BIBLIOGRAPHIE

1. P. Freyd — *Aspects of Topoi*, Bull. Aust. Math. Soc. 7 (1973), pp. 1—76.
2. F. W. Lawvere — *Functorial semantics of algebraic theories* Dissertation, Columbia University, New York, 1963.
3. Radu Alexandru, — *Sur les topos de Giraud-Grothendieck*. Ann. Fac. Sci. de Kinshasa (Zaïre), Section Math. Phys. 2, (1976).
4. Wraith G. C. — *Lectutes on elementary Topoi*, in: Springer Lecture Notes, 445, 1975.
5. Lavendhomme R., *Topos de Lawvere-Tiérnéy*, Séminaire de Mathématique pure, Université Catholique de Louvain, 1972.

Received 1. VI. 1978

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f 1

REMARQUES SUR LES FONCTEURS D'INTÉRIEUR ET SUR LES IDÉAUX DANS UNE CATÉGORIE

PAR

I. TOFAN

Cette Note a pour but de développer, dans le cadre de la théorie des catégories, quelques notions de la théorie des demigroupes. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $|\mathcal{C}|$ la classe de ses objets et $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X à Y $(X, Y \in |\mathcal{C}|)$.

1. Soient $|\mathcal{C}'|$ une sousclasse de $|\mathcal{C}|$ et pour chaque $X, Y \in |\mathcal{C}'|$, un sousensemble $\mathcal{C}'(X, Y)$ de $\mathcal{C}(X, Y)$. Le couple constitué par $|\mathcal{C}'|$ et par la famille d'ensembles $\{\mathcal{C}'(X, Y)/X, Y \in |\mathcal{C}'|\}$ sera nommé partie de $\mathcal{C}$. Les objets de $|\mathcal{C}'|$ sont nommés objets de la partie et les éléments de $\mathcal{C}'(X, Y)$, pour tous $X, Y \in |\mathcal{C}'|$, flèches de la partie. En donnant les parties $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ d'une catégorie $\mathcal{C}$, nous disons que $\mathcal{C}'$ est inclus dans $\mathcal{C}''$ $(\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}'')$ si $|\mathcal{C}'| \subseteq |\mathcal{C}''|$ et $\mathcal{C}'(X, Y) \subseteq \mathcal{C}''(X, Y)$ pour tous $X, Y \in |\mathcal{C}'|$; nous définissons $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''$ (l'intersection) et $\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$ (l'union des parties) par $|\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''| = |\mathcal{C}'| \cap |\mathcal{C}''|$, $(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'')(X, Y) = \mathcal{C}'(X, Y) \cap \mathcal{C}''(X, Y)$ pour tous $X, Y \in |\mathcal{C}'| \cap |\mathcal{C}''|$ et respectivement $|\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''| = |\mathcal{C}'| \cup |\mathcal{C}''|$,

$$(\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}'')(X, Y) = \begin{cases} \mathcal{C}'(X, Y) \text{ si } X, Y \in |\mathcal{C}'|, X \text{ et (ou) } Y \notin |\mathcal{C}''|; \\ \mathcal{C}''(X, Y) \text{ si } X, Y \in |\mathcal{C}''|, X \text{ et (ou) } Y \notin |\mathcal{C}'|; \\ \mathcal{C}'(X, Y) \cup \mathcal{C}''(X, Y), \text{ si } |\mathcal{C}'| \cap |\mathcal{C}''| \text{ n'est pas la classe vide et } X, Y \in |\mathcal{C}'| \cap |\mathcal{C}''|; \\ \varnothing \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

(Pour éviter l'introduction de nouvelles conventions nous supposerons que, si on ne fait pas d'autres précisions, les intersections $|\mathcal{C}'| \cap |\mathcal{C}''|$ qui interviennent dans la définition de $\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$ ne conduisent pas à la classe vide).

Définition 1. *Un idéal à droite [gauche] de la catégorie $\mathcal{C}$ est une partie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$, qui satisfait à la condition suivante: pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$ et toute flèche g de $\mathcal{C}'$ si f, g, sont composables $f.g$ [$g.f$] alors $f.g$ [$g.f$] est flèche de $\mathcal{C}'$ (il en résulte que la source [l'adresse] de f est contenue dans $\mathcal{C}'$). Un idéal qui est en même temps à droite et à gauche sera nommé idéal bilatère.*

La notion d'idéal a été introduite dans la théorie des catégories par R. Lavendhomme [2] pour l'ensemble des morphismes d'une petite catégorie, considerée comme groupoïde généralisé. Beaucoup

résultats de [1] peuvent être transposés pour les idéaux des catégories. Si dans l'idéal à droite [gauche] de $\mathcal{C}$ il existe une flèche u épimorphisme [monomorphisme] de $\mathcal{C}$, telle que toute flèche de $\mathcal{C}'$ s'exprime comme $h.u$ [$u.h$], ou h est morphisme de la catégorie $\mathcal{C}$, nous allons dire que $\mathcal{C}'$ est idéal principal à droite [gauche] avec le générateur u (il en résulte que toutes les flèches de $\mathcal{C}'$ ont la même source [adresse] que u).

Remarque 1. Si l'idéal à droite [gauche] $\mathcal{C}'$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ admet u, u' comme générateurs alors $u = h.u'$ [$u = u'.h$] ou h est un isomorphisme convenable de $\mathcal{C}$.

Exemple 1. Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des ensembles et sa partie $\mathcal{E}'$ avec $|\mathcal{E}'| = |\mathcal{E}|$ et dont les flèches sont les applications constantes. $\mathcal{E}'$ est un idéal bilatère de la catégorie $\mathcal{E}$.

Exemple 2. Soit $\mathcal{G}$ la catégorie des groupes et sa partie $\mathcal{G}'$ avec $|\mathcal{G}'| = |\mathcal{G}|$ et dont les flèches sont les morphismes f avec $\mathrm{Im}(f)$ contenue dans le centre du groupe adresse de f. $\mathcal{G}'$ est un idéal bilatère de la catégorie $\mathcal{G}$.

Exemple 3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie $X \in |\mathcal{C}|$ et sa partie $\mathcal{C}'$ avec $|\mathcal{C}'| = |\mathcal{C}|$ et dont les flèches sont les morphismes de $\mathcal{C}$ ayant la source [l'adresse] X. $\mathcal{C}'$ est un ideal à droite [gauche] de $\mathcal{C}$.

Dès maintenant nous allons supposer que si on ne fait pas une précision expresse, les idéaux considérés sont du même type.

Remarque 2. L'intersection de deux parties (idéaux, sous-catégories) d'une catégorie $\mathcal{C}$ est partie (idéal, sous catégorie) de $\mathcal{C}$.

Remarque 3. L'union de deux parties (idéaux) d'une catégorie $\mathcal{C}$ est partie (idéal) de $\mathcal{C}$.

On peut démontrer sans peine :

Proposition 1. *Si $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont des souscatégories d'une catégorie $\mathcal{C}$ et $|\mathcal{C}'| \cap |\mathcal{C}''|$ est la classe vide alors $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}''$ est souscatégorie de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ sont préordonées et $|\mathcal{C}'|$, $|\mathcal{C}''|$ distinctes, la condition imposée sur $|\mathcal{C}'| \cap |\mathcal{C}''|$ est aussi nécessaire.*

Proposition 2. *Si $\mathcal{C}'$ est idéal et $\mathcal{C}''$ souscatégorie d'une catégorie $\mathcal{C}$ alors $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''$ est idéal de $\mathcal{C}''$.*

2. La notion d'idéal peut être utilisée pour redéfinir la notion d'égaliseur (coégaliseur).

Soient $f, g : X \to Y$ des morphismes d'une catégorie $\mathcal{C}$ et la partie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ avec $|\mathcal{C}'| = |\mathcal{C}|$ et ayant comme flèches les morphismes q d'adresse X pour lesquels $f.q = g.q$. $\mathcal{C}'$ est idéal à gauche de la catégorie $\mathcal{C}$.

Proposition 3. *Les morphismes $f, g : X \to Y$ de la catégorie $\mathcal{C}$ admettent égaliseur ssi l'idéal $\mathcal{C}'$ construit antérieurement est principal. Dans le cas afirmatif, le générateur de l'idéal $\mathcal{C}'$ est l'égaliseur du couple (f, g).*

De façon analogue on peut rédéfinir la notion de coégaliseur.

3. Soit un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$. La souselasse des objets X de $\mathcal{C}$ dont $F(X) \in |\mathcal{D}'|$, de pair avec les morphismes f de la catégorie $\mathcal{C}$ pour lesquels $F(f)$ est flèche de $\mathcal{D}'$, forment une partie $\mathcal{C}'$ de la catégorie $\mathcal{C}$.

Proposition 4. *Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est foncteur surjectif par objets et par morphismes alors $\mathcal{C}'$ est idéal de $\mathcal{C}$ ssi $\mathcal{D}'$ est idéal de $\mathcal{D}$.*

Un problème analogue pour les souscatégories conduit à l'observation que tout $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ foncteur injectif par objets est homomorphe

(nous appelons un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ qui satisfait à la condition que $F(\mathcal{C})$ est souscatégorie de $\mathcal{D}$-foncteur homomorphe). On peut montrer

Proposition 5. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie préordonée ayant au moins trois objets; alors un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ satisfaisant à la condition que F_C n'est pas l'application constante, est homomorphes'il est injectif par objets.* (F_C désigne la restriction de F à $|\mathcal{C}|$).

4. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et f, g morphismes de $\mathcal{C}$. Nous disons que $f \leqslant g$ s'il existe un morphisme h de $\mathcal{C}$ tel que $f.h = g$.

Remarque 4. Si F est foncteur de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$ et f, g sont des morphismes de $\mathcal{C}$ satisfaisant à $f \leqslant g$, alors $F(f) \leqslant F(g)$.

Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ des foncteurs (covariants). Nous disons que $F \overset{i}{\leqslant} G$ si pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$ $F(f) \leqslant G(f) \leqslant F(f)$ (ou $G(f) \leqslant F(f) \leqslant G(f)$.

En partant de la définition de l'opérateur de fermeture [1] nous pouvons définir :

Définition 2. *On dit que le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est foncteur d'intérieur s'il satisfait à 1) $F(f) \leqslant f$ pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$; 2) $F(f) \leqslant g \Rightarrow F(f) \leqslant F(g)$.*

Proposition 6. *Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est foncteur d'intérieur ss'il satisfait à 1) $F(f) \leqslant f$ pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$; 2) $F.F \overset{i}{=} F$.*

Proposition 7. *Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est foncteur surjectif par objets et par morphismes alors F est foncteur d'intérieur ssi $F \overset{i}{=} 1_C$.*

La démonstration est immédiate.

Remarque 5. Si les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ satisfont à $G.F(f) \leqslant f$ pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$ et $g \leqslant F.G(g)$ pour tout morphisme g de $\mathcal{D}$ alors $G.F$ est foncteur d'intérieur. Nous appelons connexion d'intérieur un couple (F, G) satisfaisant à la propriété ci-dessus.

Remarque 6. Le couple $(F, 1_C)$ (ou $(1_C, F)$) est une connexion d'intérieur ($F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$) ssi $F \overset{i}{=} 1_C$.

Remarque 7. Si (F, G) $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est une connexion d'intérieur alors $F.G = G.F$ ssi $G.F \overset{i}{=} 1_C \overset{i}{=} F.G$. Soient les foncteurs covariants $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Un morphisme f de $\mathcal{C}$ sera nommé morphisme fixe de F s'il satisfait à $f \leqslant F(f) \leqslant f$ (ou $F(f) \leqslant f \leqslant F(f)$) et un morphisme h de $\mathcal{C}$ sera nommé morphisme de coïncidence pour F et G s'il satisfait à $F(h) \leqslant G(h) \leqslant F(h)$ (ou $G(h) \leqslant F(h) \leqslant G(h)$).

On peut démontrer que :

Proposition 8. *Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ admet un morphisme fixe ssi pour tout foncteur d'intérieur $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ satisfaisant $F.G = G.F$, F et G admettent un morphisme de coïncidence.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Creangă I., Simovici D. — *Teoria algebrică a semigrupurilor cu aplicații.* Ed. tehnică, 1977.
2. Lavendhomme R. — *La notion d'idéal dans la théorie des catégories.* Ann. Soc. Sci. de Bruxelles 79 (1965) p. 5—25.

Reçu 9.III. 1978

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
Roumanie