$$C = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 8 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) Two assignment problems, corresponding to the 3 first and 2 last lines of $C$ are obtained : the liaison constraints are $x_{1j} + x_{5j} \leqslant 1$ and $x_{2j} + x_{4j} \leqslant 1$, $j = 1, 2, 3$. b) $x^*_{13} = x^*_{22} = x^*_{31} = 1$ and $z^*_1 = 7$ : $x^*_{42} = x^*_{53} = 1$ and $z^*_1 = 5$. c) The constraint $x_{22} + x_{12} \leqslant 1$ is violated. $\hat{c}_1 = 3$, $\hat{c}_2 = 2$; $\lambda_{242} = 2.5$, hence 2.5 is added to $c_{22}$ and to $c_{21}$. e) $x^*_{13} = x^*_{22} = x^*_{31} = 1$, $z^*_1 = 9.5$ ; $x^*_{43} = x^*_{52} = 1$, $z^*_2 = 7$. d) The optimal solution is $x^*_{13} = x^*_{22} = x^*_{31} = x^*_{43} = x^*_{52} = 1$, the other $x^*_{ij} = 0$. $z_{opt} = 9.5 + 7 - 2.5 = 14$.

5. The algorithm of section 3 has been programmed in FORTRAN IV and tested on a CDC 6 500 computer. A series of test problems have been solved with 50 jobs and 50 constraints, integer $c_{ij}$'s randomly chosen with equal probability in the range [1, 50] and a density for $B$ (i.e. a ratio of 1's to number of off-diagonal positions in $B$) between 0.0 and 0.6. Computation times range from 1.2 to 66.6 seconds and rise when the density of $B$ is larger than 0.4. Several series of similar problems, with a density of 0.7 and increasing numbers of jobs and machines have also been solved with variants of the algorithm, i.e. different initial values for the $\lambda_{mnj}$ and a few more or a few less iterations in computing their last values. The overall computing time appears to be rather insensitive to these changes, and is around 6 seconds for problems with 30 jobs and 30 machines.

REFERENCES


1. Antoine, M-P. — *Modèles mathématiques et algorithmes pour les problèmes d'horaires d'examens*, Mémoire de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université Libre de Bruxelles (1975).
2. Berge, C. — *Graphes et hypergraphes*, Paris : Dunod (1970).
3. Brown, R. — *Chromatic Scheduling and the Chromatic Number Problem*. Management Science, 18 (1972) 456—463.
4. Cook, S.A. — *The Complexity of Theorem Proving Procedures*, Proc. 3-rd. Annual ACM Symposium on Theory of Computing (1971) 151—158.
5. Geoffrion, A. — *Lagrangian Relaxation for Integer Programming*, Mathematical Programming Study. 2 (1974) 82—114.
6. Held, M., Wolfe P. and Crowder H. P. — *Validation of Subgradient Optimization*, Mathematical Programming, 6 (1974) 62—88.
7. Karp, R. — *Reducibility among Combinatorial Problems*, in R.E. Miller and J.W. Thatcher (eds) *Complexity of Computer Computations*, New York : Plenum Press (1972) 85—103.
8. Karp, R. — *On the Computational Complexity of Combinatorial Problems*, Networks, 5 (1975) 45—68.
9. Kuhn, H. — *The Hungarian Method for the Assignment Problem*, Naval Research Logistics Quarterly, 2 (1955) 83—97.
10. Kuhn, H. — *Variants of the Hungarian Method for Assignment Problems*, Naval Research Logistics Quarterly, 3 (1956) 253—258.
11. Matula, D. W., Marble, G., and Isaacson, J. D. — *Graph Coloring Algorithms*, in R.C. Read (ed) *Graph Theory and Computing*, New York : Academic Press (1972) 109—122.


*Received 15. VI. 1977*

*Faculté Universitaire Catholique de Mons and University of Brussels, Belgium*

*Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi*
*Tomul XXIV, S. I a, f. 1, 1978*

# SUR L'INTERSECTION DES LANGAGES ALGEBRIQUES

PAR

VLADIMIR V. TOPENTCHAROV, ROUMEN L. LOZANOV

Nous nous proposons dans cette note de démontrer qu' étant donné les langages $L_1$ et $L_2$ des formes sentencielles de deux grammaires algébriques $G_1$ et $G_2$ non ambiguës, il existe deux grammaires algébriques non ambigues $G'_1$ et $G'_2$ et deux morphismes $F'_1$ et $F'_2$ tels que, si $L_1 \cap L_2$ est aussi un langage de formes sentencielles algébrique et non ambigu alors $L(G'_1) = L(F'_1G'_1) = L_1$ et $L(G'_2) = L(F'_2G'_2) = L_2$ et $F'_1G'_1 \cup F'_2G'_2$ soit non ambigue.

La terminologie et les notions pour les catégories sont celles de [2] et pour les langages formels — de [3].

1. Soit $C$ la catégorie dont les objets $C_0$ sont les grammaires algébriques et les flèches — les morphismes préservant strictement la longueur des mots (morphismes „lettre en lettre"); on démontre ([3]) que $C$ est à produits, produits fibrés et sommes. Une grammaire algébrique (ou context-free) est donc un quadruplet $G = <O, X, P, S>$, où $O$ est l'alphabet total, $X$-l'alphabet terminal, $P$-un sous-ensemble fini de $(O - X) \times O^*$, $O^*$ étant le monoïde libre des mots sur $O$ et $S \subset O - X$ est l'ensemble des symboles initiaux.

Le résultat suivant, qui est le point de départ du théorème que nous nous proposons de démontrer, nous a été communiqué sans démonstration par M. Nivat (Univ. Paris VII, Paris).

**Proposition.** *Soit $G_1$ et $G_2$ deux grammaires algébriques non ambigues engendrant les langages $L_1 = L(G_1)$ et $L_2 = L(G_2)$. S'il y a deux morphismes $F_1$ et $F_2$ préservant les alphabets terminaux et tels que $F_1G_1 \cup F_2G_2$ soit une grammaire non ambigue, alors $L_1 \cap L_2$ est un langage algébrique.*

*Démonstration.* Soit $G_1$ et $G_2$ deux objets quelconques de $C$. La construction du produit $\bar{G} = G_1 \times G_2$ est connue [3] : $\bar{O} = O_1 \times O_2$, $\bar{X} = X_1 \times X_2$, $\bar{S} = S_1 \times S_2$, $\bar{P} = \{(w, v) : ((p_1(w), p_1(v)), (p_2(w), p_2(v))) \in P_1 \times P_2\} \subset (\bar{O} - \bar{X}) \times \bar{O}^*$, où $p_1$ et $p_2$ sont les projections canoniques de $\bar{O}^*$. Considérons deux morphismes $f_i : G_i \to G_3$, $i = 1, 2$ et soit $((p_1, p_2), (f_1, f_2))$ le produit fibré correspondant $G_0$, où

$$O_0 = (a_1, a_2)\ \bar{O}\ ;\ f_1(a_1) = f_2(a_2)\ ;$$

$$X_0 = \bar{X} \cap O_0\ ;$$

$$S_0 = \bar{S} \cap O_0\ ;$$

$$P_0 = \bar{P} \cap (O_0^* \times O_0^*)\ ;$$

$$\begin{tikzcd} & G_0 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ G_1 \arrow[dr, "f_1"'] & & G_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & G_3 & \end{tikzcd}$$

l'existence d'une inclusion naturelle $j : G_0 \to G$ est évidente. Considérons maintenant les deux morphismes $F_1'$ et $F_2'$ tels que $F_1'(x) = x = F_2'(x)$ pour tout $x \in X_1 \cup X_2$ et où $G_1 \times G_2$ est exactement le produit fibré, i.e.

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \times G_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
G_1 \arrow[dr, "F_2'"'] & & G_2 \arrow[dl, "F_2'"] \\
 & F_1'G_1 \cup F_2'G_2 &
\end{tikzcd}$$

$L = L(F_1'p_1(G_1 \times G_2)) = L(F_2'p_2(G_1 \times G_2))$ est manifestement le plus grand sous-langage de l'intersection $L_1 \cap L_2$, engendré par les parties isomorphes de $G_1$ et $G_2$. Pour tout mot terminal $w \in (L_1 \cap L_2) - L$ on a au moins deux dérivations différentes dans $F_1'G_1$ et dans $F_2'G_2$ respectivement. La non ambiguité de $F_1G_1 \cup F_2G_2$ exclut l'existence de tels mots, donc $(L_1 \cap L_2) - L = \varnothing$ ou $L = L_1 \cap L_2$.

2. Nous ne connaissons pas la démonstration de l'affirmation inverse à la proposition donnée ci-dessus. Mais sous certains restrictions on a :

**Théorème.** *Soit $L_1'$ et $L_2'$ deux langages algébriques non ambigus des formes sentencielles de deux grammaires algébriques non ambiguës $G_1$ et $G_2$, telles que $L_1' \cap L_2'$ soit un langage de formes sentencielles algébrique et non ambigu. Il existe $G_1'$ et $G_2'$, $F_1'$ et $F_2'$ tels que $L(G_1') = L_1'$, $L(G_2') = L_2'$ et $F_1'G_1' \cup F_2'G_2'$ soit non ambigue.*

*Démonstration.* Construisons les grammaires $G_i'$ $(i = 1, 2)$ de manière que

$X_i' = O_i$ ;

$O_i' = O_i \cup b_i(O_i - X_i)$, $O_i \cap b_i(O_i - X_i) = \varnothing$ et $b_i$ sont des bijections ;

$P_i' = \{(b_i(u), w) ; (u, w) \in P_i\} \cup \{(b_i(u), u) ; u \in O_i - X_i\}$ ;

$S_i' = b_i(S_i)$.

La non ambiguité de $G_1$ et $G_2$ implique, vu la construction, celle de $G_1'$ $G_2'$ ; alors le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
 & G_1' \times G_2' \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
G_1' \arrow[dr, dash] & & G_2' \arrow[dl, dash] \\
 & F_1'G_1' \cup F_1'G_2' &
\end{tikzcd}$$

existe avec $F_1'(b_1(u)) = F_2'(b_2(u'))$ si et seulement si $u = u'$ ; l'identification des symboles supplémentaires inclus pour la construction de $G_i'$ implique la non ambiguité de $F_1'G_1' \cup F_2'G_2'$.



Ce résultat remonte au fait que la classe des langages de formes sentencielles n'est pas close pour l'intersection. Cependant l'affirmation analogue à celle du Théorème et concernant un couple quelconque de langages algébriques reste à démontrer, puisque un langage algébrique non ambigu n'est pas nécessairement un langage de formes sentencielles ; même des langages finis qui ne le sont pas [1] existent.

## BIBLIOGRAPHIE


1. Ehrenfeucht, A., Rosenberg, G. — *Trade-off between the use of nonterminals, coding and homomorphisms in defining languages for some classes of rewriting systems*, 2-nd Col. on Automata, Languages and Programming, Univ. of Saarbrücken, 1974.
2. Mac Lane, S. — *Categories for the working Mathematician*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
3. Schnorr, C.P. — *Transformational classes of grammars*, Information and Control, Vol. 14, Nr. 3 (1969).


*Reçu le 10. IX. 1977*

*Centre de Mathématiques Appliquées*
*1 000 Sofia, P.O. Box 384*
*R.P.Bulgaria*