$$\times \int_0^t (\| v(\xi) \|_2^2 + j \| \nu(\xi) \|_2^2) (\| v_1(\xi) \|_p^q + \| \nu_1(\xi) \|_p^q) \, d\xi.$$

It is easy to see that (3.8) is equivalent to

$$\frac{d}{dt} f(t) \leqq 0.$$

Therefore, f is non-increasing. Since f is initially zero and can never be negative, this implies $f(t) \equiv 0$. Therefore

$$\int_0^t (\| v(\xi) \|_2^2 + j \| \nu(\xi) \|_2^2) (\| v_1(\xi) \|_p^q + \| \nu_1(\xi) \|_p^q) \, d\xi = 0.$$

Returning now to (3.8), we conclude that $v(t) = 0$, $\nu(t) = 0$, and this leads to $\{ v_2(t), \nu_2(t) \} \equiv \{ v_1(t), \nu_1(t) \}$.

The proof of Theorem 2 is complete.

REFERENCES

1. Eringen, A.C. — *Theory of Micropolar Fluids*, J. Math. Mech., 16 (1966), pp. 1—18.
2. Shinbrot, M. — *Lectures on fluid mechanics*. Notes on Mathematics and its Applications, Gordon and Breach, New York, London, Paris, 1973.
3. Sava, V. — *The initial Boundary-Value Problems in the Theory of Micropolar Fluids*, ZAMM 58 (1978) (in press).

Received 16. XI. 1977

Department of Mathematics
Polytechnic Institute of Iaşi
R.S. România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXIV, S. I a, f. 1, 1978

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗВЕТВЛЕНИЙ ДАННОЙ ДЛИНЫ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧИСЛА ВИСЯЧИХ ДУГ

Э. ДАНИ

1. *Введение.* Главной целю работы является установление распределения

$$dA(m) = \left| \begin{matrix} n \\ A(m, n) \end{matrix} \right|, \quad m \geqslant 0, \; n = 0, m, \tag{1}$$

множества всех разветвлений [2] ((некоммутативных [4]) прадеревьев [1]) A полудлины m, $L(A) = 2m$, в зависимости от числа n концевых висячих дуг, называемых в работе, для краткости, висячими дугами. Употребляя понятие разветвления, определённое в [2], и, имея в виду основные свойства операций с разветвлениями, изученных в [4], следует, что висячие дуги являются неприводимыми дивизорами любого порядка формы 10 разветвления. Заметим, что рассмотрение распределения разветвлений в зависимости от длины, или от полудлины, — это одно и то же. В представлении, для большей общности, вместо висячих дуг рассматриваются подразветвления, неприводимые дивизоры D любой определённой формы, полудлины m_0, $L(D) = 2\, m_0$. Таким образом решается более общая проблема установления распределения множества разветвлений A полудлины m в зависимости от числа n, $0 \leqslant n \leqslant [m/m_0]$, неприводимых дивизоров D разветвления, любой, но определённой формы. В частном случае $m_0 = 1$ общее распределение переходит в распределение множества разветвлений данной длины в зависимости от числа висячих дуг разветвления.

2. *Генерирование разветвлений индукцией.* Из следующих двух способов генерирования разветвлений алгоритмом-лабиринтом [2] и индукцией [5], здесь подходит второй способ. В дальнейшем дадим краткое описание последнего способа.

Разветвление $A0$ тогда и только тогда является неприводимым, когда оно имеет форму $A0 = 1.A.0$, где A-разветвление, которое может быть и пустым разветвлением [4]. Таким образом, будучи генерированными все множества разветвлений $A(k)$ полудлины k, $k=0, m-1$, $m \geqslant 1$, для генерирования множества разветвлений $A(m)$ полудлины m имеет место следующая рекуррентная формула :

$$A(m) = \bigcup_{k=0}^{m-1} 1.A(k).0.A(m-1-k), \quad m \geqslant 1, \tag{2}$$

где произведение $1.A(k).0.A(m-1-k)$ получается умножением всякого разветвления множества $1.A(k).0$ на каждое разветвление множества $A(m-1-k)$. Из этого следует, что число всех разветвлений полудлины m дано формулой чисел Каталана [7] в соответствии с формулой (2):

$$T(m)=\sum_{k=0}^{m-1} T(k)\,T(m-1-k),\quad m\neq 1, \tag{3}$$

которая в явной форме имеет вид: $T(m)=C_{2m}^{m}/(m+1)$, где C – символ сочетаний.

3. *Генерирование распределения $dA(m)$ индукцией.* Если для всех полудлин k, $k=0,\ m-1$, $m\geqslant 1$ известны распределения (1), переход к распределению разветвлений полудлины m делается так же, как раньше при генерировании всех разветвлений полудлины m. Если предполагается, что разветвления $A(k,i)$ содержат i раз фиксированный неприводимый дивизор D, а $n-i$ раз разветвления $A(m-1-k,\ n-i)$, то следует, что произведение $1.A(k,i).\ 0.A(m-1-k,n-i)$ содержит n раз фиксированный неприводимый дивизор D с одним единственным исключением. Исключение появляется тогда, когда разветвление $1.A(k,i).0$ равно D. В этом случае $k=m_0-1$, $i=0$ и следовательно $1.A(k,i).0=D$. Таким образом, произведение $1.A(k,i).0.A(m-1-k,\ n-i)=D.A(m-m_0,\ n)$ надо исключить из множества разветвлений $A(m,n)$ и надо включить во множество разветвлений $A(m,n+1)$ с условием $n+1\leqslant[m/m_0]$. Так получается следующая теорема:

Теорема 1. 1) *Распределение* (1) *множества всех разветвлений $A(m)$ полудлины m, $L(A)=2m$, в зависимости от числа n неприводимых дивизоров D определённой фиксированной формы полудлины m_0, $L(D)=2m_0$ можно генерировать рекуррентно, применяя следующие формулы: $A(0,0)$ – пустое разветвление Φ, а для $m\geqslant 1$*

$$\left\{\begin{aligned} &A(m,n)=\Bigl(\bigcup_{k=0}^{m-1}\bigcup_{i=i'}^{i''} 1.A(k,i).0.A(m-1-k,\ n-i)\Bigr)\cup\Delta_n,\quad n\geqslant 0,\\ &\Delta_n=\begin{cases} P\lessdot Q & \text{для } 1\leqslant n\leqslant[m/m_0]-1,\\ P & \text{для } 1\leqslant n=[m/m_0],\\ \lessdot Q & \text{для } n=0,\\ \Phi & \text{для } n>[m/m_0],\end{cases}\end{aligned}\right. \tag{4}$$

где $P=D.A(m-m_0,\ n-1)$, $Q=D.A(m-m_0,\ n)$; $\lessdot$ – символ операции вычитания множеств; $i'\leqslant i''$, i' и i'' подчинены ограничениям

$$\left\{\begin{aligned} &i'=\begin{cases} 0 & \text{для } k\leqslant m-m_0n-1,\\ n-[(m-1-k)/m_0] & \text{для } k>m-m_0n-1,\end{cases}\\ &i''=\begin{cases} [k/m_0] & \text{для } k<m_0n,\\ n & \text{для } k\geqslant m_0n.\end{cases}\end{aligned}\right. \tag{5}$$

2) *Распределение числа $T(m)=\mathrm{Card}\ A(m)$ – это*

$$t(m)=\begin{bmatrix} n \\ T(m,n)\end{bmatrix},\quad m\geqslant 0,\ n=0,\ [m/m_0], \tag{6}$$

где частоты $T(m,n)=\mathrm{Card}\ A(m,n)$ даны следующими рекуррентными формулами:

$$\left\{\begin{aligned} &T(0,0)=1,\\ &T(m,n)=\Bigl(\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=i'}^{i''} T(k,i)\,T(m-1-k,\ n-i)\Bigr)+\delta_n,\quad m\geqslant 1,\ n\geqslant 0,\\ &\delta_n=\begin{cases} U-V & \text{для } 1\leqslant n\leqslant[m/m_0]-1,\\ U & \text{для } 1\leqslant n=[m/m_0],\\ -V & \text{для } n=0,\\ 0 & \text{для } n>[m/m_0],\end{cases}\end{aligned}\right. \tag{7}$$

где $U=T(m-m_0,\ n-1)$, $V=T(m-m_0,\ n)$ а i' и i'', $i'\leqslant i''$, даны формулами (5).

Значения функции $T(m,n)$ вычисленные для различных значений m_0, $m_0=1,3$: $m=0,10$: $n=0,[m/m_0]$, сведены в таблицы T_1-T_3.

1. Число $T(m,n)$ разветвлений полудлины m, $m=0,10$ с n, $n=0,10$ неприводимыми дивизорами формы 10 полудлины 1.

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$T(m)$
0	1											1
1	0	1										1
2	0	1	1									2
3	0	1	3	1								5
4	0	1	6	6	1							14
5	0	1	10	20	10	1						42
6	0	1	15	50	50	15	1					132
7	0	1	21	105	175	105	21	1				429
8	0	1	28	196	490	490	196	28	1			1 430
9	0	1	36	336	1176	1764	1176	336	36	1		4 862
10	0	1	45	540	2520	5292	5292	2520	540	45	1	16 796

2. Число $T(m,n)$ разветвлений полудлины m, $m=0,10$ с n, $n=0,[m/2]$ неприводимыми дивизорами формы 1100 полудлины 2.

m \ n	0	1	2	3	4	5	$T(m)$
0	1						1
1	1						1
2	1	1					2
3	2	3					5
4	5	8	1				14
5	13	23	6				42
6	35	69	27	1			132
7	97	212	110	10			429
8	275	662	426	66	1		1 430
9	794	2091	1602	360	15		4 862
10	2327	6661	5912	1760	135	1	16 796

3. Число $T(m, n)$ разветвлений полудлины m, $m=0,10$ с n, $n=0,[m/3]$ неприводимыми дивизорами одной из форм 111000, 110100 полудлины 3.

$m \backslash n$	0	1	2	3	$T(m)$
0	1				1
1	1				1
2	2				2
3	4	1			5
4	11	3			14
5	32	10			42
6	98	33	1		132
7	309	114	6		429
8	998	402	30		1 430
9	3285	1439	137	1	4 862
10	10981	5205	600	10	16 796

4. *Генерирующая функция.* По аналогии с функциональным уравнением $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$ [5] функции $f(x)$, которая при разложении в ряд, имеет коэффициентами числа Каталана $T(m)$, $m \geqslant 0$, равные числам, которые представляют собой число разветвлений полудлины m, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 2. *Генерирующая функция* $g(x, t; m_0)$ *числа* $T(m, n)$ *разветвлений полудлины* m *в зависимости от числа неприводимых дивизоров* D *определённой формы полудлины* m_0 *разветвления дана следующим функциональным уравнением:*

$$xg^2(x, t; m_0) - (1 + (1 - t)x^{m_0})g(x, t; m_0) + 1 = 0. \tag{8}$$

Значение $T(m, n)$ *– это коэффициент члена степени* n *в переменной* t *и степени* m *в переменной* x *ряда Маклорена функции* $g(x, t; m_0)$.

Достоверность уравнения (8) можно доказать следующим образом. В случае $t = 1$ генерирующая функция становится $f(x) = g(x, 1; m_0)$, которая удовлетворяет функциональному уравнению $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$. Имея в виду член δ_n (7), из выражения $1 + xg^2(x, t; m_0)$ надо вычитать $x^{m_0}g(x, t; m_0)$ соответственно члену нулевой степени по отношению к переменной t и надо складывать $tx^{m_0}g(x, t; m_0)$ соответственно члену первой степени по отношению к той же самой переменной t. Итак, $1 + xg^2(x, t; m_0) + (-1 + t)x^{m_0}g(x, t; m_0) = g(x, t; m_0)$, откуда следует формула (8).

В дальнейшем переходим к разложению функции $g(x, t; m_0)$ в ряд. Вводя обозначения $u = 1 + (1 - t)x^{m_0}$, $v = x/u^2$, $f(v) = ug(x, t; m_0)$, уравнение (8) переходит в уравнение $vf^2(v) - f(v) + 1 = 0$, откуда следует, что $f(v)$ является генерирующей функцией числа $T(m)$ равно числу всех разветвлений полудлины m:

$$f(v) = \sum_{m=0}^{\infty} T(m)v^m, \tag{9}$$

и следовательно, применяя обратную подстановку, следует

$$g(x, t; m_0) = \sum_{m=0}^{\infty} T(m)\frac{x^m}{u^{2m+1}}, \quad \frac{1}{u^{2m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+2m}^{2m}(t - 1)^k x^{km_0}, \tag{10}$$

откуда после введения разложённой формы выражения $(t - 1)^k$, в конце концов получается следующая теорема:

Теорема 3. *Число* $T(m, n)$ *разветвлений* $A(m, n)$ *полудлины* m *и с* n *неприводимыми дивизорами* D *определённой формы, полудлины* m_0 *даётся формулой:*

$$T(m, n) = \sum_{g=0}^{s-n} (-1)^{s-g-n} T(m_0 g + h) C_{2(m_0 g+h)+s-g}^{s-g} C_{s-g}^{n}, \tag{11}$$

где h *наименьший неотрицательный вычет деления* m *на* m_0, $h = m \pmod{m_0}$; s *целая часть от* m/m_0, $s = [m/m_0]$; $0 \leqslant n \leqslant s$; C *– символ сочетаний.*

5. *Частный случай* $m_0 = 1$. Это случай висячих дуг, которые являются дивизорами формы 10 разветвления [2, 4]. В этом случае формула (11) эквивалентна формуле, данной *Риорданом* [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Берж, К. — *Теория графов и её применения.* Перевод с французского, Москва, 1962.
2. Dani, E. — *Generarea arborescențelor.* Studia Univ. Babeș-Bolyai, Oeconomica, 1, 1977.
3. Дани, Э. — *Число деревьев данной длины.* Mathematica, Tome 18 (41), 2, 1976.
4. Dani, E. — *Operații cu arborescențe.* „Probleme actuale de informatică și conducere", Cluj-Napoca, 1977.
5. Knuth, D.E. — *The art of computer programming.* I, *Fundamental algorithms*, Перевод с английского на румынский. *Tratat de programarea calculatoarelor, Algoritmi fundamentali*, București, 1974.
6. Riordan J. — *Enumeration of plane trees by branches and endpoinss.* J. Combin. Theory 1975, A 19.2 (R. Hl. Mat.)
7. Tomescu, I. — *Introducere în combinatorică.* „Seria Bazele matematice ale cercetării operaționale", București, 1972.

Поступила 5. IX. 1977

Facultatea de științe economice
Universitatea „Babeș Bolyai" Cluj-Napoca
R.S. România