Step 3 : If both the games $\tilde{\Gamma}(s\,;\,x_1^0,\,x_2^0)$, $s=1,2$, have a saddle poin then, using lemma 4, we obtain an EP for $\tilde{\Gamma}$ and, by Remark 1, for Γ. If $\tilde{\Gamma}(s\,;\,x_1^0,\,x_2^0)$, $s\in\{1,2\}$, has not a saddle point, consider $J(s)$ and $\tilde{\Gamma}($ obtained from $\tilde{\Gamma}$ delating all the columns $j\in J(s)$ and apply Step to $\tilde{\Gamma}(s)$.

Since after each iteration we shall obtain a game, the number o columns of which is less than the number of columns in the origin game, it follows that in a finite number of iterations we shall obtain a EP for the given game Γ.

Example : Let $\Gamma=(A,B)$ be the bimatrix game given by the pa yoff matrices

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

We observe that in every row of B there exists only one maximal el ment, b_{14} and b_{22} respectively, and Γ has not a saddle point.

Step 1 : Consider the matresic

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix};\quad B^4=\begin{bmatrix} -3 & -5 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

Step 2 :

$$x^0=(x_1^0,\,x_2^0)=(1/2,\,1/2)\,;\quad y^0=(0,\,4/7,\,0,3/7,0)$$

$$A_1(1)=\begin{bmatrix} -3/2 & -3/2 & 1 & 2 & 1/2 \\ -3 & -3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix};\quad B^4(1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_1(2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & -3/2 & 1 & 2 & 1/2 \end{bmatrix};\quad B^4(2)=\begin{bmatrix} -3 & -5 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

Step 3 : The game with the payoff matrices $A_1(1)$, $B^4(1)$ has not a saddle point; delate from the matrices A_1 and B^4 the columns corresponding to the weakly dominated columns in $\Gamma(1\,;\,x_1^0,\,x_2^0)$, i.e. columns 1, 4, 5 and obtain the game $\Gamma(1)$ with the payoff matrices

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},\quad B^4=\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Applying Step 1 to this game we obtain $x^0=(3/7,\,4/7)$, $y^0=(2/5,\,3/5)$ and observe that $(x^0,\,y^0)$ is an EP for $\Gamma(1)$; therefore $(x,\,y)$, where $x=(3/7,\,4/7)$ and $y=(0,\,2/5,\,3/3,\,0,\,0)$, is an EP for the given game Γ.

REFERENCES

1. Motzkin T. S., Raiffa H., Thompson G. L. — *The double description method*, Ann. of Math. Studies ,28 (1953), 51—73.
2. Nash J. — *Equilibrium points in n-Person Games*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36 (1950), 48—49.
3. Smadici, C, — *Finding an equilibrium point for bimatrix games by Benders decomposition*, to appear.

Faculty of Mathematics
University of Iaşi
R. S. România

Received 25.V.1978

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f 1

NOTE

LA GÉOMÉTRIE ET LA THÉORIE DES CATÉGORIES

PAR

V. CRUCEANU

Introduction. La théorie des catégories représente la synthèse la plus générale et profonde dans le développement de la mathématique et elle constitue l'instrument fondamental pour la structuration de la mathématique actuelle. En particulier, la notion de catégorie nous permet de définir avec beaucoup de rigueur et de clarté l'objet des nombreuses disciplines mathématiques et celui de foncteur, d'établir d'une manière précise les rapports entre ces disciplines.

Le but de ce travail est d'établir certaines implications de la théorie des catégories dans la géometrie classique. Le point de vue prèdominant dans ce domaine, qui a joué un rol fondamental pour le développement de la géométrie dans le dernier siècle, est celui de F. Klein, ou autrement dit celui de la théorie des groupes. Conformément à ce point de vue, étant donné un espace S doué d'une certaine structure et un groupe G d'automorphismes de cette structure, la géométrie de l'espace S, par rapport au groupe G, est l'étude de ces propriétés des figures de S qui sont invariantes aux transformations de G. Or, en géométrie nous n'étudions pas d'habitude un seul espace, mais une classe d'espaces d'un certain type. D'autre part, nous considérons non seulement des tranformations bijectives d'un espace en lui même, mais des transformations qui, en général, ne sont pas bijectives et qui transforment un espace donné en un autre de la même classe. Il en résulte que l'objet de la géometrie est beaucoup plus général que celui considéré par F. Klein. Le point de vue de la théorie des groupes est aussi limité en ce qui concerne le rapport entre les diverses géométries parcequ'il se réfère seulement à certaines relations d'isomorphisme ou de subordination assez restrictives. Nous allons montrer que la théorie des catégories nous offre un point de vue plus général et précis pour définir les diverses géométries et pour établir les rapports entre celles-ci, ainsi que, entre la géométrie et d'autres disciplines mathématiques.

Dans ce qui suit nous considérons seulement des catégories dont les objets sont des ensembles doués de certaines structures et les morphismes sont des applications qui conservent ces structures. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories de ce type et supposons que les objets de $\mathcal{C}$ s'obtiennent des objets de $\mathcal{D}$ par l'adjonction d'une certaine structure supplémentaire σ et que les morphismes de $\mathcal{C}$ sont des morphismes de $\mathcal{D}$ qui satisfont à la condition de conserver la structure σ.

Un *foncteur d'oubli* de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ sera un foncteur qui associe à chaque objet de $\mathcal{C}$ l'objet de $\mathcal{D}$ avec le même ensemble support et à chaque morphisme de $\mathcal{C}$, le morphisme de $\mathcal{D}$ représenté par la même application mais en omettant le fait qu'il conserve la structure σ. Nous dirons que la catégorie $\mathcal{C}$ est *subordonnée* à la catégorie $\mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe un foncteur d'oubli de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$. Dans ce cas nous dirons aussi que la discipline mathématique qui a comme objet d'étude la catégorie $\mathcal{C}$ est subordonnée à la discipline correspondante à $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{D}$ alors le foncteur injection canonique $i:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ peut être regardé comme un foncteur d'oubli et par suite toute sous-catégorie de $\mathcal{D}$ est subordonnée à $\mathcal{D}$. Une catégorie $\mathcal{C}$ est *isomorphe* à une catégorie $\mathcal{D}$ s'il existe un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ qui soit un isomorphisme, c'est à dire plein, fidel et bijectif. Les disciplines mathématiques correspondantes à deux catégories isomorphes seront appellées aussi isomorphes. Une catégorie $\mathcal{C}$ est *équivalente* à une catégorie $\mathcal{D}$ s'il existe un foncteur $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ qui soit plein et fidel et tel que chaque objet B de $\mathcal{D}$ soit isomorphe à un objet de la forme $F(A)$, avec A objet de $\mathcal{C}$. Les disciplines mathématiques correspondantes à deux catégories équivalentes seront appellées aussi équivalentes. Un *squelette* pour une

catégorie $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ avec la propriété que chaque objet de $\mathcal{D}$ est isomorphe à un objet et à un seul de $\mathcal{C}$. Il en résulte que l'injection canonique de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ est une équivalence et par suite, toute catégorie est équivalente à chacun des ses squelettes.

Dans la fondation de la géométrie, l'algèbre joue un rôle important. C'est pour cela que nous commençons par certaines considérations sur

2. L'algèbre linéaire. Pour plus de simplicité, nous considérons seulement des espaces réels et de dimension finie. En prenant les espaces vectoriels, comme objets et les transformations linéaires comme morphismes on obtient la catégorie $\mathcal{V}$ des espaces vectoriels. L'étude de cette catégorie est *l'algèbre linéaire*. Nous remarquons le foncteur du passage au dual qui est un antiautomorphisme involutif de $\mathcal{V}$ et qui joue un rol fondamental dans les géométries centro-affine et projective.

Un *espace vectoriel euclidien* est un couple (V, g) où V est un espace vectoriel et g une forme bilinéaire symétrique et positivement définie — produit scalaire — sur V. Une application linéaire $T: (V, g) \to (V', g')$ est *orthogonale*, si elle conserve le produit scalaire. Les espaces vectoriels euclidiens et les transformations orthogonales constituent la catégorie des espaces vectoriels euclidiens $\mathcal{V}_e$ et leur étude est *l'algèbre linéaire euclidienne*. Le foncteur d'oubli $\alpha: \mathcal{V}_e \to \mathcal{V}$, qui s'obtient d'une manière évidente, nous montre que l'algèbre linéaire euclidienne est subordonée à l'algèbre linéaire.

Dans l'ensemble des formes bilinéaires symétriques, positivement définies, sur un espace vectoriel V, on peut définir la relation d'équivalence : $g_1 \sim g_2$ si, et seulement si, il existe $k \in R_+^*$ tel que $g_2 = kg_1$. Un *espace vectoriel conforme euclidien* est un couple $(V, [g])$ où V est un espace vectoriel et $[g]$ une classe de formes bilinéaires symétriques positivement définies, équivalentes. Une *transformation conforme orthogonale* $T: (V, [g]) \to (V', [g'])$ est une transformation linéaire avec la propriété qu'il existe $k \in R_+^*$ tel que

$$g'(T\vec{u}, T\vec{v}) = kg(\vec{u}, \vec{v}), \quad \forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

Les espaces vectoriels conformes euclidiens et les transformations conformes orthogonales, déterminent la catégorie des espaces vectoriels conformes euclidiens $V_{c.e}$. Leur étude est *l'algèbre linéaire conforme euclidienne*. Evidement l'algèbre linéaire conforme euclidienne est subordonée à l'algèbre linéaire. Nous avons aussi le foncteur $\beta: \mathcal{V}_e \to \mathcal{V}_{c.e}$ donné par $\beta(V, g) = (V, [g])$ et $\beta(T) = T$, qui est fidel et injectif, c'est à dire un plongement de $\mathcal{V}_e$ en $\mathcal{V}_{c.e}$.

Un *espace vectoriel pseudo-euclidien hyperbolique normal* est un couple (V, g) où V est un espace vectoriel et g une forme bilinéaire symétrique du type hyperbolique normal. Une transformation linéaire entre deux espaces de ce type, qui conserve le produit scalaire correspondant, s'appelle *transformation pseudo-orthogonale*. On en obtient la catégorie des espaces vectoriels pseudo-euclidiens hyperboliques normaux, $\mathcal{V}_{p.e.h.n.}$ et son étude est *l'algèbre linéaire pseudo-euclidienne hyperbolique*, qui est aussi subordonnée à l'algèbre linéaire.

On peut définir aussi *les espaces vectoriels conformes pseudo-euclidiens hyperboliques normaux et les transformations conformes pseudo-orthogonales*, considérer leur catégorie $\mathcal{V}_{c.p.e.h.n}$ et l'algèbre linéaire correspondante.

De la même manière on peut définir l'algèbre linéaire pseudo-euclidienne du type général, l'algèbre linéaire symplectique, etc., qui sont aussi subordonnées à l'algèbre linéaire.

Il est utile de remarquer qu'on peut prendre comme représentant pour une classe d'espaces vectoriels isomorphes, l'espace vectoriel arithmétique correspondant. Par suite, les espaces vectoriels arithmétiques et leurs morphismes en $\mathcal{V}$ déterminent un squelette $\mathcal{V}_a$ pour la catégorie $\mathcal{V}$ des espaces vectoriels. L'étude de ce squelette sera appellée le *modèle arithmétique* de l'algèbre linéaire. Par suite l'algèbre linéaire est équivalente à son modèle arithmétique.

En considérant sur les espaces vectoriels arithmétiques les structures euclidiennes, conforme euclidienne, etc., canoniques, on deduit de la même manière que les algèbres linéaires euclidienne, conforme euclidienne etc. sont équivalentes avec leurs modèles arithmétiques.

3. La géométrie affine. Soit A un ensemble et V un espace vectoriel. Nous dirons qu'une application $\rho: A \times A \to V$, notée $\rho(p, q) = \vec{pq}$, détermine sur A une structure *d'espace affine associé à* V si, et seulement si, elle satisfait aux conditions :

1. $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$, $\forall\ p, q, r \in A$;

2. $\exists\ o \in A$, tel que l'application $\rho_0: A \to V$ donnée par $\rho_0(p) = \vec{op}$ soit bijective.

V s'appelle *l'espace vectoriel directeur de* A.

Une application $\tau: (A, V, \rho) \to (A', V', \rho')$ entre deux espaces affines s'appelle *transformation affine*, s'il existe $o \in A$ tel que l'application $T: V \to V'$ donnée par

$$T(\vec{u} = \vec{op}) = \overrightarrow{\tau(o)\,\tau(p)}, \ \forall\ \vec{u} \in V,$$

soit linéaire. T ne depend pas de o et s'appelle la transformation linéaire induite par τ. Les espaces et les transformations affines constituent la catégorie $\mathcal{A}$ des espaces affines et son étude, est *la géométrie affine*.

En associant à chaque espace affine, l'espace vectoriel directeur et à chaque transformation affine, la transformation linéaire induite on obtient un foncteur $\gamma: \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ qui est plein et surjectif et qui met en évidence une liaison etroite entre la géométrie affine et l'algèbre linéaire. Pour tout espace vectoriel V, l'application $\rho_0: V \times V \to V$ donnée, par $\rho_0(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$, détermine une structure affine sur V, nomée la structure affine canonique de V. Si (A, V, ρ) est un espaces affine associé à V, alors l'application $\varphi_0: (A, V, \rho) \to (V, V, \rho_0)$ donnée par 2), est un isomorphisme affine. En mettant $\delta(V) = (V, V, \rho_0)$, $\delta(T) = T$, on obtient un foncteur $\delta: \mathcal{V} \to \mathcal{A}$ qui est un plongement de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{A}$, avec la propriété que tout objet de $\mathcal{A}$ est isomorphe à un objet de la forme $\delta(V)$, avec V objet de $\mathcal{V}$. Ce foncteur n'est pas plein et par suite il n'est pas une équivalence. On a aussi $\gamma \circ \delta = 1_{\mathcal{V}}$.

On constate aisément que tout repère affine détermine un isomorphisme de l'espace affine (A, V, ρ) sur l'espace affine arithmétique correspondant (R^n, R^n, ρ_0). Par suite, les espaces affines arithmétiques avec leurs morphismes en $\mathcal{A}$, constituent un squelette de $\mathcal{A}$. Il en résulte que la géométrie affine est équivalente avec son modèle arithmétique.

On appelle *espace centro-affine* (A, V, ρ, o) un espace affine (A, V, ρ) avec un point fixé $o \in A$. Une application affine $\tau: (A, V, \rho, o) \to (A', V', \rho', o')$ s'appelle *transformation centro-affine* si on a $\tau(o) = o'$. Les espaces et les transformations centro-affines constituent la catégorie $\mathcal{C}_a$ des espaces centro-affines. *La géométrie centro-affine* est l'étude de cette catégorie. Evidement la géométrie centro-affine est subordonnée à la géométrie affine. Remarquons que tout espace vectoriel V admet la structure centro-affine canonique $(V, V, \rho_0, \vec{o})$ et que si (A, V, ρ, o) est un espace centro-affine associé à V, alors l'application $\varphi_0: (A, V, \rho, o) \to (V, V, \rho_0, \vec{o})$ donnée par 2) est un isomorphisme centro-affine. En mettant $\varepsilon(V) = (V, V, \rho_0, \vec{o})$ et $\varepsilon(T) = T$ on obtient un foncteur covariant $\varepsilon: \mathcal{V} \to \mathcal{C}_a$ qui est une équivalence. Par suite, l'algèbre linéaire est équivalente avec la géométrie centro-affine. Mais comme la géométrie centro-affine est subordonnée à la géométrie affine il en résulte que l'algèbre linéaire peut être considérée comme subordonnée à la géométrie affine.

On appelle *espace affine euclidien* un espace affine dont l'espace vectoriel associé est euclidien. Une *transformation isométrique* est une transformation affine entre deux espaces affines euclidiens avec la propriété que la transformation linéaire induite est orthogonale. Les espaces affines euclidiens et les transformations isométriques déterminent la catégorie $\mathcal{A}_e$ des espaces affines euclidiens et son étude est *la géométrie euclidienne* (géométrie métrique euclidienne, dans la termionlogie classique).

Un espace affine conforme euclidien est un espace affine dont l'espace vectoriel directeur est conforme euclidien. On appelle *similitude* une transformation affine entre deux espaces affines conformes euclidiens avec la propriété que la transformation linéaire induite est conforme orthogonale. Les espaces affines conformes euclidiens et les similitudes constituent la catégorie $\mathcal{A}_{c.e}$ des espaces conformes euclidiens. L'étude de cette catégorie est *la géométrie conforme euclidienne* (géométrie euclidienne dans la terminologie classique). Nous remarquons que la géométrie définie par le système axiomatique de Hilbert est la géométrie conforme euclidienne, parceque la métrique de l'espace est définie à un facteur près, vu que l'unité de mesure n'est pas uniquement detérminée. Les geométries affines euclidienne et conforme euclidienne sont evidement subordonnées à la géométrie affine. Il y a aussi le foncteur $\beta: \mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_{c.e}$ donné par $\beta(A, V, \rho, g) = (A, V, \rho, [g])$ et $\beta(\tau) = \tau$, qui est un plongement de $\mathcal{A}_e$ en $\mathcal{A}_{c.e}$. On peut considérer aussi les foncteurs notés par γ de $\mathcal{A}_e$ à $\mathcal{V}_e$ et de $\mathcal{A}_{c.c.}$ à $\mathcal{V}_{c.c.}$ donnés respectivement par

$$\gamma(A, V, \rho, g) = (V, g),\ \gamma(\tau) = T\ ;\ \gamma(A, V, \rho, [g]) = (V, [g]),\ \gamma(\tau) = T,$$

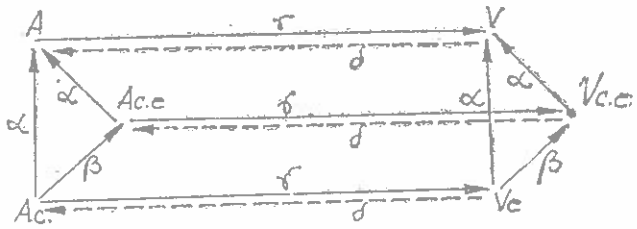
qui expriment la liaison intime entre la géométrie affine euclidienne et l'algèbre linéaire euclidienne et entre la géométrie affine conforme euclidienne et l'algèbre linéaire conforme

euclidienne. Il existe encore les foncteurs δ de $\mathcal{V}_e$ à $\mathcal{A}_e$ et de $\mathcal{V}_{c.e}$ à $\mathcal{A}_{c.e}$ donnés respectivement par

$$\delta(V, g) = (V, V, \rho_0, g),\ \delta(T) = T\ ;\ \delta(V, [g]) = (V, V, \rho_0\ ; [g]),\ \delta(T) = T,$$

qui sont des plongements et qui satisfont à la condition que $\gamma \circ \delta$ est le foncteur identique de la catégorie correspondente.

Nous avons par suite, le diagramme commutatif :



On peut constater que les géométries affines euclidienne et conforme euclidienne sont équivalentes à leurs modèles arithmétiques.

De la même manière, on peut définir les espaces pseudo-euclidiens et conformes pseudo-euclidiens du type hyperbolique normal, considérer leurs catégories et établir les rapports de ces catégories avec les catégories des espaces affines et des espaces vectoriels pseudo-euclidiens et conformes pseudo-euclidiens du type hyperbolique normal.

On peut encore considérer des autres géométries subordonnées à la géométrie affine. Par exemple, la géométrie affine symplectique, la géométrie affine pseudo-euclidienne du type général, etc., établir leurs rapports avec les algèbres linéaires correspondantes et l'équivalence avec leurs modèles arithmétiques. Enfin, on peut considérer aussi les géométries centro-affines de chaque type analisé plus haut et établir leurs équivalence avec les algèbres linéaires correspondantes.

4. La géométrie projective. Soit V un espace vectoriel et $V^* = V - [o]$. En mettant $\vec{x} \sim \vec{y}$ si, et seulement si, il existe $k \in R^*$ tel que $\vec{y} = k\vec{x}$, on obtient une relation d'équivalence sur V^*. On appelle *espace projectif associé* à V l'ensemble $P(V) = V^*/\sim$. Si V et W sont deux espaces vectoriels, une transformation linéaire $T : V \to W$ induit une transformation entre les ensembles V^* et W^* si, et seulement si, elle est injective. Dans ce cas, T détermine une application $P(T) : P(V) \to P(W)$ donnée par

$$P(T)([\vec{x}]) = [T(\vec{x})],$$

où $[\vec{x}]$ est la classe d'équivalence de $\vec{x}$, nommée la *transformation projective induite par* T. Deux transformations linéaires T_1 et T_2 de V à W, déterminent la même transformation projective de $P(V)$ à $P(W)$ si, et seulement si, il existe $\rho \in R^*$ tel que $T_2 = \rho T_1$. On en obtient une relation d'équivalence sur l'ensemble des transformations linéaires injectives de V à W et l'ensemble facteur correspondante peut être identifiée avec l'ensemble des transformations projectives de $P(V)$ à $P(W)$. Si U, V, W sont trois espaces vectoriels et $T_1 : U \to V$, $T_2 : V \to W$ deux transformations linéaires injectives, alors $T_2 \circ T_1 : U \to W$ est aussi une transformation injective et on a

$$P(T_2) \circ P(T_1) = P(T_2 \circ T_1).$$

Il en résulte que les espaces et les transformations projectives déterminent une catégorie $\mathcal{P}$, nommée la catégorie des espaces projectifs. Son étude est la *géométrie projective*. En associant à chaque espace vectoriel V l'espace projectif $P(V)$ et à chaque transformation linéaire injective $T : V \to W$, la transformation projective induite $P(T) : P(V) \to P(W)$ on obtient un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{V}^i$ des espaces vectoriels avec les transformations linéaires injectives comme morphismes, vers la catégorie $\mathcal{P}$ des espaces projectifs. Ce foncteur établit la liaison intime entre l'algèbre linéaire et la géométrie projective. Le foncteur du passage au dual dans V induit un foncteur du passage au dual en P, qui se trouve à la base du principe de dualité en géométrie projective.

Il est aisé de définir le squelette arithmétique $\mathcal{P}_a$ de la catégorie $\mathcal{P}$ et de montrer que la géométrie projective est équivalente avec son modèle arithmétique.

On appelle *espace projectif à hyperplan absolu* un espace projectif avec un hyperplan fixé, c'est à dire un couple $(P(V), P(V'))$ où V' est un sous espace vectoriel de V de codimension 1. Les espaces projectifs à hyperplan absolu avec les transformations projectives qui conservent l'hyperplan absolu constituent une catégorie $\mathcal{P}^0$. Evidement cette catégorie est subordonnée à la catégorie $\mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{A}^i_a$ le squelette arithmétique de la catégorie $\mathcal{A}^i$ des espaces affines avec les transformations affines injectives comme morphismes. En considérant sur les objets de $\mathcal{A}^i_a$ et $\mathcal{P}^0_a$ de repères naturels et en mettant

$$\varphi(R^n, R^n, \rho_0) = (P(R \times R^n),\ P(o \times R^n)),\ \varphi(a^\alpha_\beta, a^\alpha_0) = \begin{bmatrix} a^\alpha_\beta & a^\alpha_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n,$$

on obtient un foncteur $\varphi : \mathcal{A}^i_a \to \mathcal{P}^0_a$ qui est un isomorphisme. Par suite la catégorie $\mathcal{A}^i$ des espaces affines avec les transformations affines injectives comme morphismes est équivalente à la catégorie $\mathcal{P}^0$ des espaces projectifs à hyperplan absolu. Il en résulte que cette dernière est subordonnée à la géométrie affine et non pas équivalente à elle. De la même manière on peut montrer que la catégorie des espaces centro-affines avec les transformations affines injectives est équivalente à la catégorie des espaces projectifs à point et hyperplan absolus nonincidents.

On appelle *espace projectif à métrique elliptique* $P(V, [g])$ un espace projectif associé à un espace vectoriel conforme euclidien $(V, [g])$. La métrique conforme de V détermine sur l'espace projectif une hyperquadrique imaginaire ou une corélation elliptique. Les espaces projectifs à métrique elliptique, avec les transformations projectives induites par les transformations conformes orthogonales, constituent la catégorie $\mathcal{P}_{m.e}$ des espaces projectifs à métrique elliptique. L'étude de cette catégorie est *la géométrie projective à métrique elliptique* (géométrie de Cayley elliptique).

Soit (V, g) un espace vectoriel euclidien et S la hypersphère unitaire de V. En mettant $\vec{y} \sim \vec{x}$ si, et seulement si, $\vec{y} = \pm \vec{x}$ on obtient une relation d'équivalence sur S et soit $S^* = S/\sim$. L'ensemble S^* avec la métrique g^* induite par g s'appelle *l'espace elliptique* associé à (V, g). Si (S^*_1, g^*_1) et (S^*_2, g^*_2) sont deux espaces elliptiques associés respectivement à (V_1, g_1) et (V_2, g_2), une transformation orthogonale $T : V_1 \to V_2$ détermine une *isométrie elliptique* $T^* : S^*_1 \to S^*_2$ donnée par $T([\vec{x}]) = [T(\vec{x})]$. Les espaces et les isométries elliptiques constituent la catégorie Σ_e des espaces elliptiques et son étude est la *géométrie elliptique* (géométrie de Riemann). Soit (S^*_n, g^*_0) l'espace elliptique arithmétique de dimension n où g_0 est la métrique euclidienne canonique sur R^{n+1} et mettons $\psi(S^*_n, g^*_0) = (P(R^{n+1}), [g_0])$. Si $T' : (S^*_n, g^*_0) \to (S^*_m, g^*_0)$ est une isométrie elliptique et $T : (R^{n+1}, g_0) \to (R^{m+1}, g_0)$ une transformation orthogonale qui induit T^*, alors mettons $\psi(T^*) = P(T) : (P(R^{n+1}), [g_0]) \to P(R^{m+1}), [g_0])$. On obtient de cette manière un foncteur covariant $\psi : \Sigma^a_e \to \mathcal{P}^a_{m.e}$ entre les squelettes arithmétiques des catégories Σ_e et $\mathcal{P}_{m.e}$ qui est un isomorphisme. Par suite, la géométrie elliptique est équivalente avec la géométrie projective à métrique elliptique.

Un *espace projectif à métrique hyperbolique* est un espace projectif associé à un espace vectoriel conforme pseudo-euclidien du type hyperbolique normal. La métrique conforme euclidienne détermine une hyperquadrique réelle ou une corelation hyperbolique sur l'espace projectif. Les espaces projectifs à métrique hyperbolique et les transformations projectives induites par les transformations conformes pseudo-orthogonales, déterminent la catégorie $\mathcal{P}_{m.h}$ des espaces projectifs à métrique hyperbolique. L'étude de cette catégorie est *la géométrie projective à métrique hyperbolique* (géométrie de Cayley hyperbolique).

Soit (V, g) un espace vectoriel pseudo-euclidien du type hyperbolique et S l'hypersphère donnée par $g(\vec{x}, \vec{x}) = -1$. On peut considérer la relation d'équivalence $\vec{y} \sim \vec{x}$ si, et seulement si, $\vec{y} = \pm \vec{x}$ et l'ensemble $S^* = S/\sim$. On appelle *l'espace hyperbolique associé à* (V, g), l'ensemble S^* avec la métrique g^* induite par g. Si (S^*_1, g^*_1) et (S^*_2, g^*_2) sont deux espaces hyperboliques associés à (V_1, g_1) et (V_2, S_2), une transformation pseudo-orthogonale $T : V_1 \to V_2$ détermine une *isométrie hyperbolique* $T^* : S^*_1 \to S^*_2$. Les espaces et les isométries hyperboliques constituent la catégorie Σ_h des espaces hyperboliques et son étude est la *géo-*

métrie hyperbolique (géométrie de Lobacewski-Bolyai). On peut constater que la géométrie hyperbolique est équivalente à la géométrie projective à métrique hyperbolique.

5. La géométrie conforme. Soit $(V, [g])$ un espace vectoriel pseudo-euclidien du type hyperbolique normal et $(P(V), [g])$ l'espace projectif à métrique hyperbolique associé. L'ensemble des points de l'hyperquadrique absolue $Q \in P(V)$ s'appelle *l'espace conforme associé à* $(V, [g])$ *ou à* $(P(V), [g])$. Si Q et Q' sont deux espaces conformes associés respectivement à $(V, [g])$ et $(V', [g'])$, alors toute transformation conforme pseudo-orthogonale $T: (V, [g]) \to (V', [g'])$ détermine une transformation $T^*: Q \to Q'$ qui est la restriction à Q de la transformation projective induite $P(T): (P(V), [g]) \to (P(V'), [g'])$ et qui s'appelle *la transformation conforme induite par T ou par P(T)*. Les espaces et les transformations conformes déterminent la catégorie des espaces conformes et l'étude de cette catégorie est *la géométrie conforme*. Evidement on peut considérer des foncteurs qui établissent la liaison de la géométrie conforme avec l'algèbre linéaire conforme pseudo-euclidienne et la géométrie projective à métrique hyperbolique.

6. Le rapport avec le point de vue de F. Klein. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie connexe plus haut et S l'un de ses objets. L'objet S avec les morphismes de S en S déterminent une sous-catégorie pleine, $\mathcal{C}_S$ de $\mathcal{C}$. Par géométrie de S nous entendons l'étude de la catégorie $\mathcal{C}_S$. En considérant la classe d'équivalence de S par rapport à la relation d'isomorphisme en $\mathcal{C}$ et les morphismes des objets de cette classe, on obtient une sous-catégorie $\mathcal{C}_{[S]}$ de $\mathcal{C}$. Il est aisé de voir que $\mathcal{C}_{[S]}$ este équivalente à $\mathcal{C}_S$ et par suite la géométrie de $\mathcal{C}_{[S]}$ est équivalente à la géométrie de $\mathcal{C}_S$. Soit G l'ensemble des morphismes bijectifs de S en S dans la catégorie $\mathcal{C}$. G est alors le groupe d'automorphismes de S en $\mathcal{C}$ et en prenant S comme objet et G comme ensemble de morphismes, on obtient une sous-catégorie $[S, G]$ de $\mathcal{C}$ et même de $\mathcal{C}_S$. L'étude de la sous-catégorie $[S, G]$ est la géométrie de S d'après le point de vue de F. Klein. Cette géométrie est évidement subordonnée à la géométrie de S d'après le point de vue de la théorie des catégories.

La classe d'équivalence de S et les morphismes bijectifs correspondants forment une sous-catégorie $\mathcal{C}_{[S]}$ de $\mathcal{C}$ et même de $\mathcal{C}_{[S]}$ équivalente avec la sous-catégorie $[S, G]$. Par suite, leurs géométries sont aussi équivalentes.

Soit S et S' deux objets isomorphes de $\mathcal{C}$ et $\sigma: S \to S'$ un isomorphisme. Alors en mettant $F(S) = S'$ et $F(g) = \sigma \circ g \circ \sigma^{-1}$, pour tout morphisme g de S en S, on obtient un foncteur $F: \mathcal{C}_S \to \mathcal{C}'_{S'}$ qui est un isomorphisme. Par suite, les géométries de S et S' dans le sens de la théorie des catégories sont isomorphes. Il est aisé de voir que la restriction de F à la sous-catégorie $[S, G]$ établit aussi un isomorphisme, dans le sens de F. Klein, entre les géométries de S et S' d'après F. Klein.

Enfin, supposons que la catégorie $\mathcal{C}$ est subordonnée à la catégorie $\mathcal{C}'$ et que F est le foncteur d'oubli correspondent. Soit S un objet de $\mathcal{C}$ et $S' = F(S)$. Alors la restriction de F à $\mathcal{C}_S$ est un foncteur d'oubli et par suite la géométrie de S dans le sens de la théorie des catégories est subordonnée à la géométrie de S'. Si G est G' sont les groupes d'automorphismes de S et S' respectivement en $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, alors $F(G)$ est un sous-groupe de G', isomorphe à G et par suite la géométrie de S est subordonnée à la géometrie de S' dans le sens de F. Klein.

BIBLIOGRAPHIE

1. Klein F. — *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Erlangen, A. Deichert, 1872.
2. Rozenfeld B. A. — *Neevclidovî gheometrii*. Moskva, Gostehizdat 1955.
3. Schubert H. — *Categories*. Springer, 1972.
4. Veblen O., Whitehead J. H. C. — *The foundations of differential geometry*. Cambridge, University Press. 1932.

Reçu le 1.XI.1977

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f 1

RECENZII

LYNN ARTHUR STEEN (editor): *Mathematics Today: Twelve Informal Essays*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1978, VIII + 367 p.

Aceste 12 eseuri reflectă în bună măsură starea actuală a ştiinţelor matematice. Editorul a ales pentru o examinare detaliată anumite domenii care ilustrează diversitatea matematicii pure şi aplicate. Primul eseu este bazat pe o discuţie a lui Allen L. Hammond cu trei matematicieni din generaţii diferite: Lipman Bers, Dennis Sullivan şi Miller Puckette. Aceştia îşi expun punctele de vedere asupra invenţiei şi descoperirii în matematică. Cinci eseuri tratează realizări recente în domenii clasice: Ian Richards descrie cîteva contribuţii recente la rezolvarea unor probleme vechi de teoria numerelor; Jonathan Alperin prezintă legăturile dintre diversele tipuri de simetrie şi progresele făcute în clasificarea grupurilor finite; Roger Penrose arată că unele modele paradoxale ale geometriei neeuclidiene pot fi folosite ca modele ale universului; Philip Thompson prezintă lunga istorie a tehnicilor matematice folosite în meteorologie; Kenneth Appel şi Wolfgang Haken descriu simbioza intelectuală om-maşină. Următoarele cinci eseuri tratează domenii matematice apărute abia în ultimii ani: Ronald Graham discută unele idei noi din combinatorică; David S. Moore discută diferite probleme statistice legate de efectuarea unor experimente medicale; Martin Davis prezintă legătura dintre ideile abstracte legate de rezultatele de indecidabilitate ale lui Gödel şi analiza algoritmilor care disting între problemele solubile şi cele insolubile; Jacob Schwartz prezintă modele din teoria jocurilor care pot fi utilizate pentru intervenţii centralizate în economie; Frank C. Hoppensteadt descrie unele tehnici matematice utilizate în studiul fenomenelor ecologice. În ultimul eseu, Felix E. Browder şi Saunders Mac Lane fac un istoric al legăturii dintre matematică, ca ştiinţă abstractă, şi aplicaţiile ei.

Jack Weinstein

H. B. GRIFFITHS, P. J. HILTON: *A Comprehensive Textbook of Classical Mathematics. A Contemporary Interpretation*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1978, XXIX + 638 p.

Cartea a apărut întîi în 1970 la Van Nostrand Reinhold Company şi este acum retipărită fără schimbări. Ea se adresează în primul rînd profesorilor şi studenţilor din primii ani de facultate. Materialul ouprins este foarte variat şi este împărţit astfel: I. limbajul matematicii; II. teoria mulţimilor; III. aritmetică; IV. geometrie pe R^3; V. algebră; VI. sisteme numerice şi topologie; VII. calcul diferenţial şi integral; VIII. fundamente. Expunerea se caracterizează printr-o claritate deosebită; definiţiile sînt urmate de numeroase exemple; teoremele sînt demonstrate în amănunt; abundă indicaţiile bibliografice şi notele istorice. Un mare număr de exerciţii contribuie substanţial la valoarea educativă a cărţii.

Jack Weinstein

MARTIN GARDNER: *Aha! Insight*. Scientific American, Inc. W. H. Freeman and Company, New York City, San Francisco, 1978, VIII + 179 p.

Cartea este în primul rînd o culegere de probleme distractive, pe gustul unui public larg. Autorul urmăreşte să exemplifice fenomenele psihice, numite de psihologi „reacţii de tip *aha!*", şi care constau în esenţă în sclipiri de perspicacitate care duc la degajarea unei soluţii simple şi neaşteptate pentru o