Proof. Let $h = [h_0 . \bar{h}] = h_0 . \bar{h}$ be a point of ${}^{H}\tau^r X$, where $h_0 = (y_0 . S_0)$ and $\bar{h} = (\bar{y} . a . \bar{S})$. We suppose that $\bar{h}_0 = (\bar{y}_0 . \bar{S}_0) \in T^r_m H$, hence $\bar{y}_0 = j^r_0 \, \mathrm{id}_{R^m}$ and $j^r_0 \bar{\sigma}_0 = \bar{S}_0 . \bar{\sigma}_0 : R^m \to H$. Then $h * \bar{h}_0 = h$ hence $h * \bar{h}_0 = (h . \bar{h}) * \bar{h}_0 = h_0 . \bar{h} . a^{-1} . \bar{h}_0 . a = (y_0 . \bar{y} . S_0 . (a . \bar{S} . a^{-1} . \bar{S}_0 . a . \bar{y}^{-1} . y_0^{-1})) = (y_0 . \bar{y} . S_0 . (a . \bar{S} . \bar{y}^{-1} . y_0^{-1}))$.

It follows that :

$$((a . \bar{S} . a^{-1}) . \bar{S}_0 . (a . \bar{S}^{-1} . a^{-1})) . \bar{y}^{-1} . y_0^{-1} \in T^r_m H, \text{ hence}$$

$$(a . \bar{S} . a^{-1}) . \bar{S}_0 . (a . \bar{S} . a^{-1})^{-1} \in T^r_m H.$$

Since $\bar{S}_0 \in T^r_m H$ is arbitrary, it results that $a . \bar{S} . a^{-1} \in T^r_{m,e} N$; hence $a . \bar{S} \in T^r_{m,e} N . a$. We obtain :

$$\bar{h} = (\bar{y} . a . \bar{S}) \in L^r_m \overline{\times} T^r_{m,e} N . a,$$

$$\bar{h} = a . h^{-1} = a . (\bar{y} . \bar{S}) \in (L^r_m \overline{\times} T^r_{m,e} N) . a;$$

hence

$$h^{-1} \in \{a^{-1} . {}^0N^r_m . \diagdown a \in G\} = \{(a^{-1} . S_0^{-1} . a) \diagdown a \in G, \ S_0^{-1} \in L^r_m \overline{\times} T^r_{m,e} N\}.$$

On the other side :

$$\bar{h} = h_0 . \bar{h} = (y_0 . \bar{y}, S_0 . (S_0^{-1} . a . \bar{y}^{-1} . y_0^{-1})) =$$

$$= (j^r_0 \varphi \circ \bar{\varphi}, j^r_0 \sigma_0 . (\bar{\sigma}_0^1 . a . \bar{\varphi}^{-1} . \varphi_0^{-1})).$$

Then the mapping :

$$(u, H . g) \in R^m \times H \diagdown G \xrightarrow{\psi} (\sigma_0 \circ \varphi_0 \circ \bar{\varphi})(u) . \sigma_0^{-1}(u) . g \in X$$

is an equivariant diffeomorphism.

Let us consider a neighbourhood U of $0 \in R^m$ and a neighbourhood coordinate V around $H . g \in H \diagdown G$ (denoting dim $H \diagdown G$ by p, V may be identified to an open set W of R^p with $0 \in W$). It follows that $\varphi : U \times V \subset R^m \times R^p \to X$ is a diffeomorphism. Taking the r-jets, we deduce that h is a r-frame on X. In the rest, the proof is similar to that of a previous paper [5].

REFERENCES

1. Bredon, G.E. — *Introduction to Compact Transformation Groups*, Acad, Press, New-York — London, 1972.
2. Kolar, I. — *Canonical forms on the prolongations of principal fibre bundles*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 16 (1971) 1 091—1 106.
3. Lieberman, P. — *Analyse globale*, Sem. Math. Sup. 1969.
4. Neagu, A. — *Prolongations of G-spaces* (to appear).
5. Neagu, A. — *A geometrical interpretation for the holonomic prolongations of a principal fibre bundle* (to appears).

Received 26.VIII. 1977

Departament of Mathematics
Polytechnic Institute of Iaşi R.S. România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXIV, S. I a, f. 1, 1978

GROUPES DE TRANSFORMATIONS DANS LA THÉORIE DES QUASIGROUPES

PAR

ILIE BURDUJAN

On sait qu'un quasigroupe $(Q ; . , \diagdown, \diagup)$ s'appelle quasigroupe topologique si Q est un espace topologique et ses applications „.", „$\diagup$" et „$\diagdown$" sont des applications continues. Puisque l'application $s : Q \times Q \to Q \times Q$ définie par $s(x, y) = (y, x)$ est un homéomorphisme, il résulte immédiatement que les parastrophiques d'un quasigroupe topologique sont aussi des quasigroupes topologiques. Ce fait nous assure que toutes les translations à gauche et à droite associées à chacune des opérations binaires définissant la structure du quasigroupe sont des homéomorphismes. Si $A \subset Q$ est ouvert et $B \subset Q$ quelconque, AB, BA, $A \diagup B$, $B \diagup A$, $A \diagdown B$ et $B \diagdown A$ sont des ouverts de Q comme réunion d'ensembles ouverts. Il résulte immédiatement que les applications qui définissent la structure du quasigroupe sont des applications ouvertes. On peut prouver :

Lemme 1. *Pour tout quasigroupe topologique les applications* $(x, y) \xrightarrow{\alpha} (xy, y)$, $(x, y) \xrightarrow{\beta} (x \diagup y, y)$, $(x, y) \xrightarrow{\gamma} (x, xy)$ et $(x,y) \xrightarrow{\delta} (x, x \diagdown y)$ de $Q \times Q$ *dans lui-même sont des homéomorphismes.*

Démonstration. L'assertion du lemme résulte immédiatement compte tenu du fait que ces applications sont continues et satisfont aux conditions : $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = \gamma \circ \delta = \delta \circ \gamma = \mathrm{id}_{Q \times Q}$.

En utilisant la lemme 1 nous pouvons prouver :

Proposition 1. *Soit Q un quasigroupe topologique qui est T_1-espace. Si $A \subset Q$ est fermé (resp. compact) et $K \subset Q$ est compact, alors KA est fermé (resp. compact) de Q.*

Démonstration. Considérons $K \times Q \xrightarrow{pr_2} Q$. K étant compact, d'après la conséquence 5 du théorème 1 de [5], p. 159, pr_2 est propre. Comme chaque application propre est fermée (voir prop. 1 de [5]. p. 152) et γ est un homeomorphisme, il résulte que $pr_2 \circ \gamma$ est fermée. Donc $KA = (pr_2 \circ \gamma)(K \times A)$ est fermé.

Remarquons le fait que cette propriété reste vraie aussi quand les quasigroupes topologiques ne sont pas des T_1-espaces, si nous changeons la compacité avec la quasicompacité.

En utilisant ce résultat et la conséquence 2 du théorème 1 de [5], p. 158 nous obtenons :

Conséquence 1. *Si Q est un quasigroupe topologique compacte alors les opérations qui définissent la structure de quasigroupe sont fermées et ouvertes.*

Comme les parastrophiques d'un quasigroupe topologique sont aussi des quasigroupes topologiques, nous avons :

Conséquence 2. *Dans les conditions de la proposition 1 il résulte que les ensambles AK, K/A, A/K, $K\backslash A$ et $A\backslash K$ sont aussi fermés (resp. compacts).*

Rappelons que R. A r e n s définit dans [1], p. 486 les espaces hémicompacts comme les espaces topologiques Q qui sont des réunions dénombrables d'ensembles compacts $\{K_n\}_{n\in N}$ tels que pour tout sous-ensemble compact K de Q il existe un nombre fini d'éléments $\{K_{n_i}\}_{i=1}^{s}$ qui recouvre l'ensemble K. Prouvons maintenant :

Proposition 2. *Tout quasigroupe topologique localement compact et connexe est hémicompact.*

Démonstration. On sait que tout quasigroupe topologique connexe Q est engendré par chacun des sous-ensembles ouverts $U \subset Q$ (d'après le théorème 9 de [8], p. 13). On construit la suite d'ensembles ouverts $\{U_n\}_{n\in N}$ en posant $U_1 = U$ et $U_{n+1} = (U_n \,.\, U_n) \cup (U_n/U_n) \cup (U_n\backslash U_n)$. Ainsi nous obtenons un recouvrement dénombrable ouvert de Q. Comme Q est localement compact, nous pouvons choisir l'ensemble U tel que $\bar{U}$ soit compact. En utilisant $\bar{U}$ nous pourrons construire comme plus haut la suite $\{\bar{U}_n\}_{n\in N}$. Il résulte que $\bigcup_{n\in N} \bar{U}_n = Q$. Si $K \subset Q$ est un sous-ensemble compact, alors il va être recouvert d'un nombre fini d'éléments de la suite $\{\bar{U}_n\}_{n\in N}$.

Conséquence 1. *Tout quasigroupe localement compact est paracompact.*

Démonstration : Les composantes connexes du quasigroupe sont des réunions dénombrables d'ensembles compacts, puisque n'importe quelle d'entre elles peut être organisée comme boucle topologique, en employant une isotopie convenablement choisie (voir [3], p. 15). Ceci signifie que chaque composante connexe est un espace de Lindelöf (d'après exerc. A de [6], p. 141). Mais la composante connexe qui contient l'unité de la boucle est sous-boucle topologique. Donc elle va être aussi fermée et ouverte. Alors l'assertion de la conséquence est évidente vu le fait que tout espace de Lindelöf est paracompact.

Corollaire. *Tout quasigroupe topologique localement compact est normal.*

Lemme 2. *Soient Q un quasigroupe topologique, K un sous-ensemble compact de Q, W un ouvert de Q et $x_0 \in Q$ tel que $x_0K \subset W$ (resp. $K x_0 \subset W$). Il existe un voisinage V (resp. V') de x_0 tel que $VK \subset W$ (resp. $KV' \subset W$).*

Démonstration. Puisque $x_0K \subset W$, quelque soit $k \in K$ nous avons $x_0k = w \in W$. Il existe alors les voisinages $U_k \ni k$ et $V_k \ni x_0$ tels que $V_kU_k \subset W$. Comme K est compact il résulte que seulement un nombre fini de voisinage $U_{k_1}, \ldots, U_{k_n}$ recouvre K. Considérons $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{k_i}$. Alors

$VK = (\bigcap_{i=1}^{n} V_{k_i}) \,.\, K \subset (\bigcap_{i=1}^{n} V_{k_i}) \,.\, (\bigcup_{j=1}^{n} U_{k_j}) \subset W$. D'une manière analogue on prouve l'existence du voisinage V'.

Corollaire. *Dans les conditions du lemme 2 les ensembles $\{x \in Q/ /xK \subset W\}$ et $\{x \in Q | Kx \subset W\}$ sont ouverts.*

Lemme 3. *Soient Q un quasigroupe topologique, K un fermé de Q et W un ouvert de Q tel que son complémentaire W^c est compact. Alors les ensembles $I_1 = \{x | x \in Q,\ xK \subset W\}$ et $I_2 = \{x | x \in Q,\ Kx \subset W\}$ sont des ouverts de Q.*

Démonstration. Soit J_1 l'ensemble complémentaire de I_1 dans Q. Nous prouverons que $J_1 = W^c/K$. En effet, si $x \notin I_1$ alors $xK \not\subset W$, c'est à dire $x \in W^c/K$. Donc $J_1 \subset W^c/K$. Maintenant, soit $x \in W^c/K$. Alors $x = w/k$, ou $w \in W^c$ et $k \in K$. Evidemment, $xk = w \in W^c$ (donc $xK \not\subset W$), c'est à dire $W^c/K \subset J_1$. L'assertion du lemme résultera immédiatement de la conséquence 2 de la proposition 1. D'une manière analogue on prouve que l'ensemble I_2 est ouvert.

Faisons maintenant la convention de notation suivante utile dans ce qui suite. L'expresion ${}^{(\varepsilon_n)}a_n \ldots {}^{(\varepsilon_1)}a_1 \,.\, b$ ou $a_i, b \in Q$ $(1 \leq i \leq n)$, $\varepsilon_i = \pm 1$ est définie inductivement de la manière suivante :

$$a_1 \,.\, b = \begin{cases} a_1 b & si\ \ \varepsilon_1 = 1, \\ a_1\backslash b & si\ \ \varepsilon_1 = -1, \end{cases} \qquad \text{et}$$

$${}^{(\varepsilon_n)}a_n \ldots {}^{(\varepsilon_1)}a_1 \,.\, b = \begin{cases} a_n \,.\, ({}^{(\varepsilon_{n-1})}a_{n-1} \ldots {}^{(\varepsilon_1)}a_1 \,.\, b) & si\ \ \varepsilon_n = +1, \\ a_n\backslash({}^{(\varepsilon_{n-1})}a_{n-1} \ldots {}^{(\varepsilon_1)}a_1 \,.\, b) & si\ \ \varepsilon_n = -1. \end{cases}$$

Autrement dit : ${}^{(\varepsilon_n)}a_n \ldots {}^{(\varepsilon_1)}a_1 \,.\, b = (L_{a_n}^{(\varepsilon_n)} \circ \ldots \circ L_{a_1}^{\varepsilon_1})(b)$.

Maintenant les lemmes 2 et 3 peuvent-être généralisés de la manière suivante :

Lemme 2'. *Soient Q un quasigroupe topologique, K un sous-ensemble compact de Q, W un ouvert de Q et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de Q tels que ${}^{(\varepsilon_1)}a_1 \ldots {}^{(\varepsilon_n)}a_n \,.\, K \subset W$. Alors il existe des voisinages $V_1, \ldots, V_n$ des éléments $a_1, \ldots, a_n$ respectivement tels que ${}^{(\varepsilon_1)}V_1 \ldots {}^{(\varepsilon_n)}V_n \,.\, K \subset W$.*

Lemme 3'. *Soient Q un quasigroupe topologique, K un sous-ensemble fermé de Q, W un autre sous-ensemble ouvert de Q tel que son complémentaire W^c soit compact et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de Q pour lesquels ${}^{(\varepsilon_1)}a_1 \ldots {}^{(\varepsilon_n)}a_n \,.\, K \subset W$. Alors il existe des voisinages $V_1, \ldots, V_n$ des éléments $a_1, \ldots, a_n$ respectivement tels que ${}^{(\varepsilon_1)}V_1 \ldots {}^{(\varepsilon_n)}V_n \,.\, K \subset W$.*

Les démonstrations de ces deux lemmes peuvent-être réalisées d'une manière analogue à celle utilisé pour les lemmes 2 et 3.

Soit $H(Q)$ le groupe de tous les homéomorphismes de Q. Notons avec $H_{c\,.\,o}(Q)$ et respectivement avec $H_g(Q)$ le groupe $H(Q)$ muni de la $c\,.\,o.$ -topologie et respectivement de la g-topologie. Ici la $c.\ o$-topologie signifie la topologie *compacte-ouverte* (pour la définition de la $c\,.\,o$ - topologie et de la g-topologie voir [1], p. 481 et [2], p. 595. Notons : $T(U, V) = \{f/f \in H(Q)\,;\ f(U) \subset V\}$.

Proposition 3. *Soit Q un quasigroupe topologique qui est T_1 - espace et $x_0 \in Q$, un élément fixé, Alors l'application J_{x_0} de $H_{c\cdot o}(Q)$ dans Q qui transforme f en $J_{x_0}(f) = f(x_0)$ est continue.*

Démonstration. Soit $U \subset Q$ un voisinage ouvert de $f(x_0)$. Alors $T(\{x_0\}, U)$ est un voisinage de f qui coïncide avec $J_{x_0}^{-1}(U)$.

Corollaire. *L'application $J_{x_0} : H_g(Q) \to Q$, définie par $J'_{x_0}(f) = f(x_0)$ est continue.*

Pour tout quasigroupe on peut définir les applications $C_L, C_R : Q \to H(Q)$ par $x \to C_L(x) = L_x$ et respectivement $x \to C_R(x) = R_x$.

Proposition 4. *Les applications $C_L, C_R : Q \to H_g(Q)$ sont continues.*

Démonstration. Soit $a \in Q$ et $\left[\bigcap_{i=1}^{n} T(K_i, W_i)\right] \cap \left[\bigcap_{j=1}^{n} T(K'_j, W'_j)\right]$ un voisinage de L_a. Ici K_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des ensembles compacts, K'_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, sont fermés, W_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont des ensembles ouverts et W'_j, $1 \leqslant j \leqslant m$ — ont des complémentaires compacts. Nous avons donc $aK_i \subset W_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $aK'_j \subset W'_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Conformément aux lemmes 2 et 3, il existe des ensembles ouverts V_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ et V'_j, $1 \leqslant j \leqslant m$ tels que $V_i K_i \subset W_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $V'_j K'_j \subset W'_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Mais alors $V = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} V'_j\right)$ satisfait aux conditions $VK_i \subset W_i$ quel que soit i, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $VK'_j \subset W'_j$ quelque soit j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Donc $C_L(V)(K_i) \subset W_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $C_L(V)(K'_j) \subset W'_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, c'est à dire $C_L(V) \subset \left[\bigcap_{i=1}^{n} T(K_i, W_i)\right] \cap \left[\bigcap_{j=1}^{m} T(K'_j, W'_j)\right]$.

D'une manière analogue on prouve que l'application C_R est continue.

Corollaire. *Les applications $C_L, C_R : Q \to H_{c\cdot o}(Q)$ sont continues.*

Proposition 5. *Les applications $C_L : Q \to C_L(Q) \subset H_g(Q)$ et $C_R : Q \to C_R(Q) \subset H_g(Q)$ sont des homéomorphismes.*

Démonstration. Vu le fait que C_L et C_R sont des injections continues, il est suffisant de démontrer qu'elles sont ouvertes. Soit $U \subset Q$ — un ensemble ouvert. Alors $C_L(U) = T(\{x_0\}, Ux_0) \cap C_L(Q)$, c'est à dire $C_L(U)$ est ouvert dans $C_L(Q)$ muni de la topologie induite par $H_g(Q)$.

Corollaire. *Les applications $C_L : Q \to C_L(Q) \subset H_{c.o}(Q)$ et $C_R : Q \to C_R(Q) \subset H_{c\cdot o}(Q)$ sont des homéomorphismes.*

Proposition 6. *Les ensembles $C_L(Q)$, $C_R(Q) \subset (H_g(Q)$ (resp. $H_{c\cdot o}(Q))$ sont des retractes de $H_g(Q)$ (resp. de $H_{c\cdot o}(Q)$). De plus, les applications C_L, $C_R : Q \to H_g(Q)$ (or $H_{c\cdot o}(Q)$ sont propres.*

Démonstration. On vérifie immédiatement que $C_L \circ R_{x_0}^{-1} \circ J'_{x_0} : H_g(Q) \to C_L(Q)$ (et resp. $C_R \circ L_{x_0}^{-1} \circ J'_{x_0}$) est une retracte de $H_g(Q)$. Mais alors $C_L(Q)$ (resp $C_R(Q)$) sont fermés puisqu'elles sont des retractes de $H_g(Q)$ (conformément à l'affirmation 1. 3 de [4], p. 10). Donc C_L et C_R sont des homéomorphismes de Q avec les images $C_L(Q)$ et respectivement $C_R(Q)$. Conformément à la proposition 2 de [5]. p. 152, C_L et C_R elles sont des applications propres.

D'après la proposition 5 et son corollaire il résulte que les topologies induites par $H_g(Q)$ et $H_{c\cdot o}(Q)$ sur $C_L(Q)$ et $C_R(Q)$ sont équivalentes. La même chose peut être dit en ce qui concerne les ensembles $C_{L^{-1}}(Q)$ et

$C_{R^{-1}}(Q)$, où $C_{L^{-1}}$ et $C_{R^{-1}}$ sont des applications de Q dans $H(Q)$ définies par : $x \to C_{L^{-1}}(x) = L_x^{-1}$ et respectivement $x \to C_{R^{-1}}(x) = R_x^{-1}$.

Soit $[C_{L^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times C_{L^{\varepsilon_n}}] : Q^n \to H(Q)$, ou $\varepsilon_i = \pm$, $1 \leqslant i \leqslant n$, les applications définies par : $[C_{L^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times C_{L^{\varepsilon_n}}](x_1, \ldots, x_n) = L_{x_1}^{\varepsilon_1} \circ \ldots \circ L_{x_n}^{\varepsilon_n}$. Nous noterons : $A_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]} = [C_{L^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times C_{L^{\varepsilon_n}}](Q^n)$. Évidemment $L_Q = \bigcup_{n \in N} \bigcup_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]} A_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]}$.

D'une manière analogue on peut introduire les applications $[C_{R^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times C_{R^{\varepsilon_n}}]$ et les ensembles $B_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]} = [C_{R^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times C_{R^{\varepsilon_n}}](Q^n)$ dont la réunion est R_Q.

En utilisant les lemmes 2′ et 3′ on peut démontrer :

Proposition 7. *Dans tout quasigroupe topologique les applications $[C_{L^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times C_{L^{\varepsilon_n}}] : Q^n \to H_g(Q)$ ($\varepsilon_i = \pm 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $n \in N$) sont continues.*

Corollaire. *Pour tout quasigroupe topologique les applications $[C_{L^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times C_{L^{\varepsilon_n}}] : Q^n \to H_{c\cdot o}(Q)$ sont continues.*

Les résultat obtenus ci dessus nous permettent de démontrer qu'une partie des propriétés topologiques de Q se transmettent au groupe L_Q. Une famille de tels résultats est déjà connue. Par exemple, R. Arens prouve dans [1], p. 481 que si Q est T_k-espace, $k \leqslant 3^1/_2$ alors $H_{c\cdot o}(Q)$ est aussi T_k-espace. Dans [6], p. 412 et p. 183 on montre : si Q est T_1-espace et satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité, alors $H_{c\cdot o}(Q)$ est héréditaire séparable, héréditaire Lindelöf et metrisable. Évidemment, si Q est T_1-espace, alors $H_g(Q)$ est T_2-espace.

Prouvons maintenant :

Proposition 8. *Soit Q une boucle topologique. L_Q muni de la $c\cdot o$.-topologie (resp. de la g-topologie) est connexe (resp. connexe par arcs, localement connexe). si et seulement si Q est connexe (resp. connexe par arcs, localement connexe).*

Démonstration. Ces propriétés sont gardées par le produit cartésien fini et par des transformations continues. La proposition 7 nous assure que les $A_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]}$, ou $\varepsilon_i = \pm 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $n \in N$ sont connexes (resp. connexes par arcs, localement connexes). Mais alors L_Q muni de la topologie de limite inductive par rapport aux ensembles $A_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} \subset H_{c\cdot o}(Q)$ aura aussi ces propriétés conformément á la proposition B. 4. 1 du [10], p. 450. Comme la $c\cdot o$-topologie est moins fine que la topologie de limite inductive il résulte que L_Q muni de la $c\cdot o$-topologie est aussi connexe (resp. connexe par arcs, localement connexe). L'affirmation inverse résulte immédiatement, vu que $C_L(Q)$ est une retracte de $H_{c\cdot o}(Q)$. D'une manière, analogue on fait la démonstration si L_Q est muni de la g-topologie.

Proposition 9. *Soit Q un quasigroupe topologique ; L_Q muni de la g-topologie (resp. de la c.o.-topologie) est séparable si et seulement si Q est séparable.*

Démonstration. La séparabilité étant gardée par le produit cartésien fini et les applications continues surjectives, le résultat s'obtient comme une conséquence du fait que la famille des ensembles $A_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]}$ est dénombrable.

2. Dans ce qui suit, Q désigne un quasigroupe topologique localement compact. Alors $H_g(Q)$ est un groupe topologique dont l'action sur Q est

continue, effective et transitive. Nous pourrons dire les mêmes choses à propos du groupe L_Q muni de la g-topologie.

Proposition 10. *Pour tout quasigroupe topologique localement compact, les applications* $[C_{L^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times C_{L^{\varepsilon_n}}] : Q^n \to A_{[\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n]} \subset H_g(Q)$ *sont continues et ouvertes.*

Démonstration. La continuité a été établie dans la proposition 7. Le fait qu'elle est ouverte, résulte à l'aide de l'égalité $[C_{L^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times C_{L^{\varepsilon_n}}] = \mathcal{C} \circ (C_{L^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times C_{L^{\varepsilon_n}})$, ou $\mathcal{C}_1$ désigne l'application $(f_1, \ldots, f_n) \to \mathcal{C}(f_1, \ldots, f_n) = f_1 \circ \ldots \circ f_n$ (puisque la composition dans $H_g(Q)$ est ouverte il résulte immédiatement que l'application $\mathcal{C}$ est ouverte).

Les applications $[C_{L^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times C_{L^{\varepsilon_n}}]$ étant continues et ouvertes, la majorité des propriétés de Q se transmetront aux ensembles $A_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]}$. En effet, on constate facilement que sont transmises les propriétés : connexité, connexité locale, connexité par l'arcs, séparation, premier axiome de dénombrabilité, deuxième axiome de dénombrabilité, hémicompacité, dénombrabilité à l'infini, etc. .

Si Q est un quasigroupe topologique localement compact, alors L_Q muni de la $c.o$-topologie n'est pas un groupe topologique de transformations de Q. En échange, l'opération de composition est une application continue, conformément à la proposition 9 du [6], p. 47, §3, nr. 4 et l'action de L_Q muni de la $c.o.$-topologie sur Q est de même continue, conformément au corollaire 1 du théorème 3 de [5], p. 46. La loi de composition étant continue, elle sera aussi ouverte. Nous avons alors :

Proposition 11. *Pour tout quasigroupe topologique, localement compact les applications* $[C_{L^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times C_{L^{\varepsilon_n}}] : Q^n \to A_{[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n]} \subset H_{c.o}(Q)$ *sont continues et cuvertes.*

Établissons maintenant :

Théorème 1. *Soit Q un quasigroupe topologique localement compact. Alors $H_{c.o}(Q)$ et $H_g(Q)$ induisent des topologies équivalentes sur $A_{[\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n]}$, $n \in N$.*

Démonstration. La proposition 6 nous assure que $A_{[\varepsilon]} = C_{L^\varepsilon}(Q) \subset H_{c.o}(Q)$ est homéomorphe à $A_{[\varepsilon]} \subset H_g(Q)$, c'est à dire les topologies induites de $H_{c.o}(Q)$ et $H_g(Q)$ sur A sont équivalentes. Supposons que sur $A_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]}$ la $c.o.$-topologie et la g-topologie sont équivalentes. On sait que $A_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}]} = A_{[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n]} \circ C_{L^{\varepsilon_{n+1}}}(Q)$. Soit $U \subset A_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1}]}$ un ensemble ouvert dans la g-topologie et $f = L_{a_1}^{\varepsilon_1} \circ \ldots \circ L_{a_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}} \in U$. Il existera alors deux voisinages ouverts dans la g-topologie, V et W, de $L_{a_1}^{\varepsilon_1} \circ \ldots \circ L_{a_n}$ et respectivement de $L_{a_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}}$ qui par l'application de composition sont amenés dans U. Conformément à l'hypothèse inductive, il existera des ouverts dans la $c.o.$-topologie $V' \subset V$ et $W' \subset W$ qui contiennent respectivement les deux éléments. Comme la composition dans la $c.o.$-topologie est une application ouverte il résulte que $V' \circ W' \subset V \circ W \subset U$ est un ensemble ouvert dans la $c.o.$-topologie, Il résulte que chaque élément $f \in U$ a un

voisinage dans la $c.o.$-topologie contenue dans U. Donc U contient un ensemble ouvert dans la $c.o.$-topologie.

Considérons maintenant une boucle topologique localement compacte Q. On sait que $L_Q = \bigcup_{n \in N} \bigcup_{[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n]} A_{[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n]}$. Nous montrerons qu'il existe une suite ascendante formée avec quelques-uns des ensembles $A_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]}$ de manière que L_Q soit la réunion de cette suite. En effet, la suite

$$A_{[1,-1]} \subset A_{[1,-1,1,-1]} \subset \ldots \subset A_{[1,-1,\ldots,1,-1]} \subset \ldots \tag{1}$$

satisfait à la condition demandée. En composant éventuellement avec $L_e^{-1} = L_e = \mathrm{id}_Q$ on constate inductivement que quel que soit l'ensemble $A_{[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]}$ il peut être considéré comme sous-ensemble d'un ensemble de forme $A_{[1,-1,\ldots,1,-1]}$. Nous pouvons doter le groupe L_Q avec la topologie de limite inductive stricte par rapport aux ensembles qui forment la suite (1) munis de la g-topologie. Cette topologie sera appelée *l. i.s.g.-topologie* de L_Q. Notons par L_Q^* le groupe L_Q muni de cette topologie. Les ensembles $A_{[1,-1,\ldots,1,-1]}$ étant sous-espaces localement compacts de $H_g(Q)$ d'après le théorème B. 4. 2 de [10], p. 451, il résulte que L_Q^* est espace de Hausdorff. De plus, d'après le même théorème, quel que soit $K \subset L_Q^*$ un ensemble compacte, il existera un élément de la suite (1) qui le contiendra. Q étant hémicompact, les ensembles $A_{[1,-1,\ldots,1,-1]}$ seront hémicompacts et par suite L_Q^* sera hémicompact. Faisons la notation : $A_{2k} = A_{[\underbrace{1,-1,\ldots,1,-1}_{2K\ fois}]}$. Conformément au théorème B. 4.2 de [10], p. 451, la topologie induite de L_Q^* sur chaque élément de la suite (1) coïncide avec la topologie initiale. Alors, comme $A_{2r} \circ A_{2s} \subset A_{2(r+s)}$, il résulte que la composition est continue comme application de $A_{2r} \times A_{2s} \to L_Q$. De même, l'inversion $I : A_{2k} \to A_{2k} \subset L_Q$ est une application continue. Mais parce que $L_Q^* \times L_Q^* = \varinjlim (A_{2k} \times A_{2k})$ (limite inductive stricte), il résultera d'après la proposition 6 de [5], p. 38 que l'application de composition et l'application d'inversion sont continues. Ceci signifie que L_Q^* est groupe topologique. Comme L_Q muni de la g-topologie agit d'une manière continue sur Q, il résulte que la restriction de cette action sur $A_{2k} \times Q$ est aussi continue. Mais $L_Q^* \times Q = \varinjlim (A_{2k} \times Q)$(limite inductive stricte) puisque $Q = \varinjlim Q$ (limite inductive stricte) et Q est localement compact (voir la proposition B. 4. 2 de [10], p. 451). Il résulte que L_Q^* agit continument sur Q. Ainsi nous avons prouvé :

Théorème 2. *Soit Q une boucle topologique localement compacte. Alors le groupe L_Q muni de la l.i.s.g.-topologie est un groupe topologique hémicompact dont l'action sur Q est continue, effective et transitive.*

Corollaire 1. *Si Q est une boucle localement compacte, alors L_Q^* est un espace topologique normal.*

Corollaire 2. *Soit Q une boucle localement compacte. Si L_Q^* satisfait au premier axiome de dénombrabilité, alors L_Q^* est un espace topologique localement compact.*

Corollaire 3. *Soit Q une boucle topologique localement compacte. Le groupe L_Q muni de l'une de topologies : c.o.-topologie, g-topologie ou bien l.i.s.g.-topologie, est localement compact si et seulement si il est un espace de Baire.*

Démontrons maintenant :

Proposition 12. *Soit Q une boucle topologique dont l'espace sousjacent est une variété connexe. Le groupe L_Q^* est localement compact si et seulement si* dim $L_Q < +\infty$ *ou bien, la suite des dimensions des ensembles $A_{[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$ est bornée.*

Démonstration. Supposons que L_Q^* est localement compact. D'après le corollaire 3 du théorème 9 de [9], p. 69, il résulte qu'il est un groupe de Lie, donc dim L_Q est finie. Mais alors la suite de dimensions des ensembles $A_{[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n]}$ est bornée. Réciproquement, supposons que dim L_Q est finie. Ceci signifie que la suite des dimensions des ensembles $A_{[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n]}$ est bornée Alors, chaque sous-ensemble compact, metrisable de L_Q^* est de dimension finie. Conformément au corollaire 7. 3 de [7], p. 645, L_Q^* est un groupe de Lie, donc L_Q^* est un groupe topologique localement compacte.

BIBLIOGRAPHIE

1. Arens R. — *A topology for spaces of transformations.* Ann. of Math. v. 47, nr. 3, 1946 p. 480—495.
2. Arens R. — *Topologies for homeomorphism groups.* Amer. J. of Math. v. LXVIII, 1964 p. 593—610.
3. Belousov V.D. — *Les bases de la théorie des quasigroupes et des loops* (en russe.) Ed. Nauka, Moscova, 1967.
4. Borsuk K. — *Theory of retracts.* (en russe), Ed. Mir, Moscova, 1971.
5. Bourbaki N.—*Topologie générale.* Livre III, ch. 1, 2 (en russe) et 10. Ed. Nauka, Moscova, 1968, resp. Hermann. Paris, 1967.
6. Engelking R. — *Outline of general topology.* North-Holland Publ. Company — Amsterdam, 1968.
7. Gleason A., Palas R. — *On a class of transformation groups.* Amer. J. of Math., t. 79 (1957), p. 631—648.
8. Malțev A.I. — *Sur la théorie générale des sysètmes algebrique* (en russe). Mat. Sb. n. Ser. 36 (77), p. 569—576, 1954.
9. Mostert P.S. — *Sections in principal fibre spaces.* Duke Math. J. t. 23, 1966, p. 57—72.
10. Ricabarra R.A., Larotonda A.R. — *Notas de topologia algebraica.* Univ., Buenos Aires, 1969.

Recue 11.X.1977

Chaire de Mathematiques
Institut Polytechnique Iași
R.S. România

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" Iași
Tomul XXIV, S. I a, f. 1, 1978

CHERN FORMS AND H-PROJECTIVE CURVATURE OF COMPLEX MANIFOLDS

BY

A. NEAGU and V. OPROIU

1. Introduction. It is well known that the Chern classes of a complex vector bundle E are real cohomology classes (in fact they are integer cohomology classes).

Using the real representation of a complex vector bundle we get some real closed differential forms such that their de Rham cohomology classes generate the Chern ring of the given complex vector bundle E. These forms are obtained using the complex structure operator F on E and the curvature forms of a real connection ∇ on E such that $\nabla F = 0$. We call these forms the Chern forms of ∇.

Now, let M be a complex manifold and let E be the tangent bundle of M. Let ∇ be a real torsion free connection on M such that $\nabla F = 0$. Our main result is a formula relating the Chern forms of ∇ to the H-projective curvature tensor field of ∇. Then, if on M there exists a H-projectively flat connection, the Chern forms of this connection are powers of the first Chern form. Particularly, if M is a Kaehler manifold of constant holomorphic curvature, the Chern classes of M are powers of the first Chern class. Thus, this is an extension to Kaehler manifolds, of Chern's result [3] concerning the vanishing of the Pontrjagin classes of a Riemannian manifold of constant curvature.

2. The Chern forms of a complex vector bundle. Let $\pi : E \to M$ be a differentiable complex vector bundle over the (real or complex) manifold M. Denote by m the complex dimension and by $n = 2m$ the real dimension of the fibre of E. The multiplication by the complex unity i on E (as a complex vector bundle) induces an operator F on E (as a real vector bundle) such that $F^2 = -I$ where I is the identity operator. Let $E^c = E \otimes C$ be the complexification of E. Then E can be identified with the vector subbundle of E^c consisting of all vectors of type (1, 0). Namely, $E \subset E^c$ is the vector subbundle of all vectors of the form $u - \mathrm{i}.\, Fu$, where $u \in E$ (real).

Let ∇ be a real linear connection on E, preserving the complex structure of E, i.e. $\nabla F = 0$. Then ∇ can be extended usually to a connection ∇^c on E^c and the property $\nabla F = 0$ of ∇ implies that the covariant derivatives of the sections in $E \subset E^c$ are also sections in E. Let $(u_1, u_2, \ldots, u_m, Fu_1, Fu_2, \ldots, Fu_m)$ be a local frame of E over $U \subset M$. From now on we shall denote $Fu_\alpha = u_{\alpha^*}$; $\alpha = 1, 2, \ldots, m$. Then :