Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f 1

CONFIGURATIONS MYLLER $\mathfrak{M}(C\,;\,\xi_1^i,\,\xi_2^i,\,T^{n-1})$ DANS DES ESPACES RIEMANNIENS

PAR

A. ROMAN

Dans [1], R. Miron a étudié une configuration avec des éléments: une courbe (C) — aux points de laquelle il a défini une direction de vecteur unitaire ξ^i situé dans un espace linéaire T^{n-1}. Par induction il a établi pour cette configuration les équations du mouvement dans lesquelles interviennent des invariants, dont il a démontré qu'ils forment un système complet. Aussi, il introduit et étudie le parallélisme et la conjugaison des directions.

Dans cette Note nous nous proposons d'étudier dans l'espace riemannien V_n une configuration constituée par une courbe (C) aux points de laquelle sont définies deux directions orthogonales de vecteurs unitairs ξ_1^i, ξ_2^i situés dans un espace linéaire $T_{(x)}^{n-1}$). Nous avons nommé configuration Myller l'ensemble $\mathfrak{M}(C\,;\,\xi_1^i,\,\xi_2^i\,;\,T^{n-1})$. Nous allons associer intrinsèquement un repère et un système d'invariants et nous allons démontrer qu'il est complet.

Partons de $\xi_1^i(s)$ défini sur un interval $(s_1,\,s_2)$; comme il a un caractère géométrique, son vecteur dérivé a aussi un caractère géométrique. Ainsi, nous considérons le vectour $\dfrac{\nabla\xi_1^i}{ds}$ et nous le projetons sur T^{n-1} et sur son espace normal n^i

$$\frac{\nabla\xi_1^i}{ds} = a^i + T_1\,n^i,\quad a^i \in T^{n-1},$$

Prenons la projection de a^i sur le plan $T^2(\xi_1^i,\,\xi_2^i)$ et sur l'espace complémentaire normal en T^{n-1}.

$$a^i = \alpha\xi_1^i + G_1\,\xi_2^i + a_1^i\,.$$

On dénote la longueur et le vecteur unitaire de a_1^i respectivement par $G_1 \geqslant 0$, ξ_3^i. Le coefficient α est égal à zéro parce que ξ_1^i est un vecteur unitaire. On trouve alors:

$$\frac{\nabla\xi_1^i}{ds} = G_1\,\xi_2^i + G_2\,\xi_3^i + T_1\,n^i,\ (G_2 \geqslant 0)\,;$$

G_1, G_2, T_1 sont les invariants de la famille $(\xi_1^i,\,\xi_2^i)$ de $\mathfrak{M}$. Nous procédons de la même façon avec ξ_2^i. On décompose le vecteur $\dfrac{\nabla\xi_2^i}{ds}$ d'après

ξ_1^i, ξ_2^i, ξ_3^i, d'après son espace complémentaire normal situé en T^{n-1}, et d'après n^i. Nous obtenons

$$\frac{\nabla \xi_2^i}{ds} = -G_1 \xi_1^i + G_3 \xi_3^i + G_4 \xi_4^i + T_2 n^j \ (G_4 \geqslant 0).$$

Par induction, dans l'hypothèse $G_{2a} \neq 0$, on trouve les équations :

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\nabla \xi_2^i}{ds} &= -G_{2(a-2)} \xi_{a-2}^i - G_{2(a-3)} \xi_{a-1}^i + G_{2(a-1)} \xi_{a-1}^i + G_{2a} \xi_{a+2}^i + T_a n^i \\ \frac{\nabla n^i}{ds} &= -T_1 \xi_1^i - T_2 \xi_2^i - \dots - T_{n-1} \xi_{n-1}^i \end{aligned}$$

dans lesquelles $a = 1, 2, \dots, n-1$; $G_{-2} = G_{-1} = G_0 = G_{2(n-2)} = G_{2n-3} = G_{2n-2} = 0$.

Les fonctions G_{2k} $(k = 1, 2, \dots, n-4)$ sont positives, et toutes les autres fonctions ont des signes arbitraires. La direction du vecteur unitaire ξ_{n-1}^i est telle que

$$\sqrt{g} \cdot \det(\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_{n-1}^i, n^i) = 1.$$

Le repère est fixé à l'étape $n-3$, donc l'ordre du repère est $n-3$. Compte tenu de la manière dont nous avons trouvé le repère $T(M; \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_{n-1}^i, n^i)$, il résulte qu'il est intrinsèquement lié à la variété. Pour le vecteur unitaire t^i de la tangente à la courbe (C) nous avons :

$$(2) \quad \frac{dx^i}{ds} = t^i = \alpha^1 \xi_1^i + \alpha^2 \xi_2^i + \dots + \alpha^{n-1} \xi_{n-1}^i + \alpha^n n^i, \ \{(\alpha^1)^2 + \dots + (\alpha^n)^2 = 1\},$$

$\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ étant des invariants.

Dans les cas général, les résultats obtenus peuvent être exprimé par le :

Théorème. *A n'importe quelle configuration $\mathfrak{M}(C; \xi_1^i; \xi_2^i; T^{n-1})$ de l'espace riemannien V_n, on peut associer un système d'invariants, G, T, α et un repère T orthonormé, invariant, liés par les rélations* (1) *et* (2).

En ce qui concerne la réciproque, on peut considérer deux situations, d'après ce que l'on connait ou non la courbe (C). Pour la deuxième, correspondant au système (1) nous avons :

Théorème. *Si on donne :*

1) *Les fonctions de s : $G_{2a} > 0$ $(a = 1, 2, \dots, n-4)$, G_{2a-1} $(a = 1, \dots n-3)$, $G_{2(n-3)}$ $T_1, T_2, \dots, T_{(n-1)}$, $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ $\{(\alpha^1)^2 + \dots + (\alpha^4)^2 = 1\}$ définies et continues sur l'interval (s_1, s_2).*

2) *les conditions initiales :*

$$x^i(s_0) = x_0^i, \ \xi_k^i(s_0) = \xi_{k_0}^i, \ (k = 1, \dots, n-1), \ n^i(s_0) = n_0^i, \ s_0 \in (s_1, s_2)$$

telles que :
$(\xi_{10}^i \dots \xi_{n-10}^i, n_0^i)$ est formé de vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux et positivement orientés ; il existe, locallement une seule configuration $\mathfrak{M}(C; \xi_1^i, \xi_2^i, T^{n-1})$ telle que la famille (ξ_1^i, ξ_2^i) admet comme invariants les fonctions 1) *et qui vérifie les conditions* 2).

Démonstration. Compte tenu de l'expression de l'opérateur de dérivation covariante

$$\frac{\nabla v^i}{ds} = \frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dx^k}{ds},$$

le système (1), (2) devient

$$(3) \quad \begin{aligned} &\frac{d\xi_a^i}{ds} + G_{2(a-2)} \xi_{a-2}^i + G_{2a-3} \xi_{a-1}^i + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^k}{ds} \xi_a^j - G_{2a-1} \xi_{a+1}^i - G_{2a} \xi_{a+2}^i - \\ &- T^i n_i = 0, \\ &\frac{dn^i}{ds} + T_1 \xi_1^i + T_2 \xi_2^i + \dots + T_{n-1} \xi_{n-1}^i + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^k}{ds} n^j = 0, \\ &\frac{dx^i}{ds} - \alpha^1 \xi_1^i - \alpha^2 \xi_2^i - \dots - \alpha^{n-1} \xi_{n-1}^i - \alpha^n n^i = 0, \end{aligned}$$

dans lequel $a = 1, 2, \dots, n-1$; $G_{-2} = G_{-1} = G_0 = G_{2(n-2)} = G_{2(n-3)} = G_{2(n-1)} = 0$. En substituant dx^i/ds donné par la dernière équation dans les premières, nous obtenons un système de la forme :

$$(3') \quad \frac{d\xi_a^i}{ds} = f_a^i(\xi(x), \xi, n); \ \frac{dn^i}{ds} = g^i(\xi(x), \xi, n); \ \frac{dx^i}{ds} = h^i(\xi(x), \xi, n).$$

Les équations (3′) forment un système de $n(n-1)$ équations différentielles du première ordre sous forme normale, les fonctions inconnues étant x^i et les composantes des vecteurs ξ_a^i, n^i. On peut dire aussi qu'en substituant dans les deux premières équations dx^i/ds donné par la dernière, nous obtenons n systèmes normaux avec n fonctions inconnues, qui s'obtiennent pour $i = 1, 2, \dots, n$. De l'hypothèse 1) et du fait que des fonctions f_a^i, g^i, h^i sont de classe $C^k (k \geqslant 1)$ dans les fonctions inconnues, il résulte que f_a^i, g^i, h^i sont continues en tous leurs arguments. Il résulte qu'elles sont bornées pour $s_0 - a \leqslant s \leqslant s_0 + a$ $(a > 0)$, si $[s_a - a, s_0 + a] \subset (s_1, s_2)$, et n'importe quelles valeurs finies de x^i et des composantes des vecteurs ξ_a^i, n^i. De plus, les fonctions f_a^i, g^i, h^i sont différentiables par rapport aux fonctions inconnues et donc elles sont lipschitziennes. Soit $M = \sup(|f_a^i|, |g^i|, |h^i|)$. On constate que dans les conditions (1) et (2) le système (3) vérifie toutes les conditions du théorème d'existence et d'unicité. Soit $x^i(s)$, $\xi_a^i(s)$, $n^i(s)$ la solution.

Pour vérifier si pour $s \neq s_0$, $s_0 \in (s_0 - a, s_0 + a)$, les vecteurs $\xi_a^i(s)$, $n_a^i(s)$. sont des vecteurs unitaires et orthogonaux deux à deux, on considère la solution $x^i(s)$, $\xi_a^i(s)$, $n^i(s)$ et on forme les fonctions $g_{ij} \xi_a^i(s) \xi_a^j(s)$, $g_{ij} n^i(s) n^j(s)$, $g_{ij} \xi_a^i \xi_b^j (a \neq b)$, $g_{ij} \xi_a^i(s) n^j(s)$ $(a, b = 1, 2, \dots, n-1)$ qui en vertu de l'hypothèse 2), pour $S = S_0$ deviennent

$$(4) \quad \begin{cases} g_{ij}^0 \xi_a^i(s_0) \xi_a^j(s_0) = g_{ij}^0 n^i(s_0) n^j(s_0) = 1 \\ g_{ij}^0 \xi_a^i(s_0) \xi_b^i(s_0) = g_{ij}^0 (\xi_a^i(s_0) n^j(s_0) = 0 \ (a \neq b, a, b = 1, 2, \dots, n-1). \end{cases}$$

Maintenant, en prenant les différentielles des fonctions construites et compte tenu des équations (1) et (3) on obtient un système, dont les inconnues sont

$$(5) \quad g_{ij} \xi_a^i \xi_a^j, \ g_{ij} n^i n^j, \ g_{ij} \xi_a^i \xi_b^j, \ g_{ij} \xi_a^i n^j,$$

et qui satisfait aux conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution; on observe qu'une solution de ce système est

(6) $(g_{ij}\,\xi^i_a\,\xi^j_a)(s) = (g_{ij}\,n^i\,n^j)(s) = 1,\ (g_{ij}\,\xi^i_a\,\xi^j_b)(s) = (g_{ij}\,\xi^i_a\,n^j)(s) = 0\ (a \neq b)$

qui satisfait aussi à la condition (4). De même, la solution unique $x^i(s)$, $\xi^i_a(s)$, $n^i(s)$ du système (3) satisfait aux conditions (4). Avec cette solution unique du système (3), on forme les fonctions (5) qui, évidemment satisfont à (6). Maintenant, en substituant cette solution dans la dernière équation (3) nous obtenons par quadratures, les équations de la courbe (C).

Le paramètre s est naturel, comme il résulte des egalités

$$\int_{s_0}^{s_1} \sqrt{x^2(s)}\, ds = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{g_{ij}\,l^i\,l^j}\, ds = \int_{s^0}^{s_1} ds = s_1 - s_0$$

Donc, dans les conditions 1) et 2) du théorème nous avons déterminé une configuration $\mathfrak{M}(C;\ \xi^i_1,\ \xi^i_2,\ T^{n-1})$ unique, pour laquelle les vecteurs orthogonaux $\xi^i_1, \xi^i_2, \ldots, \xi^i_{n-1}$ déterminent pour tous $s \in (s_0 - a,\ s_0 + a)$ l'espace T^{n-1}; le vecteur unitaire n^i est normal à cet espace; $(\xi^i_1, \xi^i_2, \ldots, \xi^i_{n-1}, n^i)$ forment un repère positivement orienté, et les fonctions G, T et α sont invariantes.

Ainsi, le théorème est demontré et montre que les invariants G, T, α forment un système complet.

Dans la première situation, quand la courbe (C) est donnée, le système (3) devient linéaire.

Cas particulier, $n = 3$. Les équations (1) et (2) prennent la forme

$$\frac{\nabla \xi^i_1}{ds} = k_g\,\xi^i_2 + k_n\,n^i,$$

$$\frac{\nabla \xi^i_2}{ds} = -k_g\,\xi^i_1 + T_g\,n^i, \tag{6}$$

$$\frac{\nabla h^i}{ds} = -k_n\,\xi^i_1 - T_g\,\xi^i_2,$$

et respectivement

$$\frac{dx^i}{ds} = \alpha^1\,\xi^i_1 + \alpha^2\,\xi^i_2 + \alpha n^i$$

avec $(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + \alpha^2 = 1$. Les équations (1') sont de type Darboux-Ribaucour pour une courbe située sur une surface.

BIBLIOGRAPHIE

1. Miron R. — *Configurații Myller $\mathfrak{M}(C, \xi^i, T^{n-1})$ în spații riemanniene V_n. Aplicații la studiul hipersuprafețelor V_{n-1} din V_n*. St. și Cerc. Mat., Iași XII, f. 2.

2. Roman A. — *Studiul diferențial al unei varietăți Myller bidimensionale în spațiul afin-unimodular*. An. șt. Univ. Iași, 1974.

Reçu le 1.XII.1977

Lic. „Gh. Șincai"
Bucharest
R. S. România

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XXV, s. I a, f. 1

SOME PROPERTIES OF THE ALMOST PERIODIC FUNCTIONS IN PROBABILITY

BY

ANCA-MARIA PRECUPANU

In the present note we shall study some properties of almost periodic functions in probability, suggested in a paper by O. Onicescu and V. Istrățescu [7].

Generally, we shall use the terminology and the notations of [7]. The reader is also refered to [6], chap. XVII, for some general results concerning the convergence, continuity, differentiability and integrability in probability.

Let $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ be a probability space and let R be the real line.

By a *random function* on R we mean any function defined on R, with values in the space of all random variables defined on $(\Omega, \mathbf{A}, P)$.

We shall denote by $C_P(R)$ the set of all continuous in probability random functions on R.

Definition 1. *A function $f \in C_P(R)$ is called almost periodic in probability if to any $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, there corresponds a number $l = l(\varepsilon, \eta) > 0$ such that in any interval of length l, there exists τ such that*

$$P(\{\omega;\ |f(t+\tau, \omega) - f(t, \omega)| \geqslant \varepsilon\}) < \eta, \text{ for all } t \in R.$$

The number l is called the *inclusion length* and τ is called an $\varepsilon - \eta -$ *period* of f.

Denote by $AP_P(R)$ the set of all almost periodic functions in probability on R.

Theorem 2. *If f is almost periodic in probability, then f is uniformly continuous in probability on R.*

Proof. If $\varepsilon > 0$ and $\eta > 0$, let $l = l(\varepsilon/3, \eta/3)$ be the inclusion length corresponding to $\varepsilon/3$, $\eta/3$, according to definition 1.

Since f is uniformly continuous in probability on the interval $[-1, -1+l]$ ([6], chap. XVII) there exists $\delta = \eta(\varepsilon/3, \eta/3)$, $0 < \delta < 1$, such that $|t' - t''| < \delta$ and $t', t'' \in [-1, -1+l]$ imply

$$P(\{\omega;\ |f(t', \omega) - f(t'', \omega)| \geqslant \varepsilon/3\}) < \eta/3. \tag{1}$$

Let t_1, t_2 be real numbers so that $|t_1 - t_2| < \delta$ and let $t \in R$.

Since f is almost periodic in probability, there exists $\tau \in [-t_1, -t_1 + l]$ such that

$$P(\{\omega;\ |f(t+\tau, \omega) - f(t, \omega)| \geqslant \varepsilon/3\}) < \eta/3. \tag{2}$$