h^{-1}H_{h^{-1}} \in P_g = P_h$, d'où $h^{-1} \in P$, ce qui est absurde. Il résulte qu'on a, $gh \notin H_h$. De $gh \notin H_h$ et $gh \in H_h^*$ il résulte l'égalité : $H_{gh} = H_h$. Si on suppose que $ghH_h \notin P_h$ alors $ghH_h \in P_h^{-1} \setminus \{H_h\}$, c'.à.d., $gH_hhH_h \in P_h^{-1} \setminus \{H_h\}$ et parceque $hH_h \in P_h$ on a $gH_h \in P_h^{-1} \setminus \{H_h\}$.

Si $H_g \subset H_h$, alors $g \in H_h$ et donc $gH_h = H_h \in P_h$, ce qui est absurde. Si $H_g = H_h$ alors $ghH_h = gH_g\,hH_h \in P_h$ et donc $gH_h \in P_h$, ce qui est absurde. En vertu des résultats précédents on a $ghH_h \in P_h$ et $ghH_{gh} \in P_{gh}$ et donc $gh \in P$, ce qui démontre l'inclusion $PP \subseteq P$.

2. Il est clair que $e \in P$. Si $g \in P$, $g \neq e$, alors $gH_g \in P_g$ et donc $(gH_g)^{-1} \notin P_g$ d'ou $g^{-1} \notin P$ car $H_g = H_{g^{-1}} = (H_g)^{-1}$. On a donc l'égalité, $P \cap P^{-1} = \{e\}$.

3. Soit $g \in G$. On a, $gH_g \in P_g$ ou $g^{-1}H_g \in P_g$ c'à.d., $gH_g \in P_g$ ou $g^{-1}H_{g^{-1}} \in P_g$ ce qui exprime que $g \in P$ ou $g^{-1} \in P$ et donc l'égalité $P \cup P^{-1} = G$ est demontrée.

4. Soit $g \in G$ tel que $gH_g \in P_g$. Pour tout $x \in G$, $xgx^{-1}H_{xgx^{-1}} \in P_{xgx^{-1}}$ (car $H_{xgx^{-1}} = H_g$ et $P_{xgx^{-1}} = P_g$). Les résultats 1. —4. démontrent que P est un p-monoïde et donc G est linéairement ordonné par rapport à la relation

$$x \leqslant y \Leftrightarrow yx^{-1} \in P,\ x,\ y \in G.$$

Remarque. Si pour la définition d'un système invariant d'un groupe G on renonce à la condition que $\mathcal{H}$ contienne $\{e\}$, (resp. contienne G), le théorème précedent est encore valable si on demande que $\mathcal{H}$ contient un élément H_ω qui soit o-groupe et pour tout $x \in G$, $xP_{H\omega}\ x^{-1} \subseteq P_{H\omega}$ (G/H_ω soit un o-groupe).

Corollaire 1. (Théorème de F. Levi) $[14]_2$. Etant donné un groupe G et un sous-groupe invariant H de G alors si H, G/H sont linéarisables, G est linéarisable ssi pour tout $x \in G$ on a $xP_Hx^{-1} \subseteq P_H$.

Corollaire 2. (Théorème de Fuchs) $[7]_3$. Un groupe G est linéarisable ssi le centre Z de G et le groupe quotient G/Z sont linéarisables.

En effet, si $Z_1 = G/Z$ alors pour tout $x \in G$ on a, $aZ \in P_{Z_1} \Rightarrow xax^{-1}Z \in P_{Z_1}$. Puisque pour tout $x \in G$, $xP_Zx^{-1} \subseteq P_Z$ il résulte que $\{e\} \subset Z \subset G$ est un système o-invariant du groupe G.

Corollaire 3. (Théorème de B. H. Neumann, G. Birckhoff) $[20]_1$, $[9]$, $[7]_3$. Tout groupe libre est linéarisable.

Le corollaire résulte en démontrant que la chaîne centrale descendente d'un groupe libre est un système o-invariant.

A partir de la notion du chaîne centrale ascendente relativement aux ZA-groupes, groupes nilpotents et R-groupes on a les corollaires suivants :

Corollaire 4. Tout $R + ZA$ groupe est linéarisable.

Corollaire 5. Tout R groupe nilpotent est linéarisable.

Remarque. En vertu d'un théorème de B. H. Neumann $[20]_2$, qui affirme qu'un groupe G est linéarisable, ssi tout sous-groupe de G finitement engendré est linéarisable, il résulte que tout groupe local libre et tout R-groupe local nilpotent est linéarisable.

Remarque. Si on considère que $x \leqslant y$ implique seulement $xz \leqslant yz$ on obtient la notion de d-o-groupes pour laquels on peut formuler des résultats analogues aux résultats précédents.

Remarque. On peut démontrer, sans utiliser la notion de système o-invariant, que tout groupe metaabélien est linéarisable ssi il est sans torsion.

Pour cela nous définissons le p-monoïde simple, demi-commutateur et isolé d'un groupe G comme une partie $P \subset G$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. $PP \subseteq P$,
2. $P \cap P^{-1} = \{e\}$,
3. $aPa^{-1} \subseteq P$, $\forall a \in G$,
4. $\forall a, b \in G$ ou $[a, b]$ ou $[b, a] \in P$
5. $a^n \in P$, $a \in G \Rightarrow a \in P$ $(n \in N)$.

Par $[a, b]$ on a noté le commutateur des elements $a, b \in G$. On peut démontrer que P_Z, où Z est le centre de G (Z est un o-groupe en vertu du théorème de Levi), satisfait aux conditions 1. — 5. de la définition a antérieure et pour $x \in G$ tel que $x \notin P \cup P^{-1}$, où P est un p-monoïde simple demicommutateur et isolé, on peut construire $P_x = \{a/a \in G, \exists n,\ q \in N,\ n \geqslant 1,\ q \geqslant 0 : a^nx^{-q} \in P\}$ qui satisfait aussi aux conditions 1. — 5. et en plus $x \in P_x$, $P_x \supset P$.

En vertu du lemme de Zorn il existe un p-monoïde simple, demi-commutateur et isolé maximal pour lequel on peut montrer qu'il induit un ordre totale sur G par rapport à laquelle G est un o-groupe.

BIBLIOGRAPHIE

1. Andrus J. P., Buston A. T., — *On ordered groups*; Amer. Math. Monthly 70 (1963) (p. 618—628).
2. Bourbaki N. — *Algèbre chap. VI: Groupes et corps ordonnés*. Paris 1952.
3. Conrad P. — *Right ordered groupes*; Michigan Math. J. 6 (1959) (p. 267—275).
4. Dieudonné J. — *Sur les corps ordonnables*; Bol. Soc. Math. São Paolo 1 (1946) (p. 69—75).
5. Everett C. J. — *Note on a result of L. Fuchs on ordered groups*; Amer. J. Math. 72 (1950) (p. 216).
6. Everett C. J., Ulam S. — *On ordered groups*; Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945) (p. 208—216).
7. Fuchs L. — 1. *On the existence of the partial order of groups*; Amer. J. Math. 72 (1950) (p. 191—194).
   2. *Note on ordered groups and rings*; Fundam. Math. 46 (1958) (p. 167—174).
   3. *Частично упорядоченные алгебраические системы* „Мир" 1965.
8. Gravet K. A. H. — *Ordered abelian groups*; Quart. J. Math. Oxford 7 (1956) (p. 57—63).
9. Iwasawa K. — *On linearly ordered groups*; J. Math. Soc. Japan 1 (1948) (p. 1—9).
10. Кокорин А. И. — *Об упорядоченных группах*; У. М. Н. 19 (1964) (p. 215).
11. Курош А. Г. — *Теория групп*, „Наука" 1967.
12. Копытов В. М. — *Некоторые вопросы теории упорядоченных групп*; У. М. Н. 20 (1965) (p. 305).
13. Кутыев К. М. — *К теории частично упорядоченных групп*; У.М.Н. 11 (1956) (p. 258).
14. Levi F. — 1. *Arithmetische Gesetze im Gebiete discreter Gruppen*; Rend. Circolo mat. Palermo 35 (1913) (p. 225—236). 2. *Contributions to the theory of ordered groups*; Proc. Indian Acad. Sci. A, 17 (1943) (p. 199—201).
15. Lorenzen P. — *Über halbgeordnete Gruppen*, Math. Z. 52 (1950) (p. 483—526).
16. Los J. — *On the existence of linear order in a group*; Bull. Acad. Polon. Sci. cl iii 2 (1954) (p. 21—23).
17. Мальцев А. И. — *Об упорядоченных группах*; Изв. А. Н. СССР, сер. матем. 13 (1949) (p. 473—482).
18. Matsushita S. — *On the foundation of orders in groups*; J. Inst. Politech. Osaka City Univ. 2 (1951) (p. 19—22).
19. Michiura T. — *Sur les groupes ordonnés*; C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952) (p. 1422—1423, p. 1521—1522).
20. Neumann B. H. — 1. *On ordered groups*; Amer. J. Math. 71 (1948) (p. 1—18).
   2. *An embedding theorem for algebraic systems*; Proc. London Math. Soc. 4 (1954) (p. 138—153).
21. Ohnishi M. — 1. *On linearization of ordered groups*; Osaka Math. J. 2 (1950) (p. 161—164).
   2. *Linear order on a group*; Osaka Math. J. 4 (1952) (p. 17—18).
22. Подерюгин В. Д. — *Условия упорядочиваемости групп*; Изв. А. Н. СССР, сер. матем. 21 (1957) (p. 199—208).
23. Rhemtula A.; Gupta N. — *On ordered groups*; Alg. Univ. 1 (1971). (p. 129—132).
24. Teh H. H. — *Construction of orders in Abelian groups*; Proc. Cambridge Philos. Soc. 57 (1961) (p. 476—482).
25. Tully E. — *The existence of a total order on a group*; Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962) (p. 217—219).

Received 12-XII 76

Departement Mathématique; Université „Al. I. Cuza" — Iassy — Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. CUZA" din Iaşi
Tomul XXIII, s. I a, 1977, f. 1

ON $C_G(I, E_n)$ SPACES OF CONTINUOUS FUNCTIONS*)

BY

L. PANDOLFI (Firenze)

Let K be a linear mapping from the euclidean space E^n into itself. By $|x|$ we denote the Euclidean norm of $x \in E^n$, while $|K| = \sup\{|Kx| : |x| = 1\}$ is the norm of the mapping K. We denote further by $R(K)$ and $N(K)$ the range and the kernel (null space) of K. Let $P(K)$ be the projector of E^n on $R(K)$. By $\widetilde{K}$ we shall denote the restriction of K to $(N(K))^{\perp}$ (the orthogonal complement of $N(K)$). Let $\widetilde{K}^{-1}$ be the inverse of $\widetilde{K}$, defined on $R(\widetilde{K}) = R(K)$ and let us define K_{-1} by $K_{-1} = \widetilde{K}^{-1} P(K)$. If $I = \{t : t \in E, 0 \leqslant t < \omega \leqslant +\infty\}$ and $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ is a basis in E^n, let $t \to G(t)$ be an $n \times n$ matrix function, continuous on I (i.e. a mapping from I into the space of linear transformations from E^n into itself, the basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ being fixed).

We say that a continuous function $x(t)$ from I into E^n belongs to $C_G(I, E^n)$, if and only if $P(G(t))\, x(t) = x(t)$ for any $t \in I$ and $v(t) = G_{-1}(t)\, x(t)$ is bounded on I. The norm in C_G is defined by

$$\|x\|_G = \sup\{|G_{-1}(t)\, x(t)| ;\ t \in I\}$$

and, as shown in [1] C_G is a Banach space.

The aim of this paper is to give a necessary and sufficient condition for two Banach spaces C_G and C_H to contain the same elements. In this case it follows also that they are isomorphic.

We first prove the following result:

Lemma 1. *Let $G(t)$ and $H(t)$ be two $n \times n$ matrices, such that $R(G(t)) = R(H(t))$, $t \in I$. Then the following formulas hold:*

$$(H_{-1} G)_{-1} = G_{-1} H, \tag{1}$$

$$|G| \geqslant |G_{-1}|^{-1}, \qquad |H| \geqslant |H_{-1}|^{-1}. \tag{2}$$

Proof. Let us remark that

$$(H_{-1} G)_{-1} = (\widetilde{H_{-1} G})^{-1} P(H_{-1} G) = (\widetilde{H}^{-1} \widetilde{G})^{-1} P(H_{-1} G). \tag{3}$$

*) Work supported by the Italian C.N.R.