12. Pachpatte B.G. — *Behavioral relationships between two nonlinear integrodifferential equations*, Proc. Indian Acad. Sci. 83 A (1976), 219—230.
13. Pachpatte B.G. — *Some problems in Volterra integrodifferential equations under general class of perturbations*, Journal of M.A.C.T. 9 (1976), 115—128.
14. Pachpatte B.G. — *Stability of Volterra integral equations under a general class of perturbations*, Utilitas Mathematica, 10 (1976), 65—75.
15. Pachpatte B.G. — *On some nonlinear Volterra integrodifferential equations*, An. Univ. Iași, Sect. I a Mat. XXII (1976), 153—160.

Received 15. VI. 1977

Department of Mathematics and Statistics
Marathwada University
Aurangabad — 43 1002
India

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" Iași
Tomul XXIV, S. I a, f. 1, 1978

PRINCIPIUL MAXIMULUI MODULULUI PENTRU SISTEME HIPERBOLICE DE ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE

DE

ANTON S. MUREȘAN

1. În [1] S. Agmon, L. Nirenberg, M. H. Protter studiază principii de maxim pentru soluțiile unei clase de ecuații hiperbolice, principii care sînt aplicate la ecuații de tip mixt eliptic-hiperbolic.

Astfel se consideră ecuația hiperbolică liniară exprimată în coordonatele caracteristice

$$u_{\xi\eta} + au_\xi + bu_\eta + cu = 0, \tag{1}$$

în domeniul D din planul caracteristic (ξ, η) mărginit de două segmente caracteristice Γ_1 și Γ_2, care pot fi luate a fi axele pozitive ξ și η respectiv, și de o curbă netedă G avînd punctele terminale pe aceste axe și care este tăiată cel mult o dată de orice linie $\eta = \text{const}$. Se demonstrează următoarea teoremă:

Teorema 1. *Fie $u = u(\xi, \eta)$ soluție a inecuației*

$$u_{\xi\eta} + au_\xi + bu_\eta + cu \geqslant 0, \tag{i1'}$$

în domeniul D, astfel încît pe $\Gamma_1(\xi = 0)$ avem

$$u_\eta(0, \eta) \geqslant 0. \tag{2}$$

a fDăcuncțiile a, b, c verifică inegalitățile

$$a \leqslant 0, \quad a_\xi + ab - c \leqslant 0, \quad c \leqslant 0, \tag{3}$$

atunci maximul pozitiv a lui u în $\bar{D}$ este atins pe curba G.

2. Folosim aici acest rezultat pentru a stabili principii de maxim pentru modulul soluției unui sistem hiperbolic de ecuații cu derivate parțiale. Fie în domeniul D sistemul

$$Lu \equiv u_{\xi\eta} + A(\xi, \eta)u_\xi + B(\xi, \eta)u_\eta + C(\xi, \eta)u = 0, \tag{4}$$

unde

$$u : D \to R^n, \quad u^*(\xi, \eta) = (u_1(\xi, \eta), \ldots, u_n(\xi, \eta)), \text{ iar}$$

$$B, C \in C(\bar{D}, M_{nn}(\mathbf{R})), \; A \in C^1(\bar{D}, M_{nn}(\mathbf{R})).$$

Considerăm funcția $|u| : D \to \mathbf{R}$ definită prin $(\xi, \eta) \to |u(\xi, \eta)|$, și presupunem că ca este nedescrescătoare în variabila η pe Γ_1, adică are loc inegalitatea

$$|u(0,\eta_1)|_\eta \geqslant 0. \tag{5}$$

Fie $u = |u|e$, unde $e \in C^2(D, \mathbf{R}^n)$ cu $|e| = 1$. Atunci din (4) avem

$$\begin{aligned} Lu = L(|u|e) = (|u|e)_{\xi\eta} + A(|u|e)_\xi + B(|u|e)_\eta + C(|u|e) = |u|_{\xi\eta}e + \\ + |u|_\xi e_\eta + |u|_\eta e_\xi + |u|e_{\xi\eta} + |u|_\xi Ae + |u|Ae_\xi + |u|_\eta Be + |u|Be_\eta + |u|Ce, \end{aligned} \tag{6}$$

și cum $(e, e_\xi) = 0$, $(e, e_\eta) = 0$, obținem

$$\begin{aligned} (u, Lu) = |u|\{|u|_{\xi\eta} + (e, Ae)|u|_\xi + (e, Be)|u|_\eta + [(e, e_{\xi\eta}) + (e, Ae_\xi) + \\ + (e, Be_\eta) + (e, Ce)]|u|\} = 0. \end{aligned}$$

Pentru $|u| \neq 0$ se ajunge la ecuația hiperbolică în $|u|$:

$$|u|_{\xi\eta} + (e, Ae)|u|_\xi + (e, Be)|u|_\eta + (e, Le)|u| = 0. \tag{7}$$

Acum asupra matricelor coeficienți ai sistemului (4) presupunem că verifică anumite condiții de tipul acelora din relația (3). Mai precis presupunem că oricare ar fi $e \in C^2(D, \mathbf{R}^n)$, cu $|e| = 1$ avem

$$(e, Ae) \leqslant 0,\ (e, Ae)_\xi + (e, Ae)(e, Be) - (e, Le) \leqslant 0, (e, Le) \leqslant 0. \tag{8}$$

Are loc

Teorema 2. *Dacă matricele A, B, C verifică relațiile* (8), *atunci oricare ar fi $u \in C^2(D, \mathbf{R}^n) \cap C(\overline{D}, \mathbf{R}^n)$, $|u| \not\equiv 0$, soluție a sistemului* (4) *ce verifică condiția* (5), *maximul lui $|u(\xi, \eta)|$ este atins pe curba G.*

Demonstrație. Pentru $|u(\xi, \eta)|$ am găsit ecuația hiperbolică (7). Acesteia îi putem aplica principiul de maxim obișnuit enunțat în teorema 1. Se constată că relațiile (5), (8) sînt chiar condițiile ce asigură faptul că $|u(\xi, \eta)|$ își atinge maximul său pe G. Teorema este astfel demonstrată.

În continuare, urmînd [1], vom introduce noțiunea de proprietate de maxim de tip Haar pentru sistemele hiperbolice.

Definiția 1. *Spunem că o funcție $v = v(\xi, \eta)$ cu $v_\eta \geqslant 0$ pe Γ_1 are proprietatea de maxim în domeniul D dacă pentru orice subdomeniu D', mărginit de un segment din Γ_1, un segment $\eta = \text{const.}$ și o curbă netedă G' situată deasupra lui $\eta = \text{const.}$ și avînd aceeași proprietate cu G, maximul lui v în $\overline{D}$, dacă-i pozitiv, este atins pe G'.*

Definiția 2. *Spunem că operatorul* (4) *satisface proprietatea de maxim de tip Haar în domeniul D și în raport cu $|u(\xi, \eta)|$ dacă există o funcție pozitivă $g = g(\xi, \eta)$, de două ori continuu diferențiabilă, astfel încît pentru orice vector $u(\xi, \eta)$ cu*

$$|u|_{\xi\eta} + (e, Ae)|u|_\xi + (e, Be)|u|_\eta + (e, Le)|u| \geqslant 0 \tag{9}$$

oricare ar fi $e \in C^2(D, \mathbf{R}^n)$ cu $|e| = 1$ și $(g|u|)_\eta \geqslant 0$ pe Γ_1, funcția $g|u|$ are proprietatea de maxim în D.

Relativ la proprietatea de maxim de tip Haar are loc

Teorema 3. *Condiția necesară și suficientă ca operatorul hiperbolic* (4) *să aibă proprietatea de maxim de tip Haar în raport cu funcția $|u(\xi, \eta)|$ este ca inegalitatea a doua din relația* (8) *să aibă loc oricare ar fi $e \in C^2(D, \mathbf{R}^n)$ cu $|e| = 1$.*

Demonstrație. Avem de observat că în condițiile precizate este aplicabilă teorema 3 din [1], care stabilește chiar condiția necesară și suficientă pentru existența proprietății de maxim de tip H a a r pentru o inegalitate hiperbolică de forma (9). Teorema este astfel demonstrată.

3. În continuare vom considera sisteme hiperbolice în coordonate carteziene. Fie în planul xOt punctele $\mathcal{A}(2\alpha, 0)$, $\mathcal{B}(2\beta, 0)$, $\mathcal{C}(\alpha + \beta, \beta - \alpha)$ unde $0 < \alpha < \beta$. Luăm drept domeniu D triunghiul $\mathcal{ABC}$, în care considerăm sistemul de ecuații diferențiale hiperbolice

$$\mathcal{L}u = u_{xx} - u_{tt} + Au_x + Bu_t + Cu = 0. \tag{10}$$

unde

$$A, B \in C^1(\overline{D}, M_{nn}(\mathbf{R})), \qquad C \in C(\overline{D}, M_{nn}(\mathbf{R})). \tag{11}$$

Presupunem că vectorul funcția $u^*(x, t) = (u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t))$ este astfel încît

$$|u|_t \leqslant 0 \text{ pe } \mathcal{AB} \text{ și } |u| = 0 \text{ pe } \mathcal{AB}, \tag{12}$$

unde $u = |u|e$, $e \in C^2(D, \mathbf{R}^n)$, $|e| = 1$.

Vom arăta că, în anumite condiții asupra matricelor A, B, C, pentru orice soluție $u(x, t)$ a sistemului (10) ce verifică relațiile (12), avem $|u(x, t)| = 0$, deci $u(x, t) = 0$. Are loc

Teorema 4. *Dacă $u \in C^2(D, \mathbf{R}^n) \cap C(\overline{D}, \mathbf{R}^n)$ este soluție în domeniul D a sistemului* (10) *care verifică relațiile* (12), *iar matricele coeficienți A, B, C sînt astfel încît*

$$\begin{aligned} &(e, Ae) + (e, Be) \geqslant 0, \qquad (e, Be) - (e, Ae) \geqslant 0, \\ &(e, \mathcal{L}e) - (e, Ae)_x - (e, Be)_t \geqslant 0 \text{ în domeniul } D \end{aligned} \tag{13}$$

oricare ar fi $e \in C^2(D, \mathbf{R}^n)$ cu $|e| = 1$, atunci $u \equiv 0$ în D.

Demonstrație. Presupunem $|u(x, t)| \not\equiv 0$ în domeniul D. Atunci obținem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = \mathcal{L}(|u|e) = (|u|e)_{xx} - (|u|e)_{tt} + A(|u|e)_x + B(|u|e)_t + \\ + C(|u|e) = |u|_{xx}e + 2|u|_x e_x + |u|e_{xx} - |u|_{tt}e - 2|u|_t e_t - \\ - |u|e_{tt} + |u|_x Ae + |u|Ae_x + |u|_t Be + |u|Be_t + |u|Ce, \end{aligned} \tag{14}$$

și deci

$$\begin{aligned} (u, \mathcal{L}u) = |u|\{|u|_{xx} + |u|(e, e_{xx}) - |u|_{tt} - |u|(e, e_{tt}) + \\ + |u|_x(e, Ae) + |u|(e, Ae_x) + |u|_t(e, Be) + |u|(e, Be_t) + \\ + |u|(e, Ce)\} = 0. \end{aligned}$$

Obținem astfel ecuația hiperbolică în $|u|$

$$|u|_{xx} - |u|_{tt} + (e, Ae)|u|_x + (e, Be)|u|_t + (e, \mathcal{L}e)|u| = 0. \tag{15}$$

Cum (15) este o ecuație hiperbolică obișnuită putem aplica proprietatea de maxim enunțată în [4]. Condițiile (12) și (13) implică atunci că $|u| \leqslant 0$ în D, adică $|u| = 0$ în D, sau $u \equiv 0$ în D. Teorema este astfel demonstrată.

BIBLIOGRAFIE

1. Agmon, S., Nirenberg, L., Protter, M.H. — *A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type*, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 455—470.
2. Mureșan, A. — *On certain boundary value problems*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, Mathematica, 1 (1976), 31—37.
3. Mureșan, A. — *A maximum principle for second order parabolic system*, Mathematica (to appear).
4. Protter, M.H., Weinberger, H.F. — *Maximum principle in differential equations*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1967.

Primită la 1. I 1977

Facultatea de științe economice
Universitatea din Cluj-Napoca
R. S. România

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" Iași
Tomul XXIV, S. I a, f. 1, 1978

FLOW - INVARIANCE FOR HIGHER ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

BY

N. PAVEL and C. URSESCU

1. **Introduction.** Suppose that X is a Banach space over the real or complex field and that $\|\cdot\|$ denotes the norm of X. Throughout this note D is a subset of X.

In this paper we study the existence of a solution $u : [a, b) \to D$ of Cauchy Problem to the equation $(E) u^{(n)}(t) = f(t, u(t))$, where $n \geqslant 2$ is a natural number and a, b are real numbers $(a < b \leqslant +\infty)$.

For simplicity of writting we shall treat in details only the case $n = 2$, and we shall give (without proof) the corresponding result for $n > 2$. Actually the result corresponding to $n > 2$, has the same proof (with minor modifications) as that from the case $n = 2$.

Let us consider the Cauchy Problem

$$u''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [a, b) \tag{1.1}$$

$$u(a) = x, \; u'(a) = y, \quad x \in D, \; y \in X, \tag{1.2}$$

where f is continuous function from $[a, b) \times D$ into X.

By a solution u to the problem (1.1) + (1.2) we mean a function $u : [a, c] \to D$ of class $C^2([a, c])$ satisfying (1.1) on $[a, c]$ and (1. 2), where $c = c(x, y) \in (a, b)$.

Define $M \subset X \times X$ as below

$$M = \left\{ [x, y], x \in D, y \in X; \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h^2} d\left(x + hy + \frac{h^2}{2} f(t, x); D \right) = 0, \; t \in [a, b) \right\} \tag{1.3}$$

where $d(x ; D)$ denotes the distance from $x \in X$ to D. We shall see that if (1.1) + (1.2) has a solution, then, necessarily, $(x, y) \in M$.

If the problem (1.1) + (1.2) has at least a solution $u : [a, c(x, y)] \to D$ for each $(x, y) \in M$ then D is said to be an invariant set (or flow-invariant set) for (1.1).

The invariant sets for the first order differential equations are studied by Brézis [1], Crandall [2], Martin [3]. Some generalizations of this problem are given in [4 — 6]. The above reference on this subject is not complete. A way to study the problem of invariant sets for (1.1) was given in [4].