Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f 1

QUELQUES CATÉGORIES CARTÉSIENNES REMARQUABLES

PAR

ALEXANDRU GH. RADU

§ 1. Catégories cartésiennes. Propriétés générales.

1.01. Définition. *Une catégorie* $\mathbf{C}$ *est dite cartésienne si elle admet des limites projectives et inductives finies (donc possède un objet initial* 0 *et un objet final* 1) *et si, pour tout couple* (A, B) *d'objets de* $\mathbf{C}$, *le foncteur canoniquement défini*

$$\mathbf{C}(- \times A, B) : \mathbf{C}^{o} \to \mathbf{Ens}$$

est représentable.

Autrement dit, pour tout couple (A, B) d'objets de $\mathbf{C}$, il existe un objet B^A et un morphisme $e_{A,B} : B^A \times A \to B$ de $\mathbf{C}$ tel que le morphisme fonctoriel

$$\varphi^{e_{A,B}} : h_{B^A} \to \mathbf{C}(- \times A, B),$$

qui correspond à $e_{A,B}$ par le lemme de Yoneda soit un isomorphisme fonctoriel.

Rappellons que $\varphi^{e_{A,B}}$ est le morphisme fonctoriel dont la composante d'indice X,

$$\varphi^{e_{A,B}}_{X} : \mathbf{C}(X, B^A) \to \mathbf{C}(X \times A, B), \quad X \in |\mathbf{C}|,$$

est définie par :

$$\varphi^{e_{A,B}}_{X}(f) = e_{A,B}(f \times 1_X), \quad \forall f \in \mathbf{C}(X, B^A).$$

Le fait que $\varphi^{e_{A,B}}$ est un isomorphisme fonctoriel signifie donc que pour tout $X \in |\mathbf{C}|$ et tout morphisme $f : X \times A \to B$ de $\mathbf{C}$ il existe un morphisme $f_1 : X \to B^A$, unique, tel que $f = e_{A,B}(f_1 \times 1_A)$; de plus il est tel que pour tout morphisme $u : X \to Y$ de $\mathbf{C}$ le diagramme suivant canoniquement construit soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(Y, B^A) \arrow[r, "\varphi^{e_{A,B}}_{Y}", "\sim"'] \arrow[d, "\mathbf{C}(u, 1_{B^A})"'] & \mathbf{C}(Y \times A, B) \arrow[d, "\mathbf{C}(u \times 1_A, 1_B)"] \\
(X, B^A) \arrow[r, "\varphi^{e_{A,B}}_{X}", "\sim"'] & \mathbf{C}(X \times A, B)
\end{tikzcd}$$

1.02. Proposition. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie cartésienne. Pour tout* $A \in |\mathbf{C}|$, *le foncteur produit direct par* A,

$$(\ \ ) \times A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

admet un adjoint à droite, appelé le foncteur exponentiation par A.

$$(\ \ )^A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

Démonstration. Montrons d'abord que l'association

$$B \to B^A$$

définit un foncteur

$$(\ \ )^A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}.$$

Si $f : B \to C$ est un morphisme de $\mathbf{C}$, définissons $f^A : B^A \to C^A$ comme l'unique morphisme correspondant à $f \,.\, e_{A,B}$ par l'isomorphisme

$$\varphi^{e_{A,C}}_{B^A} : \mathbf{C}(B^A, C^A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}(B^A \times A, C),$$

c'est-à-dire, l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme suivant :

$$*) \qquad \begin{tikzcd} C^A \times A \arrow[r, "e_{A,C}"] & C \\ B^A \times A \arrow[u, "f^A \times 1_A"] \arrow[r, "e_{A,B}"] & B \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Grâce à l'unicité, on a $(1_B)^A = 1_{B^A}$ et si $g : C \to D$ est un autre morphisme on a $(gf)^A = g^A \,.\, f^A$ ce qui montre que $(\ \ )^A$ est bien un foncteur de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

De la commutativité du diagramme*) il résulte que $e_{A,B}$, $B \in |\mathbf{C}|$, sont les composantes d'un morphisme fonctoriel :

$$e_A : (\ \ ) \times A \,.\, (\ \ )^A \to 1_{\mathbf{C}} \,.$$

De l'isomorphisme fonctoriel

$$\varphi^{e_{A,B}} : h_{B^A} \to \mathbf{C}(- \times A, B)$$

il résulte en particulier qu'il existe un morphisme $e^*_{A,B} : B \to (B \times A)^A$, unique, tel que $\varphi^{e_{A,B}}_{B^{B \times A}}(e^*_{A,B}) = 1_{B \times A}$, c'est-à-dire tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} (B \times A)^A \times A \arrow[r, "e_{A,B \times A}"] & B \times A \\ B \times A \arrow[u, "e^*_{A,B} \times 1_A"] \arrow[r] & \arrow[u, "1_{B \times A}"'] \end{tikzcd}$$

Montrons que e^*_A, $B \in |\mathbf{C}|$, sont les composantes d'un morphisme fonctoriel

$$e^*_A : 1_{\mathbf{C}} \to (\ \ )^A \,.\, (\ \ ) \times A,$$

c'est-à-dire que pour tout $f \in \mathbf{C}(B, C)$ on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "e^*_{A,B}"] \arrow[d, "f"'] & (B \times A)^A \arrow[d, "(f \times 1_A)^A"] \\ C \arrow[r, "e^*_{A,C}"] & (C \times A)^A \end{tikzcd}$$

Comme $\varphi^{e_{A,C \times A}}_{B}$ est une application bijective, il suffit de montrer que

$$\varphi^{e_{A,C \times A}}_{B}(e^*_{A,C} \,.\, f) = \varphi^{e_{A,C \times A}}_{B}((f \times 1_A)^A \,.\, e^*_{A,B}).$$

Mai les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd} & C \times A \arrow[dl, "e^*_{A,C} \times 1_A"'] \arrow[dr, equal] & \\ (C \times A)^A \times A \arrow[rr, "e_{A,C \times A}"] & & C \times A \\ (B \times A)^A \times A \arrow[u, "(f \times 1_A)^A \times 1_A"] \arrow[rr, "e_{A,B \times A}"] & & B \times A \arrow[u, "f \times 1_A"'] \\ & B \times A \arrow[ul, "e^*_{A,B} \times 1_A"] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}((B \times A)^A, (C \times A)^A) \arrow[r, "\varphi^{e_{A,C \times A}}_{B \times A}", "\sim"'] \arrow[d, "\mathbf{C}(e^*_{A,B}, (1_{C \times A})^A)"'] & \mathbf{C}((B \times A)^A A, C \times A) \arrow[d, "\mathbf{C}(e^*_{A,B} \times 1_A, 1_{C \times A})"] \\ \mathbf{C}(B, (C \times A)^A) \arrow[r, "\varphi^{e_{A,C \times A}}_{B}", "\sim"'] & \mathbf{C}(B \times A, C \times A) \end{tikzcd}$$

d'où il résulte que

$$\varphi^{e_{A,C \times A}}_{B}(e^*_{A,C} f) = e_{A,C \times A}(e^*_{A,C} f) \times 1_A = e_{A,C \times A}(e^*_{A,C} \times 1_A)(f \times 1_A) = f \times 1_A$$

et

$$\varphi^{e_{A,C \times A}}_{B}((f \times 1_A)^A e^*_{A,B}) = e_{A,C \times A}(f \times 1_A)^A \times 1_A \,.\, e^*_{A,B} \times 1_A = f \times 1_A.$$

Pour finir, il reste à montrer que :

$$(B \times A) \xrightarrow{e^*_{A,B} \times 1_A} (B \times A)^A \times A \xrightarrow{e_{A,B \times A}} B \times A = 1_{B \times A}$$

et

$$B^A \xrightarrow{e^*_{A,B^A}} (B^A \times A)^A \xrightarrow{(e_{A,B})^B} B^A = 1_{B^A}.$$

La première égalité résulte de la définition même de $e^*_{A,B}$; quant à la deuxième, il suffit, car $\varphi^{e_{A,B}}_{B^A}$ est une application bijective, de montrer que

$$\varphi^{e_{A,B}}_{B^A}((e_{A,B})^A \cdot e^*_{A,B^A}) = e_{A,B} \; (= \varphi^{e_{A,B}}_{B^A}(1_{B^A})),$$

ce qui résulte immédiatement du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[r, "e_{A,B}"] & B \\
(B^A \times A) \times A \arrow[u, "(e_{A,B})^A \times 1_A"] \arrow[r, "e_{A,B^A \times A}"] & B^A \times A \arrow[u, "e_{A,B}"'] \arrow[d, equal] \\
B^A \times A \arrow[u, "e_{A,B} \times 1_A"] \arrow[r] & B^A \times A
\end{tikzcd}$$

1.03. Proposition. *Soit une catégorie cartésienne* $\mathbf{C}$. *Pour tout* $B \in |\mathbf{C}|$, *l'association*

$$A \rightsquigarrow B^A$$

définit un foncteur contravariant

$$B^- : \mathbf{C}^0 \to \mathbf{C},$$

qui admet un adjoint à droite, à savoir lui-même.

Démonstration. Montrons d'abord que l'association $A \rightsquigarrow B^A$ est vraiment fonctorielle.

Si $g \in \mathbf{C}(A', A)$, définissons $B^g : B^A \to B^{A'}$ comme l'unique morphisme qui correspond à $e_{A,B}(1_{B^A} \times g)$ par l'isomorphisme

$$\varphi^{e_{A',B}}_{B^A} : \mathbf{C}(B^A, B^{A'}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}(B^A \times A', B)$$

c'est-à-dire l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
B^{A'} \times A' \arrow[r, "e_{A',B}"] & B \\
B^A \times A' \arrow[u, "B^g \times 1_{A'}"] \arrow[r, "1_{B^A \times g}"] & B^A \times A \arrow[u, "e_{A,B}"']
\end{tikzcd}$$

De l'unicité il résulte que $B^{1_A} = 1_{B^A}$ et si $f : A \to A''$ est un autre morphisme de $\mathbf{C}$, alors $B^{fg} = B^g B^f$, ce qui montre que B^- est bien un foncteur.

De la suite d'isomorphismes fonctoriels

$$\mathbf{C}^0(B^A, C) \approx \mathbf{C}(C, B^A) \approx \mathbf{C}(C \times A, B) \approx \mathbf{C}(A \times C, B) \approx \mathbf{C}(A, B^C)$$

il résulte que B^- est un adjoint à droite de lui-même.

1.04. Corollaire. *Soit une catégorie cartésienne* $\mathbf{C}$. *L'association*

$$(A, B) \rightsquigarrow B^A$$

définit un bifoncteur

$$(\ )^- : \mathbf{C}^0 \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}.$$

Démonstration. Il faut montrer que pour tout $f \in \mathbf{C}(B, C)$ et $g \in \mathbf{C}(A', A)$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
B^A \arrow[r, "f^A"] \arrow[d, "B^g"'] & C^A \arrow[d, "C^g"] \\
B^{A'} \arrow[r, "f^{A'}"] & C^{A'}
\end{tikzcd}$$

Comme $\varphi^{e_{A',C}}_{B^A}$ est une application bijective, il suffit de montrer que

$$\varphi^{e_{A',C}}_{B^A}(C^g f^A) = \varphi^{e_{A',C}}_{B^A}(f^{A'} \cdot B^g).$$

Du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(B^A, C^A) \arrow[r, "\varphi^{e_{A,C}}_{B^A}", "\sim"'] \arrow[d, "\mathbf{C}(1_{B^A}, C^g)"'] & \mathbf{C}(B^A \times A, C) \arrow[d, "\mathbf{C}(1_{B^A} \times g, 1_C)"] \\
\mathbf{C}(B^A, C^{A'}) \arrow[r, "\varphi^{e_{A',C}}_{B^A}", "\sim"'] & \mathbf{C}(B^A \times A', C) \\
\mathbf{C}(B^A, B^{A'}) \arrow[u, "\mathbf{C}(1_{B^A}, f^{A'})"] \arrow[r, "\varphi^{e_{A',B}}_{B^A}", "\sim"'] & \mathbf{C}(B^A \times A', B) \arrow[u, "\mathbf{C}(1_{B^A} \times 1_{A'}, f)"']
\end{tikzcd}$$

il résulte que

$$\varphi^{e_{A',C}}_{B^A}(C^g f^A) = e_{A,C}(f^A \times 1_A)(1_{B^A} \times g)$$

et

$$\varphi^{e_{A',C}}_{B^A}(f^{A'} B^g) = f\, e_{A',B}(B^g \times 1_{A'}) = f\, e_{A,B}(1_{B^A} \times g) =$$

$$= e_{A,C}(f^A \times 1_A)(1_{B^A} \times g).$$

Dans les remarques suivantes, $\mathbf{C}$ sera une catégorie cartésienne.

1.05. *Remarques.* a) Du fait que pour tout $A \in |\mathbf{C}|$, le foncteur $(\ ) \times A$ est un adjoint à gauche du foncteur $(\ )^A$, les isomorphismes suivants sont évidents :

1°. $$0 \times A \approx 0, \quad \forall A \in |\mathbf{C}|.$$

En effet, l'objet initial 0 est la limite inductive du foncteur vide. D'ailleurs cet isomorphisme résulte directement de l'isomorphisme d'adjonction

$$\varphi_0^{\varepsilon A, X} : \mathbf{C}(0 \times A, X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}(0, X^A), \quad \forall X \in |\mathbf{C}|.$$

2°. $(A + B) \times C \approx (A \times C) + (B \times C)$, $\forall A, B, C \in |\mathbf{C}|$. En particulier, si $2 = 1 + 1$, on a $2 \times A \approx A + A$ car évidemment $1 \times A \approx A$.

3°. $$1^A \approx 1, \quad \forall A \in |\mathbf{C}|$$

4°. $$(A \times B)^C \approx A^C \times B^C, \quad \forall A, B, C \in |\mathbf{C}|.$$

b) Du fait que pour tout $A \in |\mathbf{C}|$, le foncteur contravariant A^- est un adjoint à gauche du foncteur A^-, il résulte que A^- transforme les limites inductives en limites projectives et par suite on a les isomorphismes suivants :

5°. $$A^0 \approx 1, \quad \forall A \in |\mathbf{C}|,$$

6°. $$A^{B+C} \approx A^B \times A^C, \quad \forall A, B, C \in |\mathbf{C}|,$$

c) En général, $0^A \not\approx 0$ car par exemple, de 5° il résulte que $0^0 \approx 1$.

d) Pour tout $A \in |\mathbf{C}|$, on a

7°. $$A^1 \approx A.$$

En effet, pour tout $X \in |\mathbf{C}|$, on a

$$\mathbf{C}(X, A^1) \approx \mathbf{C}(X \times 1, A) \approx (X, A).$$

e) Quels que soient les objets A, B, C de $\mathbf{C}$, on a

8°. $$A^{B \times C} \approx (A^B)^C.$$

En effet, pour tout $X \in |\mathbf{C}|$, on a :

$$\mathbf{C}(X, (A^B)^C) \approx \mathbf{C}(X \times C, A^B) \approx \mathbf{C}((X \times C) \times B, A) \approx \mathbf{C}(X \times$$
$$\times (C \times B), A) \approx \mathbf{C}(X \times (B \times C), A) \approx \mathbf{C}(X, A^{B \times C}).$$

f) L'objet initial 0 est un objet initial strict, c'est-à-dire tout morphisme $f : A \to 0$ de $\mathbf{C}$ est un isomorphisme.

En effet, si $\alpha_A : 0 \to A$ est l'unique morphisme on a $f\alpha_A = 1_0$ et de l'isomorphisme 1° il résulte un morphisme $\theta : A \to 0$, unique, tel que $1_A = \alpha_A \theta$ et $f = 1_0\, \theta\ (= \theta)$.

g) Une catégorie cartésienne $\mathbf{C}$ est dégénérée (son squelette ne contient qu'un seul objet et un seul morphisme) ssi $\mathbf{C}\ (1, 0) \neq \varnothing$.

En effet, pour tout $A \in |\mathbf{C}|$, $\mathbf{C}(A, 0) \neq \varnothing$ car $A \to 1 \to 0$ appartient à $\mathbf{C}(A, 0)$ et l'on tient compte que 0 est un objet initial strict.

h) Des isomorphismes naturels

$$\mathbf{C}(1, B^A) \approx \mathbf{C}(1 \times A, B) \approx \mathbf{C}(A, B), \quad \forall A, B \in |\mathbf{C}|,$$

il résulte que pour tout morphisme $f : A \to B$ il existe un morphisme $\hat{f} : 1 \to B^A$, unique, tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \times A \arrow[r, "\hat{f} \times 1_A"] \arrow[d, "p_2"'] & B^A \times A \arrow[d, "e_{A,B}"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Pour tout $a : 1 \to A$, $e_{A,B} < \hat{f}, a > = e_{A,B}(\hat{f} \times 1_A) . < 1, a > = f p_2 < 1, a > = f a$.

1.06. Définition. *Soit une catégorie* $\mathbf{C}$ *et soit* $I : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ *une sous-catégorie de* $\mathbf{C}$.

a) *On dit que* $\mathbf{C}'$ *est une sous-catégorie strictement pleine de* $\mathbf{C}$ *si* $\mathbf{C}'$ *est une sous-catégorie pleine de* $\mathbf{C}$ *et si elle contient un objet* X *de* $\mathbf{C}$, *elle contient aussi tout autre objet de* $\mathbf{C}$ *isomorphe à* $I(X)$.

b) *On dit que* $\mathbf{C}'$ *est une sous-catégorie réflective de* $\mathbf{C}$, *si le foncteur d'inclusion* I *admet un adjoint à gauche* $R : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$, *appelé le foncteur réflecteur.*

107. Proposition. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie cartésienne et soit* $I : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ *une sous-catégorie réflective strictement pleine de* $\mathbf{C}$. *Le foncteur réflecteur* R *commute avec les produits directs finis ssi* $I(B)^A \in |\mathbf{C}'|$, *pour tout* $B \in |\mathbf{C}'|$ *et tout* $A \in |\mathbf{C}|$.

Démonstration. Si $\Psi : 1_{\mathbf{C}} \to IR$ et $\Phi : RI \to 1_{\mathbf{C}'}$ sont les morphismes d'adjonction, alors Φ est un isomorphisme fonctoriel car pour tout X', $Y' \in |\mathbf{C}'|$, on a les isomorphismes bifonctoriels suivants :

$$\mathbf{C}'(X', X') \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}(I(X'), I(Y')) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}'(RI(X'), Y').$$

Montrons d'abord que si $X' \in |\mathbf{C}|$, alors $X' \in |\mathbf{C}'|$, ssi pour tout $Y \in |\mathbf{C}|$, l'application suivante est bijective

$$\theta : \mathbf{C}(IRY, X') \to \mathbf{C}(Y, X'), \quad (f \rightsquigarrow f\Psi_Y).$$

Si $X' \in |\mathbf{C}'|$ alors l'application θ n'est rien d'autre que la bijection définie par Ψ_Y.

Réciproquement, si θ est une bijection pour tout $Y \in |\mathbf{C}|$, alors pour $Y = X'$, il existe un morphisme $f : IRX' \to X'$, unique, tel que $1_{X'} = f\Psi_{X'}$, d'où $\Psi_{X'} = (\Psi_{X'} f)\Psi_{X'}$ et par suite, grâce à l'isomorphisme d'adjonction, on a $\Psi_{X'} f = 1_{IRX'}$, c'est-à-dire $X' \approx IRX'$ et donc $X' \in |\mathbf{C}'|$.

Supposons maintenant que $R(X \times Y) \approx R(X) \times R(Y)$ et soient $B \in |\mathbf{C}'|$ et $A \in |\mathbf{C}|$. Pour prouver que $I(B)^A \in |\mathbf{C}'|$ il faut montrer que pour tout $C \in |\mathbf{C}|$, l'application suivante est une bijection

$$\mathbf{C}(IRC, I(B)^A) \to \mathbf{C}(C, I(B)^A), \ (f \rightsquigarrow f\Psi_C).$$

Mais cette application est la composée des applications bijectives suivantes :

$$\mathbf{C}(IRC,\ I(B)^A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}(IRC \times A,\ IB) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}(IR(IRC \times A),\ I(B)) \approx$$
$$\approx \mathbf{C}(IRC \times IRA,\ IB) \approx \mathbf{C}(IR(C \times A),\ IB) \approx \mathbf{C}(C \times A,\ I(B)) \approx$$
$$\approx \mathbf{C}(C,\ I(B)^A).$$

Réciproquement, supposons que $I(B)^A \in |\mathbf{C}'|$ pour tout $B \in |\mathbf{C}'|$ et $A \in |\mathbf{C}|$ et montrons que pour tout $X, Y \in |\mathbf{C}|$ le morphisme canonique suivant est un isomorphisme :

$$R(X \times Y) \to R(X) \times R(Y);$$

autrement dit, que pour tout $B \in |\mathbf{C}'|$ on a l'isomorphisme canonique suivant :

$$\mathbf{C}'(R(X) \times R(Y),\ B) \to \mathbf{C}(R(X \times Y),\ B).$$

Mais ce morphisme coïncide avec le composé des isomorphismes suivants :

$$\mathbf{C}'(R(X) \times R(Y),\ B) \xrightarrow{\sim} C(IRX \times IRY),\ IB) \approx C(IRX,\ I(B)^{IRY}) \approx$$
$$\approx \mathbf{C}(X,\ I(B)^{IRY}) \approx \mathbf{C}(X \times IRY,\ IB) \approx \mathbf{C}(IRY,\ I(B)^X) \approx \mathbf{C}(Y,\ I(B)^X) \approx$$
$$\approx \mathbf{C}(X \times Y,\ I(B)) \approx \mathbf{C}'(R(X \times Y),\ B).$$

§ 2. Catégorie cartésienne des objets au-dessus d'un objet.

2.01. Soient $\mathbf{C}$ une catégorie quelconque, $B \in |\mathbf{C}|$, $\mathbf{C}/_B$ la catégorie des objets de $\mathbf{C}$ au-dessus de B et

$$\sum_B : \mathbf{C}/B \to \mathbf{C}, \quad ((Y, f) \rightsquigarrow Y)$$

le foncteur source qui est évidement fidèle et conservatif (c.à.d. conserve et réflète les isomorphismes.

De plus, on peut montrer facilement que $\sum_B$ est un foncteur discret, c'est-à-dire pour tout objet (Y, f) de $\mathbf{C}/B$ il existe un isomorphisme canonique

$$\mathbf{C}/B)/(Y, f) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}/\textstyle\sum_B((Y, f)) = C/Y.$$

Pour tout morphisme $m : B_1 \to B_2$ de $\mathbf{C}$ il existe un foncteur canonique

$$\sum_m : \mathbf{C}/B_1 \to \mathbf{C}/B_2, \quad (Y, f) \rightsquigarrow (Y, mf)$$

qui rend commutatif le iagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}/B_1 \arrow[rr, "\sum_m"] \arrow[dr, "\sum_{B_1}"'] & & \mathbf{C}/B_2 \arrow[dl, "\sum_{B_2}"] \\ & \mathbf{C} & \end{tikzcd}$$

Il est évident que $(B, 1_B)$ est un objet final de $\mathbf{C}/B$ et si $\mathbf{C}$ admet un objet final 1 alors $\sum_1 : \mathbf{C}/1 \to \mathbf{C}$ este un isomorphisme de catégories

et pour tout $B \in |\mathbf{C}|$, nous identifierons $\sum_B$ avec $\sum \omega_B$, où $\omega_B : B \to 1$ est l'unique morphisme possible.

2.02. Si $\mathbf{C}$ est une catégorie aux produits directs (en particulier si $\mathbf{C}$ est une catégorie cartésienne) alors pour tout $B \in |\mathbf{C}|$, le foncteur $\sum_B$ admet un adjoint à droite

$$B^* : \mathbf{C} \to \mathbf{C}/B,$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "f"'] & A \times B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "f \times 1_B"] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r, rightsquigarrow] & C \times B \arrow[r, "p_2"'] & \end{tikzcd}$$

En effet, grâce à la propriété universelle du produit direct, pour tout $g : A \to C$, tout $c : C \to C'$ et tout $a : (A', f') \to (A, f)$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "f'"'] & A \arrow[r, "\langle g, f \rangle"] \arrow[d, "f"] & C \times B \arrow[r, "c \times 1_B"] \arrow[d, "p_2"] & C' \times B \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & & \end{tikzcd}$$

montre qu'il existe un isomorphisme

$$\mathbf{C}(\textstyle\sum_B(A, f),\ C) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}/B\,((A, f),\ B^*(C))$$

fonctoriel en (A, f) et C.

2.03. Proposition. *Soient $\mathbf{C}$ une catégorie, $B \in |\mathbf{C}|$ et $\sum_B : \mathbf{C}/B \to \mathbf{C}$ le foncteur source. Les affirmations suivantes sont vraies :*

1°. Si $\mathbf{C}$ possède des limites inductives. alors $\mathbf{C}/B$ en possède aussi et $\sum_B$ réflète et préserve les limites inductives.

2°. Si $\mathbf{C}$ possède des noyaux de double flèche. alors $\mathbf{C}/B$ en possède aussi et $\sum_B$ réflète et préserve les noyaux de double flèche.

3°. Si $\mathbf{C}$ possède des produits fibrés alors $\mathbf{C}/B$ possède des limites projectives finies et $\sum_B$ réflète et préserve les produits fibrés.

4°. $\sum_B$ réflète et préserve les monomorphismes.

Démonstration. 1°. Il faut montrer que $((X, f),\ 0_i) = \lim\limits_{i \in I} ((X_i, f_i))$ dans $\mathbf{C}/B$ ssi $(X,\ 0_i) = \lim\limits_{i \in I} X_i$ dans $\mathbf{C}$. Si $(X,\ 0_i) = \lim\limits_{i \in I} X_i$ alors $f : X \to B$ est l'unique morphisme tel que $f0_i = f_i$, $\forall i \in I$ et $((X, f),\ 0_i) = \lim\limits_{i \in I} ((X_i, f_i))$ car si pour tout $i \in I$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

alors il existe un morphisme unique $\theta : X \to Y$, tel que $g_i = \theta\theta_i$, $\forall i \in I$, $g\theta = f$, car pour tout $i \in I$, $g\theta\theta_i = gg_i = f_i = f\theta_i$. Nous avons donc montré que $\mathbf{C}/B$ possède des limites inductives et que $\sum_B$ réflète les limites inductives. Supposons maintenant que $((X, f), \theta_i) = \lim\limits_{i \in I} ((X_i, f_i))$ et montrons que $(X, \theta_i) = \lim\limits_{i \in I} X_i$.

Si $(L, u_i) = \lim\limits_{i \in I} X_i$ alors de la propriété universelle de la limite inductive, il résulte un morphisme $\rho : L \to X$, unique, tel que $\rho u_i = \theta_i$, $\forall i \in I$, et de même, un morphisme unique $\omega : L \to B$ tel que $\omega u_i = f_i$, $\forall i \in I$, et il est évident que $f\rho = \omega$ car $f\rho\, u_i = f\theta_i = f_i = \omega u_i$, $\forall i \in I$; il existe alors un morphisme unique $\lambda : X \to L$, tel que $\omega\lambda = f$ et $\lambda\theta_i = u_i$, $\forall i \in I$. De $\lambda\rho\, u_i = \lambda\theta_i = u_i$, $\forall i \in I$, et $\rho\lambda\theta_i = \rho u_i = \theta_i$, $\forall i \in I$, il résulte que $\lambda\rho = 1_L$ et $\rho\lambda = 1_X$ ce qui montre que λ est un isomorphisme et par suite $\sum_B$ commute avec les limites inductives.

2°. Si $u, v : (A_1, f_1) \to (A_2, f_2)$ sont deux morphismes de $\mathbf{C}/B$ et si $(K, k) = \ker(u, v)$ dans $\mathbf{C}$ alors $(K, f_1 k) = \ker(u, v)$ dans $\mathbf{C}/B$, donc $\mathbf{C}/B$ est à noyaux de double flèche et $\sum_B$ réflète les noyaux de double flèche; que $\sum_B$ commute avec les noyaux de double flèche il est facile à vérifier.

3°. Le produit direct de deux objets de $\mathbf{C}/B$ est donné par :

$$(A_1 \to B) \times (A_2 \to B) = (A_1 \underset{B}{\times} A_2 \to B);$$

le produit fibré de deux morphismes $(X, x) \xrightarrow{\alpha} (Z, z) \xleftarrow{\beta} (Y, y)$ de $\mathbf{C}/B$ s'obtient du produit fibré dans $\mathbf{C}$ des morphismes $X \xrightarrow{\alpha} Z \xleftarrow{\beta} Y$, et donc $\mathbf{C}/B$ possède des produits fibrés et $\sum_B$ réflète ces produits fibrés.

4°. Si $\sum_B(\theta)$ est un monomorphisme alors θ est un monomorphisme car $\sum_B$ est un foncteur fidèle et par suite $\sum_B$ réflète les momomorphismes; le fait que $\sum_B$ commute avec les monomorphismes résulte de 3°.

2.04. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie à produits fibrés. Tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathbf{C}$ induit un foncteur, appelé le foncteur changement de base,

$$f^* : \mathbf{C}/Y \to \mathbf{C}/X,$$

défini à l'aide du produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd} f^*(Y_1) \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "f^*(v)"] \arrow[dd, "f^*(v_1)"'] & & Y_1 \arrow[dr, "v"] \arrow[dd, "v_1"] & \\ & f^*(Y_2) \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dd, "f^*(v_2)"] & & Y_2 \arrow[dd, "v_2"] \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y & \end{tikzcd}$$

Si $\mathbf{C}$ possède en plus un objet finale 1 (donc $\mathbf{C}$ admet des limites projectives finies) et si $\omega_X : X \to 1$ est l'unique morphisme possible alors le produit fibré

$$\begin{tikzcd} Z \times X \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & Z \arrow[d, "\omega_Z"] \\ X \arrow[r, "\omega_X"'] & 1 \end{tikzcd}$$

nous indique que $\omega_X^* = X^*$.

2.05. Proposition. *Si $\mathbf{C}$ est une catégorie à produits fibrés (en particulier, si $\mathbf{C}$ est une catégorie cartésienne) alors pour tout $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, le foncteur f^* est un adjoint à droite du foncteur $\sum_f$.*

Démonstration. De la propriété universelle du produit fibré, il résulte que pour tout $(X_1, u_1) \in |\mathbf{C}/X|$ et $(Y_1, v_1) \in |\mathbf{C}/Y|$, l'application

$$\rho_{u_1, v_1} : \mathbf{C}/Y(\textstyle\sum_f(X_1, u_1), (Y_1, v_1)) \to \mathbf{C}/X((X_1, u_1), (f^*(Y_1), f^*(v_1)))$$

qui à tout $\theta \in \mathbf{C}/Y(\sum_f(X_1, u_1), (Y_1, v_1))$ fait correspondre l'unique morphisme $\rho_{u_1, v_1}(\theta)$ rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} f^*(Y_1) \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "\rho_{u_1,v_1}(\theta)"] \arrow[dd, "f^*(v_1)"'] & & Y_1 \arrow[dd, "v_1"] \\ & X_1 \arrow[ur, "\theta"'] \arrow[dl, "u_1"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

est une application bijective.

En effet, si $\rho_{u_1, v_1}(\theta) = \rho_{u_1, v_1}(\theta')$ alors $\theta = f_1 \rho_{u_1, v_1}(\theta) = f_1 \rho_{u_1, v_1}(\theta') = \theta'$ et par suite ρ_{u_1, v_1} est une application injective.

Pour tout $u \in \mathbf{C}/X((X_1, u_1), (f^*(Y_1), f^*(v_1))$ il est évident que $f_1 u \in \mathbf{C}/Y(\sum_f(X_1, u_1), (Y_1, v_1))$ et de plus $\rho_{u_1, v_1}(f_1 u) = u$ ce qui montre que ρ_{u_1, v_1} est aussi une application surjective et donc bijective.

Pour terminer, il reste à montrer que pour tout

$$u \in \mathbf{C}/X((X_2, u_2), (X_1, u_1)) \text{ et } v \in \mathbf{C}/Y((Y_1, v_1), Y_2, v_2))$$

le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}/Y(\sum_f(X_1, u_1), (Y_1, v_1)) \arrow[r, "\rho_{u_1, v_1}", "\sim"'] \arrow[d, "\mathbf{C}/Y(\sum_f(u), v)"'] & \mathbf{C}/X((X_1, u_1), (f^*(Y_1), f^*(v_1)) \arrow[d, "\mathbf{C}/X(u, f^*(v))"] \\ \mathbf{C}/Y(\sum_f(X_2, u_2), (Y_2, v_2)) \arrow[r, "\rho_{u_2, v_2}"] & \mathbf{C}/X((X_2, u_2), (f^*(Y_2), f^*(v_2)) \end{tikzcd}$$

Il faut montrer donc que pour tout $\theta \in \mathbf{C}/Y((X_1, fu_1), (Y_1, v_1))$ on a $\rho_{u_1,v_1}(v\,\theta\,u) = f^*(v)\,\rho_{u_1,v_1}(\theta)u$ et pour cela, que $f_2 f^*(v)\rho_{u_1,v_1}(\theta)u = v\,\theta\,u$, ce qui est évident car $f_2 f^*(v)\rho_{u_1,v_1}(\theta)u = vf_1\,\rho_{u_1,v_1}(\theta)u = v\theta u$.

2.06. Proposition. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie à limites projectives et inductives finies.* $\mathbf{C}$ *est une catégorie cartésienne ssi pour tout* $B \in |\mathbf{C}|$, *le foncteur* B^* *admet un adjoint à droite* π_B.

Démonstration. La suffisance résulte immediatement car si π_B est un adjoint à droite de B^* alors $\pi_B B^*$ est un adjoint à droite de $\sum_B B^* = (\ ) \times B$ et il est suffisant de prendre $(\ )^B = \pi_B B^*$.

Réciproquement, supposons que $\mathbf{C}$ est une catégorie cartésienne et soit $(A, f) \in |\mathbf{C}/B|$; si ${}^{\ulcorner}p_B^{\urcorner} : 1 \to B^B$ est le morphisme qui correspond à $p_B : 1 \times B \xrightarrow{\sim} B$ par l'adjonction cartésienne, définissons $\pi_B(A, f)$ comme étant donné par le produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd}
\pi_B(A,f) \arrow[r] \arrow[d] & A^B \arrow[d, "f^B"] \\
1 \arrow[r, "{}^{\ulcorner}p_B^{\urcorner}"] & B
\end{tikzcd}$$

où, ce qui est la même chose, par le diagramme exact suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_B(A,f) \arrow[r] & A^B \arrow[r, "f^B"] \arrow[r, bend right, "{}^{\ulcorner}p_B^{\urcorner}"'] & B^B \\
& 1 \arrow[u, "\omega_{A^B}"] &
\end{tikzcd}$$

Puisque pour tout $C \in |\mathbf{C}|$, le foncteur h^C commute aux limites projectives, le diagramme suivant de Ens est un produit fibré

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(C, {}_B(A,f)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}(C, A^B) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathbf{C}(C, f^B)"] & \mathbf{C}(C \times B, A) \arrow[d, "\mathbf{C}(C \times B, f)"] \\
\mathbf{C}(C, 1) \arrow[r, "\mathbf{C}(C, {}^{\ulcorner}p_B^{\urcorner})"] & \mathbf{C}(C, B^B) \arrow[r, "\sim"] & \mathbf{C}(C \times B, B)
\end{tikzcd}$$

où l'application horizontale de la base fait correspondre à l'unique morphisme $\omega_C : C \to 1$ le morphisme $e_{B,B}({}^{\ulcorner}p_B^{\urcorner}\,\omega_C \times 1_B) = p_B : C \times B \to B$. Puisque $\mathbf{C}(C, 1)$ est l'ensemble singleton,

$$*) \qquad \mathbf{C}(C, \pi_B(A,f)) \approx \{g : C \times B \to A / fg = p_B\} = \mathbf{C}/B((C \times B, p_B), (A, f)) = \mathbf{C}/B(B^*(C), (A, f))$$

et de la définition de π_B il suit la fonctorialité en C et (A, f) de l'isomorphisme *), il résulte que π_B est en effet un adjoint à droite du foncteur B^*.

Il résulte en particulier, en tenant compte de la définition de π_B, que pour tout $A, B \in |\mathbf{C}|$, on a le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
A^B \arrow[r] \arrow[d] & (A \times B)^B \arrow[d, "p^B"] \\
1 \arrow[r, "{}^{\ulcorner}p_B^{\urcorner}"] & B^B
\end{tikzcd}$$

où $p : A \times B \to B$ est la deuxième projection du produit direct.

2.07. Corollaire. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie à produits fibrés et à limites inductives finies. Le foncteur* f^* *admet un adjoint à droite* π_f, *pour tout* $f \in \mathbf{C}(B_1, B_2)$, *ssi pour tout* $B \in |\mathbf{C}|$, $\mathbf{C}/B$ *est une catégorie cartésienne.*

Démonstration. En effet, $f : B_1 \to B_2$ est un objet (B_1, f) de $\mathbf{C}/B_2$, $\mathbf{C}/B_2$ est à limites projectives et inductives finies et $(B_1, f)^* : \mathbf{C}/B_2 \to (\mathbf{C}/B_2)/(B, f)$ peut s'identifier avec $f^* : \mathbf{C}/B_2 \to \mathbf{C}/B_1$, abstraction faite de l'isomorphisme $(\mathbf{C}/B_2)/(B_1, f) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}/B_1$ et il suffit d'appliquer la proposition précédente.

2.08. Proposition. *Si* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *sont deux monomorphismes composables dans une catégorie cartésienne* $\mathbf{C}$ *alors*

$$\pi_C(A, gf) \approx \pi_C(B, g) \times \pi_B(A, f) \approx \pi_C(B, g) \cap \pi_B(A, f),$$

où l'intersection est considérée dans Sub (*1*) (= *la classe des sous-objets de l'objet finale 1*).

Démonstration. Le diagramme suivant canoniquement construit est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_C(A, gf) \arrow[r, "p''"] \arrow[d, "\mathcal{T}_C(f)"] & A^C \arrow[r, "A^g"] \arrow[d, "f^C"] & A^B \arrow[d, "f^B"] \\
\mathcal{T}_C(B, g) \arrow[r, "(gf)^C"] \arrow[d] & B^C \arrow[r, "B^g"] \arrow[d, "g^C"] \arrow[ur, phantom, "I"] & B^B \arrow[d, "g^B"] \arrow[ur, phantom, "II"] \\
1 \arrow[r] & C^C \arrow[r, "C^g"] & C^B
\end{tikzcd}$$

En effet, les diagrammes I et II sont commutatifs car $(\ )^-$ est un bifoncteur ; du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, equal] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, equal] & C
\end{tikzcd}$$

il résulte, par l'adjonction cartésienne, $C^g\,{}^{\ulcorner}p_C^{\urcorner} = g^B\,{}^{\ulcorner}p_B^{\urcorner}$; les autres diagrammes sont évidemment commutatifs.

Puisque g^B est un monomorphisme, le contour intérieur du diagramme suivant est commutatif et par suite, en vertu de la propriété d'universalité du produit fibré, il existe un monomorphisme unique $\pi_g(A)$: $\pi_C(A, gf) \to \pi_B(A, f)$ qui rend commutatif les deux triangles du même diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_B(A,f) \arrow[rr] \arrow[d, "\mathcal{T}_g(A,f)"'] & & A^B \arrow[d, "f^B"] \\
1 \arrow[r, "{[p]_B}"'] & B^B & \\
\mathcal{T}_C(A\ g,f) \arrow[ur, "{\overset{g}{A}\ p''}"] \arrow[u, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

Si $e_{C,B,A} : B^C \times A^B \to A^C$, $e_{C,B,B} : B^C \times A^B \to B^C$ sont les morphismes qui correspondent respectivement, par l'adjonction cartésienne, aux morphismes

$$B^C \times A^B \times C \xrightarrow{\sim} B^C \times C \times A^B \xrightarrow{e_{C,B} \times A^B} B \times A^B \xrightarrow{\sim} A^B \times B \xrightarrow{e_{B,A}} A$$

et

$$B^C \times B^B \times C \xrightarrow{\sim} B^C \times C \times B^B \xrightarrow{e_{C,B} \times B^B} B \times B^B \xrightarrow{\sim} B^B \times B \xrightarrow{e_{B,B}} B,$$

on peut constater facilement que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_C(B,g) \times \mathcal{T}_A(A,f) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dd, "p'"] & & B^C \times A^B \arrow[r, "e_{C,B,A}"] \arrow[d, "B^C \times f^B"] & A^C \arrow[d, "f^C"] \\
& & B^C \times_A B \arrow[dr, "e_{C,B,B}"] & \\
& & & B^C \arrow[d, "g^C"] \\
1 \arrow[rr, "{[p]_C}"'] & & & C^C \\
& & B^C \times_A B \arrow[uur, "{\langle p, [p]_B \omega_C \mathcal{T}_C(B,g) \rangle}"] \arrow[rr, "p'"] & & B^C \arrow[uu, "g^C"] \\
& \mathcal{T}_C(B,g) \arrow[ur, "\omega_C(B,g)"] & & &
\end{tikzcd}$$

De la propriété d'universalité du produit fibré, il résulte un morphisme unique $q : \pi_C(B, g) \times \pi_B(A, f) \to \pi_C(A, gf)$ qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_C(B,g) \times \mathcal{T}_B(A,f) \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "q"] \arrow[dd] & & B^C \times A^B \arrow[dr, "e_{C,B,A}"] & \\
& \mathcal{T}_C(A,gf) \arrow[rr] \arrow[dl] & & A^C \arrow[d, "(gf)^C"] \\
1 \arrow[rr, "{[p]_C}"'] & & C^C &
\end{tikzcd}$$

Pour déduire que q est l'inverse du morphisme canonique $<\pi_C(f), \pi_g(A, f)> : \pi_C(A, gf) \to \pi_C(B, g) \times \pi_B(A, f)$, il suffit de remarquer que si $U \to 1$ est un sous-objet de 1, alors il existe au plus un morphisme de but U car si $u, v : X \xrightarrow{i} U$ sont deux morphismes de $\mathbf{C}$ alors $iu = iv$ (car 1 est un objet finale) et donc $u = v$ car i est un monomorphisme. La proposition est entièrement démontrée si nous remarquons que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi_C(B,g) \times \pi_B(A,f) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_B(A,f) \arrow[d] \\
\pi_C(B,g) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

est un produit fibré (donc une interesection).

§ 3. Interprétation des foncteurs Σ_f et f^* dans Ens.

3.01. Catégorie cartésienne Ens des ensembles. La catégorie Ens possède des limites projectives finies car elle admet par exemple, des intersections et des produits directs finis. L'objet finale 1 de Ens est le produit direct de la famille vide et il est isomorphe à tout ensemble contenant un seul élément. Nous désignerons par $\{*\}$ l'objet final de Ens.

La catégorie Ens possède des limites inductives finies car elle admet par exemple, des cointersections et des sommes directes finies. La somme directe d'une famille finie d'ensembles coïncide avec la réunion disjointe de cette famille d'ensembles. L'objet initial 0 de Ens est la somme directe de la famille vide et il est isomorphe à l'ensemble vide $\varnothing$.

Si (p_1, A_1) et (p_2, A_2) sont deux objets quotients de l'ensemble A, c'est-à-dire si $p_1 : A \to A_1$ et $p_2 : A \to A_2$ sont deux applications surjectives, alors la cointersection de (p_1, A_1) et (p_2, A_2) est $(p, A/R)$ où R est la relation d'équivalence la moins fine sur A contenant R_{p_1} et R_{p_2}.

Rappelons que si $f : X \to Y$ est une application d'ensembles, R_f désigne la relation d'équivalence sur X définie par

$$x R_f x' \quad \text{ssi} \quad f(x) = f(x').$$

Rappelons également que l'ensemble des objets quotients d'un ensemble A est muni de la relation de préordre partiel définie par : $(p_1, A_1) \leqslant (p_2, A_2)$, ssi il existe une application $\theta : A_2 \to A_1$ telle que $p_2\,\theta = p_1$.

Pour tout couple (A, B) d'ensembles, $B^A = \mathrm{Ens}\,(A, B)$. La fonction $e_{A,B}: B^A \times A \to B$ est la fonction d'évaluation, c'est-à-dire la fonction définie par :

$$e_{A,B}(f, a) = f(a).$$

On vérifie aisément que pour tout ensemble C, l'application canonique

$$\varphi^{e_{A,B}}_{C}: \mathrm{Ens}\,(C, \mathrm{Ens}\,(B, A)) \to \mathrm{Ens}\,(C \times B, A)$$

est une bijection, fonctorielle en C.

La fonction coévaluation $e^*_{A,B}: B \to (B \times A)^A$ est définie par $e^*_{A,B}(b) = f_b$ où $f_b: A \to B \times A$ est définie par $f_b(a) = (b, a)$.

3.02. La catégorie Ens_f des ensembles finis est une catégorie cartésienne, sous-catégorie pleine de Ens.

3.03. Pour tout ensemble A, la catégorie Ens/A peut être interprété comme étant la catégorie des familles A-indexées d'ensembles et des familles A-indexées de fonctions.

Si $f: X \to A$ est un objet de Ens/A, alors $\{f^{-1}(a)\}_{a \in A}$ est une famille A-indexée d'ensembles et si $\theta: (X, f) \to (Y, g)$ est un morphisme de Ens/A alors $\{\theta_a : f^{-1}(a) \to g^{-1}(a)\}$ $a \in A$, où θ_a est la restriction de θ à $f^{-1}(a)$, est une famille A-indexée de fonctions.

Inversement, étant donnée une famille A-indexée d'ensembles $\{X_a\}_{a \in A}$, soient $X = \coprod_{a \in A} X_a\ (= \bigcup_{a \in A} (X_a \times \{a\})$ et $f: X \to A$ la fonction définie par $f(x, a) = a$; (X, f) est un objet de Ens/A. Si $\{\theta_a : X_a \to Y_a\}_{a \in A}$ est une famille A-indexée d'applications alors l'application $\theta = \coprod_{a \in A} \theta_a : X \to Y$ définie par $\theta(x, a) = (\theta_a(x), a)$ est un morphisme de Ens/A.

Soit $f: A \to B$ et soit $\sum_f: \mathrm{Ens}/A \to \mathrm{Ens}/B$ le foncteur défini sur les objets par $\sum_f (X, p) = (X, fp)$. Nous nous proposons de calculer $(\sum_f (X, p))_b = (fp)^{-1}(b)$ c.à.d. la fibre de fp au point $b \in B$.

$$(fp)^{-1}(b) = p^{-1} f^{-1}(b) = \{(x, a)/x \in X,\ a \in f^{-1}(b) \text{ et}$$

$$p(x) = a\} = \{(x, a)/a \in f^{-1}(b) \text{ et } x \in p^{-1}(a)\} = \coprod_{a \in f^{-1}(b)} p^{-1}(a).$$

Il résulte donc que $\sum_f (X, p) = \coprod_{b \in B} \coprod_{f(a) = b} p^{-1}(a)$ ou en utilisant le language des familles d'ensembles

$$\sum_f (\{X_a\}_{a \in A}) = \{\coprod_{f(a) = b} X_a\}_{b \in B}$$

En particulier, $(\sum_A (X, p))_* = \coprod_{a \in A} p^{-1}(a) = X = \sum_A (X, p)$. Si $(Y, q) \in |\mathrm{Ens}/B|$ et $a \in A$ alors $(f^*(Y, q))_a = (f^*(q))^{-1}(a) = \{y \in Y/f(a) = q(y)\} = q^{-1}(f(a)) = Y_{f(a)}$ et donc $f^*(Y, q) = \coprod_{a \in A} q^{-1}(f(a)) = \coprod_{a \in A} Y_{f(a)}$ ou, dans le language des familles d'ensembles $f^*(\{Y_b\}_{b \in B}) = \{Y_{f(a)}\}_{a \in A}$.

En particulier, $(A^*(Y, q))_a = Y_* = Y \approx Y \times \{a\}$ et donc $A^*(Y, q) = \coprod_{a \in A} Y \times \{a\} \approx Y \times A$.

§ 4. Exemples de catégories cartésiennes.

4.01. Si $\mathbf{C}$ est une petite catégorie alors la catégorie $\mathbf{C}^\wedge = \mathrm{Fonct}$

$(\mathbf{C}^\circ, \mathrm{Ens})$ des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathbf{C}$ est une catégorie cartésienne. En particulier, si X est un espace topologique alors $X^\wedge$ (= la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur X) est une catégorie cartésienne. Dans $\mathbf{C}^\wedge$ les limites projectives et inductives existent et se calculent argument par argument. L'objet final de $\mathbf{C}^\wedge$ est le préfaisceau e défini sur les objets par :

$$e(X) = \{*\}, \qquad \forall X \in |\mathbf{C}|,$$

et sur les morphismes, d'une manière évidente.

L'objet initial de $\mathbf{C}^\wedge$ est le préfaisceau $\varnothing$ défini sur les objets par :

$$\varnothing(X) = \varnothing, \qquad \forall X \in |\mathbf{C}|,$$

et sur les morphismes, d'une manière évidente.

Pour tout couple (S, T) d'objets de $\mathbf{C}^\wedge$, S^T est le préfaisceaux défini sur les objets par :

$$S^T(X) = \mathbf{C}^\wedge(h_X \times T, S), \qquad \forall X \in |\mathbf{C}|$$

et sur les morphismes, d'une manière évidente.

Le morphisme d'évaluation

$$e_{T,S}: S^T \times T \to S$$

est la transformation naturelle dont la composante d'indice X

$$e_{T,S}(X): S^T(X) \times T(X) \to S(X), \qquad X \in |\mathbf{C}|,$$

est définie par

$$e_{T,S}(X)\,((\eta, x)) = \eta_X((1_X, x)).$$

On vérifie aisément que pour tout objet H de $\mathbf{C}^\wedge$ l'application canonique

$$\varphi^{e_{T,S}}_{H}: \mathbf{C}^\wedge(H, S^T) \to \mathbf{C}^\wedge(H \times T, S)$$

est une bijection, fonctorielle en H.

En effet, si H est représentable c'est-à-dire de la forme h_X, $X \in |\mathbf{C}|$, alors, en vertu du lemme de Yoneda,

$$\mathbf{C}^\wedge(h_X, S^T) \approx S^T(X) = \mathbf{C}^\wedge(h_X \times T, S)$$

et pour le cas H quelconque, on tient compte du fait que H est une limite inductive de foncteurs représentables et que dans $\mathbf{C}^\wedge$ le foncteur $(\ )XT$ commute avec les limites inductives.

Le morphisme de coévalution

$$e^*_{T,S}: S \to (S \times T)^T$$

est la transformation naturelle dont la composante d'indice X

$$e^*_{T,S}(X): S(X) \to (S \times T)^T(X) = \mathbf{C}^\wedge(h_X \times T, S \times T), \quad X \in |\mathbf{C}|,$$

est définie par

$$e^*_{T,S}(X)\,(x) = \varphi^x \times 1_T,$$

où $\varphi^x: h_X \to S$ est la transformation naturelle qui correspond à x par

l'isomorphisme de Yoneda, c'est-à-dire l'unique morphisme fonctoriel $\varphi^x : h_X \to S$ tel que $\varphi^x_X(1_X) = x$. Remarquons que si $\mathbf{C}$ admet des produits directs finis alors pour tout objet X de $\mathbf{C}$ et tout objet S de $\mathbf{C}^\wedge$ on a

$$S^{h_X} \approx S(X \times (\quad)).$$

En effet, pour tout objet Y de $\mathbf{C}$, on a

$$S^{h_X}(Y) = \mathbf{C}^\wedge(h_X \times h_Y, S) \approx \mathbf{C}^\wedge(h_{X\times Y}, S) \approx S(X \times Y).$$

Si T est un objet quelconque de $\mathbf{C}^\wedge$, on a

$$S^T(X) = \mathbf{C}^\wedge(h_X \times T, S) \approx \mathbf{C}^\wedge(T \times h_X, S \approx \mathbf{C}^\wedge(T, S^{h_X}) \approx \mathbf{C}^\wedge(T, S(X \times (\quad))).$$

Pour toute petite catégorie $\mathbf{C}$, il existe une catégorie cartésienne $\mathbf{C}'$ et un foncteur pleinement fidèle $h : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$. De plus, si $\mathbf{C}$ est une catégorie cartésienne alors h commute avec les limites projectives finies et avec l'exponentiation.

Il suffit de prendre $\mathbf{C}' = C^\wedge$ et h le foncteur de Yoneda qui est pleinement fidèle et commute avec les limites projectives quelconques existant dans $\mathbf{C}$. Il reste à montrer que

$$h_{B^A} \approx h^h_{B^A}, \qquad \forall A, B \in |\mathbf{C}|.$$

Mais, pour tout objet X de $\mathbf{C}$ on a,

$$h_{B^A}(X) \approx \mathbf{C}(X, B^A) \approx \mathbf{C}(X \times A, B) \approx \mathbf{C}^\wedge(h_{X\times A}, h_B) \approx \mathbf{C}^\wedge(h_X \times h_A, h_B) \approx h^h_{B^A}(X).$$

4.02. Si G est un monoïde alors la catégorie G-Ens des G-ensembles à droite est une catégorie cartésienne.

En effet, si $\mathbf{C}$ est la catégorie associée au monoïde G, c'est-à-dire la catégorie à un seul objet X et où $\mathbf{C}(X, X) = G$, alors la catégorie de G-ensembles à droite s'identifie à la catégorie $\mathbf{C}^\wedge$ où une transformation naturelle de $\mathbf{C}^\wedge$ est une application de G-ensembles.

L'objet h_X de $\mathbf{C}^\wedge$ s'identifie à G considéré comme G-ensemble à droite.

Si S et T sont deux G-ensembles alors $S \times T$ est le G-ensemble défini par :

$$(s, t)\, g = (sg, tg), \quad \forall s \in S, \ \forall t \in T \ \text{et} \ \forall g \in G.$$

et par suite S^T est l'ensemble de toutes les applications de G-ensembles de $G \times T$ dans S. S^T est muni d'une structure de G-ensemble en définissant $\theta . g$ comme l'application définie par :

$$\theta . g\,((g', t)) = \theta\,(gg', t),$$

où $g, g' \in G$, $t \in T$ et $\theta : G \times T \to S$ est une application de G-ensembles.

L'application d'évaluation

$$e_{T,S} : S^T \times T \to S$$

est définie par :

$$e_{T,S}\,((\theta, t) = \theta(e, t),$$

où e est l'élément neutre du monoïde G.

L'application de coévaluation

$$e^*_{T,S} : S \to (S \times T)^T$$

fait correspondre à tout élément s de S, l'application

$$e^*_{T,S}(s) : G \times T \to S \times T$$

définie par :

$$e^*_{T,S}(s)\,((g, t)) = (sg, t).$$

Remarquons que si G est un groupe alors une application de G-ensembles $\theta : G \times T \to S$ est bien définie par ses valeurs $\theta(e, t)$, $t \in T$, car pour tout $g \in G$, $\theta(g, t) = \theta(eg, tg^{-1} g) = \theta(e, tg^{-1})\, g$.

Il en résulte que toute application de G-ensembles $\theta : G \times T \to S$ détermine une application d'ensembles $\theta' : T \to S$ définie par :

$$\theta'(t) = \theta(e, t), \quad \forall t \in T.$$

Réciproquement, toute application d'ensembles $f : T \to S$ détermine une application de G-ensemble $f' : G \times T \to S$ définie par :

$$f'((g, t)) = f(tg^{-1})\, g, \quad \forall g \in G, \quad \forall t \in T.$$

Il est évident que $f'((e, t)) = f(t)$ et que f' est bien une application de G-ensembles car $f'((g, t)\, g_1) = f'((gg_1, tg_1)) = f(tg_1 g_1^{-1} g^{-1})\, gg_1 = f(tg^{-1})\, gg_1 = f'((g, t))\, g_1$.

De ce qui précède il résulte que si G est un groupe, S peut s'identifier à l'ensemble des fonctions de T dans S, autrement dit que le foncteur d'oubli $\mathbf{C}^\wedge \to$ Ens, qui à tout G-ensemble associe l'ensemble sous-jacent préserve l'exponentiation et que la catégorie G-Ens$_f$ des G-ensembles finis est une catégorie cartésienne même si G est un groupe infini.

4.03. La catégorie cartésienne $\vec{\text{Ens}}$ des morphismes de Ens. Si $\mathbf{C} = \{i, j, l_i, l_j, u : i \to j\}$ est la catégorie avec deux objets et trois morphismes, $\mathbf{C}^\wedge$ s'identifie à la catégorie $\vec{\text{Ens}}$ des fonctions, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont des fonctions $t : X_j \to X_i$ et dont les morphismes

$$f : (t : X_j \to X_i) \to (t' : Y_j \to Y_i)$$

sont des couples $f = (f_j, f_i)$ de fonctions telles que $f't = t'f_j$.

En particulier, le préfaisceau h_i s'identifie à l'application canonique $\varnothing \to \{1_i\}$ car $h_i(i) = \{1_i\}$ et $h_i(j) = \varnothing$, et le préfaisceau h_j s'identifie à l'application canonique $\{1_j\} \to \{u\}$, car $h_j(i) = \{u\}$ et $h_j(j) = \{1_j\}$; $h_u : h_i \to h_j$, est la transformation naturelle de composantes $h_u(i) : \{1_i\} \to \{u\}$, $h_u(i)\,(1_i) = u$; $h_u(j) = \varnothing \to \{1_j\}$ et s'identifie au morphisme

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d, "h_u(j)"'] & \{1_i\} \arrow[d, "h_u(i)"] \\ \{1_j\} \arrow[r] & \{u\} \end{tikzcd}$$

de Ens.

4.04. La catégorie cartésienne $\mathbf{C}^{\sim}$ des faisceaux d'ensembles sur un petit site $(\mathbf{C}, \tau)$. Soient $(\mathbf{C}, \tau)$ un petit site, $i : \mathbf{C}^{\sim} \to \mathbf{C}^{\wedge}$ le foncteur d'inclusion des faisceaux dans les préfaisceaux, $a : \mathbf{C}^{\wedge} \to \mathbf{C}^{\sim}$ le foncteur faisceau associé, adjoint à gauche du foncteur i et commutant avec les limites projectives finies. La catégorie $\mathbf{C}^{\sim}$ est une catégorie cartésienne. En particulier, si X est un espace topologique, la catégorie $X^{\sim}$ des faisceaux d'ensembles sur X est une catégorie cartesienne. $\mathbf{C}^{\sim}$ est une catégorie à limites projectives.

Soient J une petite catégorie, $F : J \to \mathbf{C}^{\sim}$ un foncteur et $G = \varinjlim_J i . F$ dans $\mathbf{C}^{\wedge}$. Montrons que G est un objet de $\mathbf{C}^{\sim}$.

Pour cela il suffit de montrer que pour tout morphisme bicouvrant $u : H \to K$ de $\mathbf{C}^{\wedge}$, l'application canonique

$$\mathbf{C}^{\wedge}(K, G) \to \mathbf{C}^{\wedge}(H, G)$$

est une bijection, fait évident, car :

$$\mathbf{C}^{\wedge}(K, G) = \mathbf{C}^{\wedge}(K, \varinjlim_J i . F) \approx \varprojlim_J \mathbf{C}^{\wedge}(K, i . F) \approx \varprojlim_J \mathbf{C}^{\sim}(a(K), F) \approx$$

$$\approx \varprojlim_J \mathbf{C}^{\sim}(a(H), F) \approx \varprojlim_J \mathbf{C}^{\wedge}(H, i(F)) \approx \mathbf{C}^{\wedge}(H, \varinjlim_J i . F) = \mathbf{C}^{\wedge}(H, G).$$

Si pour tout $X \in |\mathbf{C}|$, $e_X : \mathbf{C}^{\wedge} \to \mathrm{Ens}$, $(F \rightsquigarrow F(X))$ est le foncteur section au-dessus de X, alors le foncteur $\tilde{e}_X = e_X . i : \mathbf{C}^{\sim} \to \mathrm{Ens}$ commute avec les limites projectives car i et e_X le font.

Il résulte que dans $\mathbf{C}^{\sim}$, comme dans $\mathbf{C}^{\wedge}$, les limites projectives se calculent argument par argument ; en particulier, $\mathbf{C}^{\sim}$ possède un objet final, des produits directs, des produits fibrés, des noyaux de double flèche et se calculent argument par argument.

$\mathbf{C}^{\sim}$ est une catégorie à limites inductives ; en particulier, $\mathbf{C}^{\sim}$ admet un objet initial, des sommes directes, des sommes fibrées et des conoyaux de double flèche.

En effet, de l'adjonction il résulte que le foncteur a commute avec les limites inductives et par suite pour toute petite catégorie J et tout foncteur $F : J \to \mathbf{C}^{\sim}$, le morphisme canonique

$$\varinjlim_J F \to a(\varinjlim_J i . F)$$

est un isomorphisme. Comme $\varinjlim_J i . F$ existe dans $\mathbf{C}^{\wedge}$, l'affirmation est démontrée.

Si $u_j : i(F_j) \to \varinjlim_J i . F$, $j \in J$, sont les morphismes structuraux de la limite inductive dans $\mathbf{C}^{\wedge}$, alors les morphismes structuraux $v_j : F_j \to \varinjlim_J F$, $j \in J$, de la limite inductive dans $\mathbf{C}^{\sim}$ se définissent à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & F_j \arrow[dl, "\wr"'] \arrow[dr, "v_j"] & \\
ai(F_j) \arrow[rr, "a(u_j)"] & & a(\varinjlim_J i . F),\ j \in J,
\end{tikzcd}$$

et il est évident que

$$i(v_j) = i(F_j) \xrightarrow{u_j} \varinjlim_J i . F \to ia(\varinjlim_J i . F)$$

Pour tout objet F de $\mathbf{C}^{\sim}$, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{\mathbf{C}/F} a(h_{X_\alpha}) \to F$$

est un isomorphisme. C'est une conséquence de l'isomorphisme canonique de

$$\varinjlim_{\mathbf{C}/F} h_{X_\alpha} \to i(F)$$

et du fait que a commute avec les limites inductives.

Dans $\mathbf{C}^{\sim}$ les limites inductives sont universelles.

Soient J une petite catégorie, $F : J \to \mathbf{C}^{\sim}$ un foncteur, $(v_j, G) = \varinjlim_J F$ dans $\mathbf{C}^{\sim}$ et $u : H \to G$ un morphisme quelconque de $\mathbf{C}^{\sim}$.

Pour tout $j \in J$, considérons dans $\mathbf{C}^{\wedge}$ le diagramme suivant avec les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
P_j \arrow[r, "u'_j"] \arrow[d] & P \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & i(H) \arrow[d, "i(u)"] \\
i(F_j) \arrow[r, "u_j"] & \varinjlim_J i(F_j) \arrow[r, "p"] & i(G)
\end{tikzcd}$$

où u_j, $j \in J$, sont les morphismes structuraux de la limite inductive, p le morphisme d'adjonction ayant la propriété d'être bicouvrant et tel que $i(v_j) = pu_j$, $\forall j \in J$.

Comme dans $\mathbf{C}^{\wedge}$ les limites inductives sont universelles on a $(u'_j, P) = \varinjlim_J P_j$ et comme les morphismes bicouvrants sont stables aux changements de base, il résulte que $a(p')$ est un isomorphisme et, par suite,

$$H \approx ai(H) \approx a(P) \approx a(\varinjlim_J P_j) \approx a \varinjlim_J (i(F_j \times_H G)) \approx \varinjlim_J (F_j \times_G H).$$

Pour tout objet F de $\mathbf{C}^{\sim}$, le foncteur produit par F

$$(\ \ ) \times F \}: \mathbf{C}^{\sim} \to \mathbf{C}$$

commute avec les limites inductives et admet un adjoint à droite

$$(\ )^F : \mathbf{C}^{\sim} \to \mathbf{C}^{\sim}$$

Si $(v_j, B) = \varinjlim_J G_j$ est une limite inductive dans $\mathbf{C}^{\sim}$, alors pour tout $j \in J$, le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} G_j \times F \arrow[r, "v_j \times 1_F"] \arrow[d, "p_{G_j}"'] & B \times F \arrow[d, "p_B"] \\ G_j \arrow[r, "v_j"] & B \end{tikzcd}$$

est cartésien et donc, d'après ce qui précède,

$$(v_j \times l_F, B \times F) = \varinjlim_J G_j \times F = \varinjlim_J ((\ ) \times F) \,.\, G)$$

et la première affirmation est démontrée.

Montrons maintenant que le foncteur $(\ ) \times F$ admet un adjoint à droite $(\ )$. Puisque a commute avec les produits directs, il résulte de (1.07) que pour tout $G \in |\mathbf{C}^{\sim}|$, $i(G)^{i(F)}$ est dans $\mathbf{C}^{\sim}$ et nous définissons $G^F = i(G)^{i(F)}$. Pour tout $X \in |\mathbf{C}|$, on a évidemment,

$$\mathbf{C}^{\sim}(ah_X G^F) \approx \mathbf{C}^{\wedge}(h_X\, i(G^F)) \approx i(G^F)\,(X) = i(G)^{i(F)}(X) \approx$$

$$\approx \mathbf{C}^{\wedge}(h_X \times i(F), i(G)) \approx \mathbf{C}^{\sim}(ah_X \times aiF, G) \approx \mathbf{C}^{\sim}(ah_X \times F, G)$$

et donc l'isomorphisme d'adjonction est vérifié pour les objets de $\mathbf{C}^{\sim}$ de la forme $a(h_X)$, $X \in |\mathbf{C}|$. Si H est un objet quelconque de $\mathbf{C}^{\sim}$, alors $H = \varinjlim_{\mathbf{C}/H} a(h_{X_\alpha})$ et compte tenu t de la première affirmation on a :

$$\mathbf{C}^{\sim}(H, G^F) \approx \varinjlim_{\mathbf{C}/H} \mathbf{C}^{\sim}(ah_{X_\alpha}, G^F) \approx \varinjlim_{\mathbf{C}/H} \mathbf{C}^{\sim}(ah_{X_\alpha} \times F, G) \approx$$

$$\approx \mathbf{C}^{\sim}(\varinjlim_{\mathbf{C}/H} (ah_X \times F), G) \approx \mathbf{C}^{\sim}(H \times F, G).$$

4.05. La catégorie Cat des petites catégories est une catégorie cartesienne.

La catégorie vide $\mathbf{0}$ est un objet initial de Cat et la catégorie nulle $\mathbf{1}$ (à un seul objet et un seul morphisme) est un objet final de Cat.

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux petites catégories, désignons par $A \times B$ la catégorie définie par :

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \times |\mathbf{B}|,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})((A, B), (A', B')) = \mathbf{A}(A, A') \times \mathbf{B}(B, B'),$$

la composition des morphismes se faisant composante par composante. On a deux foncteurs canoniques :

$$P_1 : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A} \quad \text{et} \quad P_2 : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$$

$$\begin{tikzcd} (A, B) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "(u, v)"'] & A \arrow[d, "u"] \\ (A', B') \arrow[r, squiggly] & A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (A, B) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "(u, v)"'] & B \arrow[d, "v"] \\ (A', B') \arrow[r, squiggly] & B' \end{tikzcd}$$

et on vérifie aisément que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}\,;\, P_1, P_2)$ est un produit direct dans Cat de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Si $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sont deux morphismes de Cat, notons par $\mathbf{K}$ la catégorie définie par :

$$|\mathbf{K}| = \{A \in |\mathbf{A}| / F(A) = G(A)\},$$

$$\mathbf{K}(A_1, A_2) = \{f \in \mathbf{A}(A_1, A_2) / F(f) = G(f)\}$$

où la composition des morphismes est induite de celle de $\mathbf{A}$. On vérifie aisément que $\mathbf{K}$ est une sous-catégorie de $\mathbf{A}$ et si $K : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ est l'inclusion canonique alors $(\mathbf{K}, K) = \ker(F, G)$ dans Cat. Il en résulte donc que Cat admet des limites projectives finies.

Désignons par $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ la catégorie définie comme suit :

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = (|\mathbf{A}| \times \{i\}) \cup (|\mathbf{B}| \times \{j\})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})((A, i), (A', i)) = \mathbf{A}(A, A') \times \{i\}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})((B, j), (B', j)) = \mathbf{B}(B, B') \times \{j\}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})((A, i), (B, j)) = \varnothing = (\mathbf{A} + \mathbf{B})((B, j)\ (A, i), \qquad i \neq j.$$

Si $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ (resp. $B \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g'} B''$) sont deux morphismes composables de $\mathbf{A}$ (resp. de $\mathbf{B}$), on pose $(f', i)(f, i) = (f'f, i)$ (resp. $(g', g)(g, j) = (g'g, j)$) et pour tout $A \in |\mathbf{A}|$ et $B \in |\mathbf{B}|$ on pose $1_{(A,i)} = (1_A, i)$ et $1_{(B,j)} = (1_B, j)$. On a deux foncteurs canoniques :

$$U_1 : A \longrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \text{et} \quad U_2 : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "f"'] & (A, i) \arrow[d, "(f, i)"] \\ A' \arrow[r, squiggly] & (A', i) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "g"'] & (B, j) \arrow[d, "(g, j)"] \\ B' \arrow[r, squiggly] & (B', A) \end{tikzcd}$$

et on vérifie aisément que $(U_1, U_2\,;\, \mathbf{A} + \mathbf{B})$ est une somme directe de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ dans Cat.

Soient $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ deux morphismes de Cat et soit $\{R_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des relations d'équivalences sur $|\mathbf{B}|$, telles que pour tout $a \in \mathbf{A}$ (a = objet ou morphisme de $\mathbf{A}$) telle que $F(a)$ et $G(a)$ appartiennent à $|\mathbf{B}|$, on a $F(a)\ R_i\ G(a)$, $\forall i \in I$, autrement dit, telles que pour tout couple d'objets (B, B') de $\mathbf{B}$ pour lequel il existe un $A \in |\mathbf{A}|$ ou bien

un $f \in Fl(\mathbf{A})$ tel que $F(A) = B$ et $G(A) = B'$ ou tel que $F(f) = 1_B$ et $G(f) = 1_{B'}$, on a $BR_i B'$, $\forall i \in I$.

La famille $\{R_i\}_{i \in I}$ est non vide car $R_0 \in \{R_i\}_{i \in I}$ où BR_0B' pour tout $B, B' \in |\mathbf{B}|$. Soit R la relation sur $|\mathbf{B}|$ ayant pour graphe l'intersection des graphes de R_i, $i \in I$. La relation R est la plus petite relation d'équivalence sur $|\mathbf{B}|$ telle que pour tout $a \in \mathbf{A}$ telle que $F(a)$, $G(a) \in |\mathbf{B}|$ on a $F(a)\, RG(a)$.

Notons $|\mathbf{K}^*| = |\mathbf{B}|/R$ l'ensemble quotient de $|\mathbf{B}|$ par R et $\hat{B}$ la classe modulo R d'un objet B de $\mathbf{B}$. Soit $\mathbf{S}_R$ l'ensemble des suites finies $u = \langle u_n, \ldots, u_0 \rangle$ de morphismes de $\mathbf{B}$ telles que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $s(u_i)\, R\, b(u_{i-1})$ (s = l'application source, b = l'application but).

Si $u = \langle u_n, \ldots, u_0 \rangle$ et $v = \langle v_m, \ldots, v_0 \rangle$ sont deux éléments de $\mathbf{S}_R$ tels que $s(v_0) R\, b(u_n)$, définissons une composition dans $\mathbf{S}_R$ en posant :

$$vu = \langle v_m, \ldots, v_0 \rangle \ \langle u_n, \ldots, u_0 \rangle = \langle v_m, \ldots, v_0, u_n, \ldots, u_0 \rangle.$$

Soit $\{R'_j\}_{j \in J}$ l'ensemble des relations d'équivalence sur $\mathbf{S}_R$ telles que :

i) Si $u_0 = F(f)$, $v_0 = G(f)$, $f \in \mathrm{Fl}(\mathbf{A})$, alors $\langle u_0 \rangle\ R'_j\ \langle v_0 \rangle$, $\forall j \in J$;

ii) Si $v_0 = u_1 u_0$ dans $\mathbf{B}$ alors $\langle v_0 \rangle\ R'_j\ \langle u_1, u_0 \rangle$, $\forall j \in J$;

iii) Pour tout $B, B' \in |\mathbf{B}|$ et toute suite $\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle$ telle que $s(u_0)\, RB$ et $B'R\, b(u_n)$ on a

$$\langle u_n, \ldots, u_0, 1_B \rangle\ R'_j\ \langle u_n, \ldots, u_0 \rangle$$

et

$$\langle 1_B, u_n, \ldots, u_0 \rangle\ R'_j\ \langle u_n, \ldots, u_0 \rangle, \quad \forall j \in J ;$$

iv) Si $u\, R'_j v$ et $u' R'_j v'$, $\forall j \in J$, et si $u'u$ et $v'v$ sont définis dans $\mathbf{S}_R$ alors $u'u\ R'_j\ v'v$, $\forall j \in J$ (les relations R'_j, $j \in J$, sont compatibles avec la composition des suites).

Il est évident que $\{R'_j\}_{j \in J} \neq \varnothing$ car elle contient la relation totale R'_0 où $u\, R'_0 v$ pour tout $u, v \in \mathbf{S}_R$. Soit R' la relation sur S_R dont le graphe est l'intersection des graphes de R'_j, $j \in J$. La relation R' est la plus petite relation d'équivalence sur $\mathbf{S}_R$, telle que les conditions i), ii), iii) et iv) soient vérifiées.

Notons $\mathrm{Fl}(\mathbf{K}^*) = \mathbf{S}_{R/R}$ l'ensemble quotient de $\mathbf{S}_R$ par R' et $\bar{u}$ la classe modulo R' d'un élément $\bar{u}$ de $\mathbf{S}_R$.

Définissons les aplications source et but

$$s, b : \mathrm{Fl}(\mathbf{K}^*) \to |\mathbf{K}^*|$$

comme suit :

$$\overline{s(\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle)} = \widehat{s(u_0)},$$

$$\overline{b(\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle)} = \widehat{b(u_n)}.$$

L'application s est bien définie car si nous définissons R'_s par :

$$\langle u_0, \ldots, u_0 \rangle\ R'_s\ \langle v_m, \ldots, v_0 \rangle \text{ ssi } s(u_0)\ R\ s(v_0),$$

alors il est évident que $R'_s \in \{R'_j\}_{j \in J}$ et par suite, si $\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle\ R'\ \langle v_m, \ldots, v_0 \rangle$ alors $\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle\ R'_s\ \langle v_m, \ldots, v_0 \rangle$ et donc $s(u_0) R s(v_0)$. D'une manière analogue on montre que b est aussi bien définie.

Si $\overline{\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle}$ et $\overline{\langle v_m, \ldots, v_0 \rangle}$ sont deux éléments de $\mathrm{Fl}(\mathbf{K}^*)$ tels que $s(v_0) R\, b(u_n)$, définissons une composition dans $\mathrm{Fl}(\mathbf{K}^*)$, en posant

$$\overline{\langle v_m, \ldots, v_0 \rangle}\ \overline{\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle} = \overline{\langle v_m, \ldots, v_0, u_n, \ldots, u_0 \rangle} ;$$

cette composition est bien définie car si $\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle\ R'\ \langle u'_{n'}, \ldots, u'_0 \rangle$ et $\langle v_m, \ldots, v_0 \rangle\ R'\ \langle v'_{m'}, \ldots, v'_0 \rangle$, alors $s(u_0)\ R\ s(u'_0)$, $b(u_n)\ R\ b(u'_n)$, $s(v_0) R\ s(v'_0)$, $b(v'_n)$, $b(v_{m'})\ R\ b(v'_{m'})$ et donc $s(v'_0)\ R\ b(u'_{n'})$, et par suite le composé $\langle v'_{m'}, \ldots, v'_0 \rangle \langle u'_{n'}, \ldots, u'_0 \rangle$ est défini dans $\mathbf{S}_R$ et de plus, en vertu de iv), on a

$$\overline{\langle v_m, \ldots, v_0 \rangle}\ \overline{\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle} = \overline{\langle v'_m, \ldots, v'_0 \rangle \langle u'_{n'}, \ldots, u'_0 \rangle}.$$

On vérifie aisément que cette composition est associative.

Si l'on pose $1_{\hat{B}} = \overline{\langle 1_B \rangle}$, $\hat{B} \in |\mathbf{K}^*|$, le morphisme $1_{\hat{B}}$ est bien défini, car si nous définissons la relation R_1 sur $|\mathbf{B}|$ par :

$$BR_1 B' \quad \text{ssi} \quad 1_B\, R'\, 1_B,$$

alors il est évident que $R_1 \in \{R_i\}_{i \in I}$ et par suite si BRB', alors BR_1B' et donc $1_B\, R'\, 1_{B'}$. Grâce à iii), $1_{\hat{B}}$, $\hat{B} \in |\mathbf{K}^*|$, est un élément neutre pour la composition de $\mathrm{Fl}(\mathbf{K}^*)$ et par suite $\mathbf{K}^*$ est une catégorie. Si pour tout $B \in |\mathbf{B}|$ et tout $u_0 \in \mathrm{Fl}(\mathbf{B})$, on pose $K^*(B) = \hat{B}$ et $K^*(u_0) = \overline{\langle u_0 \rangle}$ on a un foncteur $K^* : \mathbf{B} \to \mathbf{K}^*$. En effet, $K^*(u_1 . u_0) = \overline{\langle u_1 u_0 \rangle} = \overline{\langle u_1, u_0 \rangle} = \overline{\langle u_1 \rangle\ \langle u_0 \rangle} = \overline{\langle u_1 \rangle\ \langle u_0 \rangle} = \overline{\langle u_1 \rangle}\ \overline{\langle u_0 \rangle} K^*(u_1)\, K(^*u_0)$ et $K^*(1_B) = \overline{\langle 1_B \rangle} = 1_{\hat{B}} = 1_{K^*(B)}$. Il est évident que $K^*F = K^*G$.

Montrons maintenant que $(\mathbf{K}^*, K^*) = \mathrm{coker}\,(F, G)$, c'est-à-dire pour tout foncteur $H : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ tel que $HF = HG$ il existe un foncteur $H' : \mathbf{K}^* \to \mathbf{C}$, unique, tel que $H'K^* = H$. Définissons le foncteur H' par :

$$H'(\hat{B}) = H(B), \qquad \forall \hat{B} \in |\mathbf{K}^*|,$$

et

$$H'(\overline{\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle}) = H(u_n) \ldots H(u_0), \qquad \forall\, \overline{\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle} \in \mathrm{Fl}(\mathbf{K}^*).$$

Montrons d'abord que H' est bien défini. En effet, si R^* est la relation d'équivalence sur $|\mathbf{B}|$ définie par :

$$BR^*B' \text{ ssi } H(B) = H(B'),$$

alors $R^* \in \{R_i\}_{i \in I}$, car si $B = F(a)$, $B' = G(a)$, $a \in \mathbf{A}$, alors $H(B) = HF(a) = HG(a) = H(B')$ et par suite si BRB', alors BR^*B' et donc $H(B) = H(B_i)$.

Si $\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle \in \mathbf{S}_R$, alors pour tout i, $l \leqslant i \leqslant n$, $s(u_i)\, R\, b(u_{i-1})$ et par suite $s(u_i) R^*\, b(u_{i-1})$, c'est-à-dire $s(H(u_i)) = H(s(u_i)) = H(b(u_{i-1})) = b(H(u_{i-1}))$ et donc le composé $H(u_n) \ldots H(u_0)$ est bien défini. De plus, si R'_H est la relation d'équivalence sur $\mathbf{S}_R$ définie par :

$\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle\ R'_H\ \langle v_m, \ldots, v_0 \rangle$ ssi $H(u_n) \ldots H(u_0) = H(v_m) \ldots H(v_0)$, alors $R'_H \in \{R'\}_{j \in J}$ (car H est un foncteur) et par suite si $\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle\ R'\ \langle v_m, \ldots, v_0 \rangle$ alors $\langle u_n, \ldots, u_0 \rangle\ R'_H\ \langle v_m, \ldots, v_0 \rangle$ et donc $H(u_n) \ldots H(u_0) = H(v_m) \ldots H(v_0)$. H' est bien un foncteur car :

$$H'(1_{\hat{B}}) = H(\langle \overline{1_B} \rangle = H(1_B) = 1_{H\,B} = 1_{H'\hat{B}}$$

et

$$H'(\langle \overline{v_m, \ldots, v_0} \rangle \ \langle \overline{u_n, \ldots, u_0} \rangle) = H(\langle \overline{v_m, \ldots, v_0, u_n, \ldots, u_0} \rangle) =$$

$$= H(v_m) \ldots H(v_0)\, H(u_n) \ldots H(u_0) = H'(\langle \overline{v_m, \ldots, v_0} \rangle)\, H'(\langle \overline{u_n, \ldots, u_0} \rangle).$$

On a

$$H'K^*(B) = H'(\hat{B}) = H(B), \qquad \forall B \in |\mathbf{B}|,$$

$$H'K^*(u_0) = H'\langle (\overline{u_0} \rangle) = H(u_0), \qquad \forall u_0 \in \mathrm{Fl}(\mathbf{B}),$$

et H' est uniquement défini par ces deux égalités. En effet, si $\mathbf{H}'' : \mathbf{K}^* \to \mathbf{C}$ est un autre foncteur tel que $H''K^* = H$ alors

$$H''(\hat{B}) = H''(K^*(B)) = H(B) = H'(\hat{B}), \qquad \forall B \in |\mathbf{K}^*|$$

et

$$H''(\langle \overline{u_n, \ldots, u_0} \rangle) = H''(\langle \overline{u_n} \rangle \ldots \langle \overline{u_0} \rangle) = H''(\langle \overline{u_n} \rangle) \ldots$$

$$\ldots H''(\langle \overline{u_0} \rangle) = H''K^*(u_n) \ldots H''K^*(u_0) = H(u_n) \ldots H(u_0) =$$

$$= H'(\langle \overline{u_n, \ldots, u_0} \rangle), \qquad \forall \langle \overline{u_n, \ldots, u_0} \rangle \in \mathrm{Fl}(\mathbf{K}^*).$$

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux petites catégories, notons $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ la catégorie Cat $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ dont les objets sont les foncteurs de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$ et les morphismes sont les tranformations naturelles entre ces foncteurs. L'association

$$e_{\mathbf{A},\mathbf{B}} : \mathbf{B}^{\mathbf{A}} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$$

$$\begin{array}{ccc} (F, A) & \rightsquigarrow & F(A) \\ {\scriptstyle (\eta, a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F'(a)\eta_A = \eta_{A'}.F(a)} \\ (F', A') & \rightsquigarrow & F'(A') \end{array}$$

est un foncteur. En effet, $e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(1_F, 1_A) = F(1_A)(1_F)_A = 1_{F(A)} = 1_{e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(F, A)}$, et si $(\eta', a') : (F', A') \to (F'', A'')$ est un autre morphisme de $\mathbf{B}^{\mathbf{A}} \times \mathbf{A}$, on a :

$$e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}((\eta', a')(\eta, a)) = e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\eta'\eta, a'a) = F''(a'a)(\eta'\eta)_A =$$

$$= F''(a')\, F''(a)\, \eta'_A \eta_A = F'(a')\, \eta'_{A'}\, F'(a)\eta_A = e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\eta', a')\, e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\eta, a).$$

Montrons maintenant que pour toute petite catégorie $\mathbf{X}$ et tout foncteur $f : \mathbf{X} \times A \to B$ il existe un foncteur $\bar{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{B}^{\mathbf{A}}$, unique tel que $e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\bar{f} \times 1_{\mathbf{A}}) = f$. Pour tout $X \in |\mathbf{X}|$, l'association

$$\bar{f}(X) : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \rightsquigarrow & f(X, A) \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f(1_X, a)} \\ A' & \rightsquigarrow & f(X, A') \end{array}$$

est un foncteur. En effet, $\bar{f}(X)(1_A) = f(1_X, 1_A) = 1_{f(X,A)} = 1_{\bar{f}(X)(A)}$ et si $a' : A' \to A''$ est un autre morphisme de $\mathbf{A}$, on a $\bar{f}(X)(a'a) = f(1_X, a'a) = f((1_X, a')(1_X, a)) = f(1_X, a')f(1_X, a')f(1_X, a) = \bar{f}(x)(a')\bar{f}(X)(a)$.

Si $x : X \to X'$ est un morphisme de $\mathbf{X}$ et si pour tout $A \in |\mathbf{A}|$ nous posons $(\bar{f}(x))_A = f(x, 1_A) : \bar{f}(X)(A) \to \bar{f}(X')(A)$, alors $(\bar{f}(x))_A$, $A \in |\mathbf{A}|$, sont les composantes d'un morphisme fonctoriel $f(x) : \bar{f}(\mathbf{X}) \to \bar{f}(\mathbf{X}')$. En effet, pour tout morphisme $a : A \to A'$ de $\mathbf{A}$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} f(X)(A) = f(X, A) & \xrightarrow[(\bar{f}(x))_A]{f(x, 1_A)} & f(X', A) & = & \bar{f}(X')(A) \\ {\scriptstyle f(X)(a)}\downarrow = \downarrow{\scriptstyle f(1_X, a)} & & {\scriptstyle f(1_{X'}, a)}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle f(X')(a)} \\ \bar{f}(X)(A') = f(X, A') & \xrightarrow[(f(x))_{A'}]{f(x, 1_{A'})} & f(X', A') & = & \bar{f}(X')(A') \end{array}$$

car

$$f(1_{X'}, a)\, f(x, 1_A) = f((1_{X'}, a)(x, 1_A)) = f(x, a,$$

et

$$f(x, 1_{A'})\, f(1_X, a) = f((x, 1_{A'})(1_X, a)) = f(x, a).$$

L'association

$$\bar{f} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{B}^{\mathbf{A}}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \rightsquigarrow & \bar{f}(X) \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}(x)} \\ X' & \rightsquigarrow & f(X') \end{array}$$

est un foncteur.

En effet, $f(1_X) = 1_{\bar{f}X}$ car pour tout $A \in |\mathbf{A}|$, on a $(f(1_X))_A = (1_X = f, 1_A) = 1_{f(X,A)} = 1_{\bar{f}(X)(A)} = (1_{\bar{f}(X)})_A$; si $X \xrightarrow{x} X' \xrightarrow{x'} X''$ sont deux morphismes composables de $\mathbf{X}$ alors $f(x'x) = f(x')\bar{f}(x)$, car pour tout $A \in |\mathbf{A}|$, $(\bar{f}(x'x))_A = f(x'x, 1_A) = f((x'1_A)(x, 1_A)) = f(x', 1_A)f(x, 1_A) = (f(x'))_A(f(x))_A = (\bar{f}(x')\bar{f}(x))_A$. Montrons que $e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\bar{f} \times 1_{\mathbf{A}}) = f$. En effet, pour tout $(X, A) \in |\mathbf{X} \times \mathbf{A}|$, $e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f \times 1_{\mathbf{A}})(X, A) = e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f(X), A) = f(X)(A) = f(X, A)$ et pour tout $x \in \mathbf{X}(X, X')$ et $a \in \mathbf{A}(A, A')$, on a $e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f \times 1_{\mathbf{A}})(x, a) = e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\bar{f}(x), a) = \bar{f}(X)(a)f(x))_A = f(1_X, a)f(x, 1_A) = f((1_X, a)(x, 1_A)) = f(x, a)$.

Si $f' : \mathbf{X} \to \mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ est un autre foncteur tel que $e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f' \times 1_{\mathbf{A}}) = f$ alors $f' = f$. Pour tout $X \in |\mathbf{X}|$, $f'(X) = f(X)$ car pour tout $A \in |\mathbf{A}|$, $f(X)(A) = f(X, A) = e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f' \times 1_{\mathbf{A}})(X, A) = e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f'(X), A) = f'(X)(A)$ et pour tout $a \in \mathbf{A}(A, A')$ on a :

$$\overline{f}(X)(a) = f(1_X, a) = e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f' \times 1_{\mathbf{A}})(1_X, a) = e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f'(1_X), a) =$$
$$= f'(X)(a)(f'(1_X))_A = f'(X)(a)\, 1_{f'(X)(A)} = f'(X)(a).$$

Pout tout $x \in \mathbf{X}'(X, X)$, $f'(x) = \overline{f}(x)$, car pour tout $A \in |\mathbf{A}|$ on a : $(\overline{f}(x))_A = f(x, l_A) = e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f' \times 1_{\mathbf{A}})(x, 1_A) = e_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f'(x), 1_A) = f'(X')(1_A)(f'(x))_A = 1_{f'(X')(A)}(f'(x))_A = (f'(x))_A$.

Tout ensemble préordonné (resp. ordonné) $(E, \leqslant)$ peut être considéré comme une catégorie et toute application monotone d'ensembles préordonnés (resp. ordonné) comme un foncteur covariant. Notons Préord la catégorie des ensembles préordonnés et Ord la sous-catégorie pleine définie par les ensembles ordonnés. Montrons que Ord est une sous-catégorie réflective de Préord.

Si $(E, \leqslant)$ est un ensemble préordonné alors $R = \{(x, y) \in E \times E / x \leqslant y$ et $y \leqslant x\}$ est le graphe d'une relation d'équivalence sur E compatible avec la relation de préordre dans le sens que si $(x, x') \in R$ et $(y, y') \in R$, alors $x \leqslant y$ ssi $x' \leqslant y'$.

Donc on peut introduire sur l'ensemble quotient $E/R = \overline{E}$ une relation de préordre "$\leqslant$" en définissant $\overline{x} \leqslant \overline{y}$ ssi $x \leqslant y$ qui en fait est une relation d'ordre. L'application canonique

$$p : (E, \leqslant) \to (\overline{E}, \leqslant), \quad (x \to \overline{x})$$

est monotone et surjective. On a donc un épifoncteur $p : (E, \leqslant) \to (\overline{E}, \leqslant)$ qui est pleinement fidèle car $x \leqslant y$ ssi $\overline{x} \leqslant \overline{y}$ c'est-à-dire p est une équivalence de catégories. La catégorie $(\overline{E}, \leqslant)$ n'est rien d'autre que le squelette de la catégorie $(E, \leqslant)$.

De la propriété universelle de $(\overline{E}, \leqslant)$, il résulte que l'association $E \rightsquigarrow \overline{E}$ définit un foncteur R : Préord $\to$ Ord, adjoint à gauche du foncteur d'inclusion Ord $\to$ Préord et par suite Ord est une sous-catégorie pleine reflective de Préord.

On vérifie aisément que R commute avec les produits directs. Préord est une sous-catégorie pleine réflective de Cat (= la catégorie des petites catégorie) où le foncteur réflecteur R' : Cat $\to$ Préord associe à toute catégorie $\mathbf{C}$ l'ensemble préordonné $(R'\mathbf{C}, \leqslant)$ dont les éléments sont les objets de $\mathbf{C}$ et où $X \leqslant Y$ ssi $\mathbf{C}(X, Y) \neq \varnothing$.

Le foncteur R' commute avec les produits directs finis car si $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ sont deux petites catégories alors $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}')((X, Y), (X', Y')) = \mathbf{C}(X, X') \times \mathbf{C}(Y, Y')$ et par suite $(X, Y) \leqslant (X', Y')$ ssi $X \leqslant X'$ et $Y \leqslant Y'$.

Comme Préord admet des limites projectives et inductives il résulte que Préord est une sous-catégorie cartésienne de Cat ; de même, Ord admet des limites projectives et inductives et puisque R commute avec les produits directs il résulte que Ord est une sous-catégorie cartésienne de Préord et par suite de Cat.

Soit $P = RR'$: Cat $\xrightarrow{R'}$ Préord $\xrightarrow{R}$ Ord et pour toute catégorie $\mathbf{C}$ soit $\theta : \mathbf{C} \xrightarrow{\theta_1} R'\mathbf{C} \xrightarrow{\theta_2} P\mathbf{C}$ le foncteur canonique, où θ_1 est le foncteur plein et bijectif sur les objets et θ_2 une équivalence de catégories. Si $\mathbf{C}$ est une catégorie cartésienne, alors $P(\mathbf{C})$ l'est aussi ; puisque θ_2 est une équi-

valence de catégories il suffit de montrer que $R'(\mathbf{C})$ est une catégorie cartésienne. Il est évident que $R'(\mathbf{C})$ admet des limites projectives et inductives finies puique $\mathbf{C}$ en admet. $R'(\mathbf{C})$ admet aussi l'exponentiation car $B \times A \leqslant C$ ssi $\mathbf{C}(B \times A, C) \neq \varnothing$ ssi $\mathbf{C}(B, C^A) \neq \varnothing$ ssi $B \leqslant C^A$. Puisque $(\coprod_{i=1}^{n} A_i) \leqslant X$ ssi $\mathbf{C}(\coprod_{i=1}^{n} A_i, X) \neq \varnothing$ ssi $\prod_{i=1}^{n} (A_i, X) \neq \varnothing$ ssi $\mathbf{C}(A_i, X) \neq \varnothing$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ssi $A_i \leqslant X$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et de même, $X \leqslant \prod_{i=1}^{n} A_i$ ssi $X \leqslant A_i$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, il résulte que θ_1 commute avec les sommes directes finies, aux produits directs finis et à l'exponentiation.

4.06. *La catégorie cartésienne des coalgèbres d'une catégorie cartésienne sur un cotriple exact à gauche.*

Soient $\mathbf{C}$ une catégorie cartésienne et $G = (G, \eta, \delta)$ un cotriple exact à gauche (c.à.d. que G commute aux limites projectives finies) sur $\mathbf{C}$. La catégorie $\mathbf{C}_G$ des G-coalgèbres de $\mathbf{C}$ est une catégorie cartésienne.

a) $\mathbf{C}_G$ admet des limites projectives finies. Soit $F : I \to \mathbf{C}_G$ un foncteur défini sur une catégorie finie I et soit $F(i) = (X_i, \xi_i)$, $i \in I$. Du fait que G commute avec les limites projectives finies, il résulte que si $(X ; p_i) = \varprojlim_{i \in I} X_i$ dans $\mathbf{C}$, il existe un isomorphisme unique $\theta : G(X) \to \varprojlim_{i \in I} G(X_i)$ tel que $\pi_i \theta = G(p_i)$, $\forall i \in I$, où $\pi_i : \varprojlim_{i \in I} G(X_i) \to G(X_i)$, $i \in I$, sont les morphismes de structure de la limite projective.

Si $\theta' : X \to \varprojlim_{i \in I} G(X_i)$ est l'unique morphisme tel que $\pi_i \theta' = \xi_i p_i$, $\forall i \in I$, alors on vérifie aisément que $(X, \xi = \theta^{-1}\theta')$ est une $\mathbf{G}$-coalgèbre et $((X, \xi) ; p_i) = \varprojlim_{i \in I} (X_i, \xi_i)$.

De la construction des limites projectives finies dans $\mathbf{C}_G$, il résulte que le foncteur d'oubli $U_{\mathbf{C}} : \mathbf{C}_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ est exact à gauche. Si $\omega_{G(1)} : G(1) \xrightarrow{\sim} 1$ est l'isomorphisme canonique, $(1, (\omega_{G(1)})^{-1})$ est un objet final de $\mathbf{C}_G$.

b) $\mathbf{C}_G$ admet des limites inductives finies. Si $\alpha_{G(0)} : U \to G(0)$ est l'unique morphisme possible, $(0, \alpha_{G(0)})$ est un objet initial de $\mathbf{C}_G$. Si (X_1, θ_1), (X_2, θ_2) sont deux objets de $\mathbf{C}_G$ et si nous considérons dans $\mathbf{C}$ les sommes directes $(s_1, s_2 ; X_1 \coprod X_2)$, $(S_1, S_2 ; G(X_1) \coprod G(X_2))$, alors il existe un morphisme unique $\theta_1 \coprod \theta_2 : X_1 \coprod X_2 \to G(X_1) \coprod G(X_2)$ tel que $\theta_1 \coprod \theta_2) s_i = S_i \theta_i$, $i = 1, 2$ et aussi un morphisme unique $\theta : G(X_1) \coprod G(X_2) \to G(X_1 \coprod X_2)$, tel que $\theta S = G(s_i)$, $i = 1, 2$. On vérifie aisément que $(s_1, s_2 ; (X_1 \coprod X_2, \theta(\theta_1 \coprod \theta_2)) = (X_1, \theta_1) \coprod (X_2, \theta_2)$ dans $\mathbf{C}_G$.

Si $f, g : (X_1, \theta_1) \to (X_2, \theta_2)$ sont deux morphismes de $\mathbf{C}_G$ et si $(q, Q = \operatorname{coker}(f, g)$ dans $\mathbf{C}$, il existe un morphisme unique $\theta : Q \Gamma GQ$ tel que $\theta q = G(q)\theta_2$ et on vérifie aisément que $(q ; (Q, \theta)) = \operatorname{coker}(f, g)$ dans $\mathbf{C}_G$.

c) $\mathbf{C}_G$ admet de l'exponentiation. Quels que soient les objets X et Y de $\mathbf{C}$, nous noterons $\theta(X, Y) : G(X) \times G(Y) \to G(X \times Y)$ l'isomorphisme canonique fonctoriel donné par l'exactitude à gauche du foncteur G. Soient (A, α) et (B, β) deux G-coalgèbres dans $\mathbf{C}$ et soit $\hat{s} : G(A^B) \to G(A)^{G(B)}$

le morphisme qui correspond par l'adjonction cartésienne au morphisme $s: G(A^B) \times G(B) \xrightarrow[\sim]{\theta(A^B, B)} G(A^B \times B) \xrightarrow{G(e_{A,B})} GA$ c.a.d. l'unique morphisme tel que $e_{GA, GB}(\hat{s} \times 1_{GB}) = s$.

Si $(C, k) = \ker (G(\alpha^B), G(G(A)^\beta))$ $G(\hat{s})$ δ_B^A), alors de l'exactitude à gauche de G, il résulte que $(G(C), G(k)) = \ker (G^2(\alpha^B), G^2((G(A))^\beta$ $G^2(\hat{s})$ $G(\delta_{A^B}))$ et de $G^2(\alpha^B)\, \delta_{A^B} k = \delta_{(G(A))^B} G(\alpha^B)\, k = \delta_{(G(A))^B} G((GA)^\beta)\, G(\hat{s})\, \delta_{A^B}\, k = G^2((GA)^\beta) \delta_{(GA)^{GB}} G(\hat{s})\, \delta_{A^B}\, k = G^2((GA)^\beta)\, G^2(\hat{s})\, \delta_{G(A^B)}\, \delta_{A^B} k = G^2((GA)^\beta G^2(\hat{s}) G(\delta_{A^B})\, \delta_{A^B} k$ il résulte un morphisme unique $\gamma: C \to GC$ tel que $G(k)\gamma = \delta_{A^B} k$. Montrons que (C, γ) est une G-coalgèbre et que $(C, \gamma) = (A, \alpha)^{B, \beta}$. Le fait que (C, γ) est une G-coalgèbre résulte des égalités suivantes $k\eta_C \gamma = \eta_{G(A^B)}\, G(k)\, \gamma = \eta_{G(A^B)}\, \delta_{A^B} k = 1_{G(A^B)} k = k = k 1_C$; $G^2(k)\, G(\gamma)\, \gamma = G(\delta_{A^B})\, G(k)\, \gamma = G(\delta_{A^B})\, \delta_{A^B}\, k = \delta_{G(A^B)}\, \delta_{A^B}\, k = \delta_{G(A^B)}\, G(k)\, \gamma = G^2(k)\, \delta_C\, \gamma$, compte tenu du fait que k et $G^2(k)$ sont des monomorphismes.

Montrons maintenant que si (L, λ) est une G-coalgèbre il existe un isomorphisme :

$$\mathbf{C}_G((L, \lambda)\, (B, \beta), \quad (A, \alpha)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}_G((L, \lambda), (C, \gamma).$$

Si $u: (L, \lambda) \times (B, \beta) \to (A, \alpha)$ est un morphisme de G-coalgèbre, on a un morphisme $u: L \times B \to A$ dans $\mathbf{C}$ et par suite, par l'adjonction cartésienne, un morphisme $\hat{u}: L \to A^B$, c.à.d. l'unique morphisme tel que $e_{A,B}(\hat{u} \times 1_B) = u$. Puisque u est un morphisme de G-coalgèbres on a l'égalité $\alpha u = G(u)\, \theta(L, B)\, (\lambda \times \beta)$ qui, par l'adjonction cartésienne, se transforme en l'égalité $\alpha^B\, \hat{u} = (GA)^\beta\, \widehat{G(u)}\, \lambda$, où $\widehat{G(u)}$ est leimorphisme qui correspond à $G(u)$ par l'adjonction cartésienne, c.à.d. l'unique morphisme tel que $e_{GA, GB}(\widehat{G(u)} \times 1_{GB}) = G(u)\, \theta(L, B)$. De $e_{A,B}(\hat{u} \times 1_B) = u$ et du fait que G commute avec les produits directs, il résulte que $G(u)\, \theta\, (L, B) = G(e_{A,B})\, G(\hat{u} \times 1_B)\, \theta(L, B) = G(e_{A,B})\, \theta(A^B, B)\, (G(\hat{u}) \times 1_{G(B)}) = s(G(\hat{u}) \times 1_{G(B)})$ d'où, par l'adjonction cartésienne, $\widehat{G(u)} = \hat{s}\, G(\hat{u})$.

De $G(\alpha^B)\, G(\hat{u})\, \lambda = G((GA)^\beta)\, G(\widehat{G(u)})\, G(\lambda)\lambda = G((GA)^\beta)\, G(\widehat{G(u)})\, \delta_L\, \lambda = G((GA)^\beta)\, G(\hat{s})\, G^2(u)\, \delta_L\, \lambda = G((GA)^\beta)\, G(\hat{s})\, \delta_A\, G(\hat{u})\, \lambda$ et de la propriété universelle du noyau de double flèche, il existe un morphisme unique $v: L \to C$ tel que $kv = G(\hat{u})\, \lambda$. De $G(k)\, \gamma\, v = \delta_{A^B} kv = \delta_{A^B} G(\hat{u})\, \lambda = G^2(\hat{u})\, \delta_D\, \lambda = G^2(\hat{u})\, G(\lambda)\, \lambda = G(k)\, G(v)\, \lambda$ et du fait que $G(k)$ est monomorphisme, il résulte que $v \in \mathbf{C}_G((L, \lambda), (G, \gamma))$.

Réciproquement, soient $v: (L, \lambda) \to (C, \gamma)$ un morphisme de G-coalgèbres, $\hat{u} = \eta_{A^B} kv: L \to A^B$ et $u: L \times B \to B$ le morphisme qui correspond à $\hat{u}$ par l'adjonction cartésienne, c.à.d. $u = \hat{\eta}_{A^B}(k \times 1_B)\, (v \times 1_B)$ où $\hat{\eta}_{A^B}$ est le morphisme qui correspond à η_{A^B} par l'adjonction cartésienne. Montrons que $u: (L, \lambda) \times (B, \beta) \to (A, \alpha)$ est un morphisme de G-coalgèbres, c.à.d. $\alpha u = G(u)\, \theta\, (L, B)\, (\lambda \times \beta)$.

De $e_{A,B}(\eta_{A^B} \times 1_B) = \hat{\eta}_{A^B}$ et du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G^2(A^B) \times G(B) \arrow[r, "\theta(G(A^B)\, B)", "\sim"'] \arrow[d, "G(\eta_{A^B}) \times 1_{G(B)}"'] & G(G(A^B \times B) \arrow[d, "G(\eta_{A^B} \times 1_B)"] \\
G(A^B) \times G(B) \arrow[r, "\theta(A^B, B)", "\sim"'] & G(A^B \times B)
\end{tikzcd}$$

il résulte que $G(\hat{\eta}_{A^B})\, \theta\, (G\, (A^B), \quad B)\, (\delta_{A^B} \times 1_{G(B)}) = G(e_{A,B})\, G(\eta_{A^B} \times 1_B)\, \theta\, (G(A^B), \quad B))\, (\delta_{A^B} \times 1_{G(B)}) = G\, (e_{A,B})\, \theta\, (A^B, \quad B)\, (G\, (\eta_{A^B}) \times 1_{G(B)})\, ((\delta_{A^B} \times 1_{G(B)}) = G(e_{A,B})\, \theta\, (A^B, B)\, (1_{G(A^B)} \times 1_{G(B)}) = G(e_{A,B})\, \theta\, (A^B, \quad B)\, 1_{G(A)^B \times G(B)} = G(e_{A,B})\, \theta(A^B, B)$.

De $\alpha^B \eta_{A^B} k = \eta_{(GA)^B} G(\alpha^B) k = \eta_{GA^B} G(G(A)^\beta) G(\hat{s}) \delta_{A^B} k = G(A)^\beta \eta_{(GA)^{GB}}\, G(\hat{s})\, \delta_{A^B} k = G(A)^\beta \hat{s} \eta_{G(A^B)}\, \delta_{A^B} k = G(A)^\beta \hat{s}\, 1_{G(A^B)} k = G(A)^\beta \hat{s} k$ il résulte, par l'adjonction cartésienne, que $\alpha\, \hat{\eta}_{A^B}(k \times 1_B) = G(e_{A,B})\, \theta\, (A_G, B)\, (1_{G(A^B)} \times \beta)\, (k \times 1_B) = G(\eta_{A^B})\, \theta\, (G(A^B), B)\, (\delta_{A^B} \times 1_{GB})\, (1_{G(A^B)} \times \beta)\, (k \times 1_B) = G(\hat{\eta}_{A^B})\, \theta\, (G(A^B), B)\, (\delta_{A^B} \times \beta)\, (k \times 1_B)$. De ces égalités il résulte l'égalité demandée car :

$$\begin{aligned}
\alpha u &= \alpha \hat{\eta}_{A^B}(k \times 1_B)(v \times 1_B) = G(\hat{\eta}_{A^B})\, \theta\, (G(A^B), B)(\delta_{A^B} \times \beta)(k \times 1_B)(v \times 1_B) = \\
&= G(\hat{\eta}_{A^B})\, \theta\, (G(A^B), \quad B)\, (G(k)\, \gamma \times \beta)\, (v \times 1_B) = G(\hat{\eta}_{A^B})\, \theta\, (G(A^B), \quad B)\, (G(k) \times \\
&\times 1_{G(B)})\, (\gamma \times \beta)\, (v \times 1_B) = G\, (\hat{\eta}_{A^B})\, \theta\, (G\, (A^B), B)\, (G\, (k) \times 1_{G(B)})\, (\gamma v \times \beta) = \\
&= G(\hat{\eta}_{A^B})\, \theta(G(A^B), B)\, (G(k) \times 1_{G(B)})\, (G(v)\, \lambda \times \beta = G(\hat{\eta}_{A^B})\, \theta\, (G(A^B), \\
&B)\, (G(k) \times 1_{G(B)})\, (G(v) \times 1_{G(B)})\, (\lambda \times \beta) = G(u)\, \theta\, (L, B)\, (\lambda \times \beta).
\end{aligned}$$

Montrons que les deux applications construites ci-dessus sont inverses l'une de l'autre.

Si l'on part avec $u: (L, \lambda) \times (B, \beta) \to (A, \alpha)$, alors $v: (L, \lambda \to (C, \gamma)$ est l'unique morphisme tel que $kv = G(\hat{u})\, \lambda$ et en revenant, nous obtenons le morphisme $u' = \hat{\eta}_{A^B}(k \times 1_B)\, (v \times 1_B)$ auquel, par l'adjonction cartésienne, il correspond le morphisme $\eta_{A^B} kv$. Donc pour montrer que $u = u_t$, il suffit de vérifier que $\hat{u} = \eta_{A^B}\, kv$, fait évident car $\eta_{A^B}\, kv = \eta_{A^B} G(\hat{u})\lambda = \hat{u} \eta_L \lambda = \hat{u}\, 1_L = \hat{u}$. Si l'on part avec $v: (L, \lambda) \to (C, \gamma)$, $u: (L, \lambda) \times (B, \beta) \to (A, \alpha)$ est défini comme étant le morphisme qui correspond par l'adjonction cartésienne au morphisme $\hat{u} = \eta_{A^B} kv$ et, en revenant, nous obtenons le morphisme $v': (L, \lambda) \to (C, \gamma)$, qui est défini comme étant l'unique morphisme tel que $kv' = G(\hat{u})\, \lambda$ et donc, pour montrer que $v = v'$ il suffit de vérifier que $kv = G(\hat{u})\lambda$, fait évident car $G(\hat{u})\lambda = G(\eta_{A^B})\, G(k)\, G(v)\lambda = G(\eta_{A^B})\, G(k)\, \gamma v = G(\eta_{A^B})\, \delta_{A^B} kv = kv$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ale caractère fonctoriel de la bijection construite ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Freyd — *Aspects of Topoi*, Bull. Aust. Math. Soc. 7 (1973), pp. 1—76.
2. F. W. Lawvere — *Functorial semantics of algebraic theories* Dissertation, Columbia University, New York, 1963.
3. Radu Alexandru, — *Sur les topos de Giraud-Grothendieck*. Ann. Fac. Sci. de Kinshasa (Zaïre), Section Math. Phys. 2, (1976).
4. Wraith G. C. — *Lectutes on elementary Topoi*, in: Springer Lecture Notes, 445, 1975.
5. Lavendhomme R., *Topos de Lawvere-Tiérnéy*, Séminaire de Mathématique pure, Université Catholique de Louvain, 1972.

Received 1. VI. 1978

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 1

REMARQUES SUR LES FONCTEURS D'INTÉRIEUR ET SUR LES IDÉAUX DANS UNE CATÉGORIE

PAR

I. TOFAN

Cette Note a pour but de développer, dans le cadre de la théorie des catégories, quelques notions de la théorie des demigroupes. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $|\mathcal{C}|$ la classe de ses objets et $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X à Y $(X, Y \in |\mathcal{C}|)$.

1. Soient $|\mathcal{C}'|$ une sousclasse de $|\mathcal{C}|$ et pour chaque $X, Y \in |\mathcal{C}'|$, un sousensemble $\mathcal{C}'(X, Y)$ de $\mathcal{C}(X, Y)$. Le couple constitué par $|\mathcal{C}'|$ et par la famille d'ensembles $\{\mathcal{C}'(X, Y)/X, Y \in |\mathcal{C}'|\}$ sera nommé partie de $\mathcal{C}$. Les objets de $|\mathcal{C}'|$ sont nommés objets de la partie et les éléments de $\mathcal{C}'(X, Y)$, pour tous $X, Y \in |\mathcal{C}'|$, flèches de la partie. En donnant les parties $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ d'une catégorie $\mathcal{C}$, nous disons que $\mathcal{C}'$ est inclus dans $\mathcal{C}''$ $(\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}'')$ si $|\mathcal{C}'| \subseteq |\mathcal{C}''|$ et $\mathcal{C}'(X, Y) \subseteq \mathcal{C}''(X, Y)$ pour tous $X, Y \in |\mathcal{C}'|$; nous définissons $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''$ (l'intersection) et $\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$ (l'union des parties) par $|\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''| = |\mathcal{C}'| \cap |\mathcal{C}''|$, $(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'')(X, Y) = \mathcal{C}'(X, Y) \cap \mathcal{C}''(X, Y)$ pour tous $X, Y \in |\mathcal{C}'| \cap |\mathcal{C}''|$ et respectivement $|\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''| = |\mathcal{C}'| \cup |\mathcal{C}''|$,

$$(\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}'')(X, Y) = \begin{cases} \mathcal{C}'(X, Y) \text{ si } X, Y \in |\mathcal{C}'|, X \text{ et (ou) } Y \notin |\mathcal{C}''|; \\ \mathcal{C}''(X, Y) \text{ si } X, Y \in |\mathcal{C}''|, X \text{ et (ou) } Y \notin |\mathcal{C}'|; \\ \mathcal{C}'(X, Y) \cup \mathcal{C}''(X, Y), \text{ si } |\mathcal{C}'| \cap |\mathcal{C}''| \text{ n'est pas la classe vide et } X, Y \in |\mathcal{C}'| \cap |\mathcal{C}''|; \\ \varnothing \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

(Pour éviter l'introduction de nouvelles conventions nous supposerons que, si on ne fait pas d'autres précisions, les intersections $|\mathcal{C}'| \cap |\mathcal{C}''|$ qui interviennent dans la définition de $\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$ ne conduisent pas à la classe vide).

Définition 1. *Un idéal à droite [gauche] de la catégorie $\mathcal{C}$ est une partie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$, qui satisfait à la condition suivante: pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$ et toute flèche g de $\mathcal{C}'$ si f, g, sont composables $f.g$ [$g.f$] alors $f.g$ [$g.f$] est flèche de $\mathcal{C}'$ (il en résulte que la source [l'adresse] de f est contenue dans $\mathcal{C}'$). Un idéal qui est en même temps à droite et à gauche sera nommé idéal bilatère.*

La notion d'idéal a été introduite dans la théorie des catégories par R. Lavendhomme [2] pour l'ensemble des morphismes d'une petite catégorie, considerée comme groupoïde généralisé. Beaucoup