Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f. 1

DES CATÉGORIES ET DES AMAS

PAR

DAN BRÂNZEI

0. Nous alons étudier la posibilité d'introduire une certaine opération ternaire sur tous les ensembles $\mathcal{C}(A, B)$ des morphismes d'une catégorie quelconque $\mathcal{C}$; si une telle posibilité existe, elle est unique pour $\mathcal{C}$ (théorème 8). Cette étude donne l'occasion de construire simultanémet des réalisations binaires propres pour une famille d'amas.

1. Un demi-amas [4] est un couple (G, τ), où τ est une opération ternaire de G, $\tau : G^3 \to G$, satisfaisant à la propriété *d'associativité ternaire* :

A.1 $$(x, y, z, u, v) \in G^5 \Rightarrow \tau(\tau(x, y, z), u, v) = \tau(x, \tau(u, z, y), v) = \tau(x, y, \tau(z, u, v)).$$

Un amas [4] est un demi-amas (G, τ) tel que :

A.2. $$x \in G \Rightarrow \tau(x, x, x) = x, \quad \text{et}$$

A.3. $$(x, y, z) \in G^3 \Rightarrow \tau(\tau(x, y, y), z, z) = \tau(\tau(x, z, z), y, y) \wedge \tau(x, x, \tau(y, y, z)) = \tau(y, y, \tau(x, x, z)).$$

Soient A et B des ensembles quelconques ; l'ensemble des applications partielles injectives de A dans B est noté ([1] et [2]) par $\mathcal{R}(A, B)$. A l'aide de la composition des relations binaires, $\circ : \mathcal{R}(B, C) \times \mathcal{R}(A, B) \Rightarrow \mathcal{R}(A, C)$ où $a\ \rho \circ \sigma\ c \Leftrightarrow \exists_b\ a\sigma b \wedge b\sigma c$ et de l'opération d'inversion $^{-1} : \mathcal{R}(A, B) \to \mathcal{R}(B, A)$ où $b\sigma^{-1}a \Leftrightarrow a\sigma b$, on construit une opération ternaire $\omega : [\mathcal{R}(A, B)]^3 \to \mathcal{R}(A, B)$, où $\omega(\rho, \sigma, \chi) = \chi \circ \sigma^{-1} \circ \rho$. On vérifie aisément que $(\mathcal{R}(A, B), \omega)$ est un amas. L'importance de ces amas est mise en évidence par le résultat de [4] :

Quel que soit l'amas (G, τ), il y a des ensembles $(A_G$ et B_G et un homomorphisme injectif $\kappa_G : (G, \tau) \to (\mathcal{R}(A_G, B_G), \omega)$.

On déduit à l'aide de ce résultat que la relation binaire homogène $<$ de G, définie par : $a < b \Leftrightarrow \tau(a, b, a) = a$, est une ordre sur G.

Un des buts de cette note est de trouver, simultanément, pour une famille d'amas, des homomorphismes κ vérifiant certaines conditions suplémentaires (voir le théorème 4).

2. Des catégories-amas. Pour une catégorie quelconque, $\mathcal{C}$ nous utiliserons les notations : Ob $\mathcal{C}$ est la classe des objets de $\mathcal{C}$; Mor $\mathcal{C}$ est la classe des morphismes de $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}(A, B)$ est l'ensemble des morphismes de $\mathcal{C}$ ayant la source A et le but B. En absence d' autres spéci-

fications nous noterons la composition partielle de Mor $\mathcal{C}$ par le symbole $.$; la classe des morphismes x *idempotents* de $\mathcal{C}$ (c'est à dire tels que $x \cdot x = x$) sera noté par Id $\mathcal{C}$.

Soit u un morphisme dans $\mathcal{C}(A, B)$. Un morphisme $\bar{u}$ satisfaisant aux conditions : $u \cdot \bar{u} \cdot u = u$ et $\bar{u} \cdot u \cdot \bar{u} = \bar{u}$ sera nommé *inverse generalisé* de u; ces morphismes $\bar{u}$ forment évidemment un sousensemble (éventuellement vide) $\mathrm{I}(u)$ de $\mathcal{C}(B, A)$. On obtient aisément les formules :

1°. $v \in \mathrm{I}(u) \Rightarrow u \in \mathrm{I}(v)$, 2°. $\bar{u} \in I(u) \Rightarrow u \cdot \bar{u} \in \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \wedge \bar{u} \cdot u \in \mathrm{Id}\,\mathcal{C}$.

Nous proposons le terme de *catégorie-amas* (C. A.) pour les catégories $\mathcal{C}$ satisfaisant aux conditions :

C.A.1 $\quad u \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \Rightarrow \mathrm{I}(u) \neq 0$,

C.A.2 $\quad (u, v) \in (\mathrm{Id}\,\mathcal{C})^2 \wedge u \cdot v \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \Rightarrow u \cdot v = v \cdot u$.

(Ces conditions généralisent des conditions étudiées dans [3]).

Théorème 1. *Quel que soit $\mathcal{C}$ une C.A et u un morphisme de $\mathcal{C}$, $\mathrm{I}(u)$ contient un seul élément.*

Démonstration. Soit $\bar{u}$ et $\bar{u}'$ des éléments de $\mathrm{I}(u)$. On a $u \cdot \bar{u}' = (u \cdot \bar{u} \cdot u) \cdot \bar{u}' = (u \cdot \bar{u}) \cdot (u \cdot \bar{u}') = (u \cdot \bar{u}') \cdot (u \cdot \bar{u}) = (u \cdot \bar{u}' \cdot u) \cdot u = u\bar{u}$. D'une manière analogue : $\bar{u}' \cdot u = \bar{u} \cdot u$, et puis : $\bar{u}' = \bar{u}' \cdot u \cdot \bar{u}' = (\bar{u} \cdot u) \cdot \bar{u}' = \bar{u} \cdot (u \cdot \bar{u}') = \bar{u} \cdot u \cdot \bar{u} = \bar{u}$, q.e.d.

On obtient aisément la formule :

3°. $\quad \bar{u} \in \mathrm{I}(u) \wedge \bar{v} \in \mathrm{I}(v) \wedge u \cdot v \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \Rightarrow \bar{v} \cdot \bar{u} \in \mathrm{I}(u \cdot v)$.

3. Réalisations binaires des C.A. Nous désignerons par $\mathcal{R}$ la catégorie ayant comme objets les ensembles et comme morphismes de source A et but B, les éléments de $\mathcal{R}(A, B)$ (la composition des morphismes de $\mathcal{R}$ étant donnée par la composition $\circ$ des relations binaires). On constate rapidement que $\mathcal{R}$ est une C.A.

L'opération $^{-1}$ d'inversion des relations binaires définit évidemment un épifoncteur contravariant complètement fidèle de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$.

Théorème 2. *Si $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ et l'image de $\mathcal{D}$ par le foncteur $^{-1}$ est contenue dans $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}$ est une C.A.*

La démonstration est immédiate; on déduit aussi :

Théorème 3. *Le système axiomatique C.A. 1, C.A. 2 est non-contradictoire et non-catégorique.*

Si $\mathcal{C}$ est une C.A. et κ un mono-foncteur $\kappa : \mathcal{C} \to \mathcal{R}$, nous dirons (comme dans [4]), que κ est une *réalisation binaire* de $\mathcal{C}$; si κ est fidèle nous dirons qu'elle est une réalisation binaire *propre*.

Soit $\mathcal{C}$ une C.A, U un *ensemble* d'objets de $\mathcal{C}$, A un objet quelconque de $\mathcal{C}$. Nous désignerons par $\tilde{A}$ ou $\kappa(A)$ l'ensemble $\bigcup_{X \in U} \mathcal{C}(X, A)$.

Définissons pour le morphisme u de $\mathcal{C}(A, B)$ une relation binaire $\kappa(u)$ ayant comme ensembles base A et B et définie par : $p\kappa(u)q \Leftrightarrow p = \bar{u} \cdot u \cdot p \wedge q = u \cdot p$. Evidemment, $\kappa(u)$ est une application partielle de $\tilde{A}$ dans $\tilde{B}$. Supposons $p\kappa(u)q$ et $p'\kappa(u)q$; on déduit $p = \bar{u} \cdot u \cdot p$, $p' = \bar{u} \cdot u \cdot p'$, $q = u \cdot p = u \cdot p'$ et puis : $p = \bar{u} \cdot u \cdot p = \bar{u} \cdot u\, p' = p'$. Donc $\kappa(u) \in \mathcal{R}(A, B)$.

Soit aussi $v \in \mathcal{C}(B, C)$. On a : $p[\kappa(v) \circ \kappa(u)]\, q \Leftrightarrow p = \bar{u} \cdot u \cdot p \wedge (u \cdot p) = \bar{v} \cdot v \cdot (u \cdot p) \wedge q = v \cdot u \cdot p \Rightarrow p = \bar{u} \cdot u \cdot p = \bar{u}(\bar{v} \cdot v \cdot u \cdot p) = (\bar{v} \cdot \bar{u}) \cdot (v \cdot u)\, p \wedge q = (v \cdot u)\, p \Rightarrow p\,\kappa(v \cdot u) \cdot q$ et $p\kappa(v \cdot u)\, q \Rightarrow p = (\bar{v} \cdot \bar{u}) \cdot (v \cdot u) \cdot p \wedge q = v \cdot u \cdot p \Rightarrow \bar{u} \cdot u \cdot p = \bar{u} \cdot u \cdot \bar{u} \cdot \bar{v} \cdot v \cdot u \cdot p = \bar{u} \cdot \bar{v} \cdot v \cdot u \cdot p = p \wedge (u \cdot p) = (u \cdot \bar{u}) \cdot (\bar{v} \cdot v) \cdot u \cdot p = (\bar{v} \cdot v) \cdot (u \cdot \bar{u} \cdot u)\, p = \bar{v} \cdot v \cdot (u \cdot p) \wedge q = v \cdot u \cdot p \Rightarrow p[\kappa(v) \circ \kappa(u)]\, q$. Donc : $\kappa(v) \circ \kappa(u) = \kappa(v \cdot u)$.

On déduit ainsi que κ est un foncteur, $\kappa : \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{R}$. Pour mettre en évidence le fait que r est associé au couple $(\mathcal{C}, U)$, nous allons le renoter par $\kappa_{\mathcal{C}, U}$. Remarquons aussi que $\kappa_{\mathcal{C}, U}$ est un monofoncteur.

Théorème 4. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des C.A où $\mathcal{D}$ est souscatégorie de $\mathcal{C}$; s'il existe un ensemble U d'objets de $\mathcal{C}$ tel que quel que soit un objet A de $\mathcal{D}$, il existe au moins un épimorphisme de $\mathcal{C}$ ayant A comme but et un élément de U comme source, alors il existe une réalisation binaire de $\mathcal{C}$ dont la restriction à $\mathcal{D}$ est propre.*

Démonstration. La réalisation binaire sera donnée par le foncteur $\kappa = \kappa_{\mathcal{C}, U}$ défini plus haut. Dans le but de prouver que $\kappa/\mathcal{D}$ est propre, considerons des morphismes $u \in \mathcal{D}(A, B)$ et $v \in \mathcal{D}(A', B')$ tels que $\kappa(u) \subseteq \kappa(v)$. On déduit $\kappa(A) = \kappa(A')$ et $\kappa(B) = \kappa(B')$, donc $A = B$ et $A' = B'$, et puis :

$$\forall_{x \in U}\ \forall_{p \in \mathcal{C}(x, A)}\ (\bar{u} \cdot u \cdot p)\ \kappa(v)\,(u \cdot p), \text{ ou :}$$

$$x \in U\ \forall_{p \in \mathcal{C}(x, A)}\ \bar{u} \cdot u \cdot p = (\bar{v} \cdot v)\,(\bar{u} \cdot u\ p) \wedge u \cdot p = v \cdot u \cdot \bar{u} \cdot p.$$

En particulier, pour un épimorphisme p (qui existe d'après les condions du théorème) on déduit : $u = v \cdot \bar{u} \cdot u$. D'une manière analogue on assure que $\kappa(v') \subseteq \kappa(u) \Rightarrow v = u \cdot \bar{v} \cdot v$. Si $\kappa(u) = \kappa(v)$ on déduit : $u = (u \cdot \bar{v} \cdot v) \cdot \bar{u} \cdot u = u \cdot (\bar{v} \cdot v)\,(\bar{u} \cdot u) = (u \cdot \bar{u} \cdot u) \cdot (\bar{v} \cdot v) = u \cdot \bar{v} \cdot v = v$. On constate ainsi que $\kappa/\mathcal{D}$ est propre.

4. Structure d'amas sur une catégorie. Nous dirons que le foncteur contravariant $\mathbf{c} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est une *structure d'amas* (S.A.) sur $\mathcal{C}$ si quels que soient les objets A et B de $\mathcal{C}$, la formule $\tau(x, y, z) = z \cdot \mathbf{c}(y) \cdot x$ définit une structure d'amas $(\mathcal{C}(A, B), \tau)$.

On remarque que les S.A. sur $\mathcal{C}$ conservent les objets de $\mathcal{C}$.

Théorème 5. *Si $\mathcal{C}$ est une C.A, il y a une S.A. canonique sur C.*

Démonstration. En effet, on désignera par le symbole-le foncteur qui conserve les objets et applique chaque morphisme dans son inverse généralisé. On vérifie aisément que $\bar{\ }$ est une S.A.

Théorème 6. *Si $\mathcal{C}$ est une C.A et $\mathbf{c}$ une S.A sur C, alors $\mathbf{c}$ et $\bar{\ }$ sont permutables.*

Démonstration. En effet $x \cdot \bar{x} \cdot x = x \wedge \bar{x} \cdot x \cdot \bar{x} = \bar{x} \Rightarrow \mathbf{c}(x) \cdot \mathbf{c}(\bar{x}) \cdot \mathbf{c}(x) = \mathbf{c}(x) \wedge \mathbf{c}(\bar{x}) \cdot \mathbf{c}(x) \cdot \mathbf{c}(\bar{x}) = \mathbf{c}(\bar{x})$, donc, quel que soit un morphisme x de $\mathcal{C}$ on a : $\mathbf{c}(\bar{x}) = \mathbf{c}(x)$.

Théorème 7. *Si $\mathcal{C}$ est une C.A contenue dans $\mathcal{R}$ et $\mathbf{c}$ une S.A sur C, alors $\mathbf{c}$ est un foncteur involutif : $\mathbf{c} \circ \mathbf{c} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.*

Démonstration. En utilisant A.2 on déduit : $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \Rightarrow f \cdot \mathbf{c}(f) \cdot f = f \Rightarrow f^{-1} \subseteq \mathbf{c}(f)$. Mais, dans ce cas particulier $f = f^{-1}$, donc $f \subseteq (\mathbf{c}(f))^{-1} \subseteq \mathbf{c}^2(f)$. Soit f, g, h. des morphismes de $\mathcal{C}(A, B)$; à l'aide de A.3 on déduit $[h \circ \mathbf{c}(h)] \circ f \circ [\mathbf{c}(g) \circ g] = [h \circ \mathbf{c}(h)] \circ \mathbf{c}^2(f) \circ [\mathbf{c}(g) \circ g]$. On remarque, [3], que $\mathbf{c}(g) \circ g$ est l'application identique de $\mathrm{pr}_1 g$ (domaine de défini-

tion de g) et $h \circ \mathbf{c}(h)$ est l'application indentique de $\mathrm{pr}_2 h$ (domaine des valeurs de h). En choisissant $h = g = c^2(f)$, les formules déduites assurent que $f = c^2(f)$.

Corollaire. *Si $\mathcal{C}$ est une* C.A. *contenue dans $\mathcal{R}$, il y a une seule* S.A. *sur $\mathcal{C}$.*

En effet, la condition A.2 appliquée pour f et $\mathbf{c}(f)$, nous assure que $\mathbf{c}(f) = f$.

Théorème 8. *Si $\mathcal{C}$ est une* C.A, *il y a une seule* S.A. *sur* **c**.

Démonstration. Supposons par absurde que **c** et **d** sont des S.A. distinctes sur $\mathcal{C}$: c'est à dire qu'il existe $u \in \mathcal{C}(A, B)$ tel que $\mathbf{c}(u) \neq \mathbf{d}(u)$. Soit $\mathcal{D}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ ayant seulement les objets A et B. $\mathcal{D}$ après le théorème 4 il y a un foncteur bijectif $\kappa : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{R}$. Evidemment $\mathcal{E}$ est une C.A. Mais $\mathbf{r}(\mathbf{c}(u))$ et $\kappa(\mathbf{d}(u))$ sont des inverses généralisés de $\kappa(u)$ donc $\kappa(\mathbf{c}(u)) = \kappa(\mathbf{d}(u))$, égalité contredite par $\mathbf{c}(u) \neq \mathbf{d}(u)$.

Une démonstration analogue permet de renoncer à la condition que $\mathcal{C}$ est contenue dans $\mathcal{R}$ dans le théorème 7.

Théorème 9. *La condition nécessaire et suffisante afin que la catégorie $\mathcal{C}$ soit une* C.A. *est l'existence d'une* S.A. *involutive sur $\mathcal{C}$.*

Démonstration. La nécessité de la condition énnoncée a été prouvée plus haut.

La condition A.2 assure que si **c** est une S.A involutive sur $\mathcal{C}$ alors quel que soit un morphisme u de $\mathcal{C}$, $\mathbf{c}(u)$ est un inverse généralisé de u. Suposons que u admet encore un inverse généralisé ; puisque **c** est involutif on peut la désigner par $\mathbf{c}(v)$. On a donc : $u \cdot \mathbf{c}(v) \cdot u = u \wedge \mathbf{c}(v)$ $u \cdot \mathbf{c}(v) = \mathbf{c}(v)$. Ces égalités deviennent, grâce à l'injectivité de **c** : $\tau(u, v, u) = u \wedge \tau(v, u, v) = v$ ou $v < u \wedge u < v$, donc $u = v$. Il résulte ainsi que si **c** est une S.A. involutive sur $\mathcal{C}$ alors quel que soit le morphisme u de $\mathcal{C}$, le seule inverse généralisé de u est $\mathbf{c}(u)$.

Soit x un idempotent de $\mathcal{C}$; on déduit que l'inverse généralisé de x est x, donc $\mathbf{c}(x) = x$ et par conséquent : $x = x \cdot \mathbf{c}(x) = \mathbf{c}(x) \cdot x$.

Si x et y sont des idempotents et appartiennent à $\mathcal{C}(A, A)$ on déduit à l'aide de A.3 : $x \cdot y = 1_A \cdot \mathbf{c}(x) \cdot x \cdot \mathbf{c}(y) \cdot y = \tau(\tau(1_A, x, x), y, y) = \tau(\tau(1_A, y, y), x, x) = 1_A \cdot \mathbf{c}(y) \cdot y \cdot \mathbf{c}(y) \cdot \mathbf{c}(x) \cdot x = y \cdot x$. Nous avons prouvé ainsi la conditions C.A.2 et donc que $\mathcal{C}$ est une C.A.

Nous considérons ce dernier résultat une justification pour l'utilisation du terme proposé plus haut de catégorie-amas ; le théorème 4 donne ainsi simultanément une réalisation binaire *propre* pour un *ensemble* d'amas.

BIBLIOGRAPHIE

1. Brânzei D. — *Structures affines et opérations ternaires.* An. şt. Univ. Iaşi, t. XXIII, s. I a, 1977, f. 1.
2. Brânzei D. — *On some Categories of Miron Spaces.* Lucrările Colocv. Naţ. de Geometrie şi Topologie, Timişoara 26—28 aprilie 1977.
3. Croisot R. — *Demi-groupes et axiomatique des groupes.* C. R. Acad. Sc. Paris 237 (1953), p. 778—780.
4. Vagner V. V. — *Teorija obsceonih grup i obsceonih grud.* Mat. sb. 32 (1953), 545—632.

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
Roumanie

Reçu le 20.IV. 1978

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXV, s. I a, 1979, f 1

A GENERALIZATION OF THE CONCEPT OF NEAR RING: INFRA-NEAR RINGS

BY

MIRELA ŞTEFĂNESCU

In this paper, we begin the study of an algebraic system which generalizes the concepts of ring, near-ring, weak ring (quasiring); we call it a *left infra-near ring*. It is a (nonabelian) group with respect to the addition, having also an associative multiplication, that satisfies a condition of left generalized distributivity over the addition.

The generalization of the distributivity in the definition of the linear algebra and the ring is an old question, whose roots can be found in Dickson's paper: „On finite algebras" (1905). The substantial developments in the theory of near-rings and near-fields (initiated by L. E Dickson himself and H. Zassenhaus in the years thirty) suggest it.

In Section 1, we give basic definitions and properties, as well as some examples of left infra-near rings. We discuss there the place of the element giving the „deviation" from the left distributivity in the right-hand side of the equality in the definition. Section 2 obtains the left infra-distributivity of an infra-near ring from the left distributivity of its binary multiplication over the composition of a ternary group (Prop. 2.3). Here we consider ternary groups in Certaine's sense ([6], Def. 3, Th. 4) for defining ternary near rings of first type and a new kind of ternary groups (Def. 2.2) for defining ternary near rings of second type. The axioms defining a ternary group of second type are independent (Prop. 2.2) and there exists a group associated canonically to each such a ternary group (Prop. 2.1). We distinguish the regular cases, namely the cases when ternary composition is induced by the binary group addition (see the equalities (2.6) and (2.16)). We show that the binary systems associated with the left ternary near rings are exactly the left infra-near rings introduced in Section 1. In the following sections, we choose the binary approach to the theory of infra-near rings. In Section 3, we present congruences, homomorphisms, ideals of the left infra-near rings. As usual, there is a bijection between the set of the congruences and the set of the two-sided ideals of a left infra-near ring I. We define right and left I-groups, left ternary I-groups and we show that there is an equivalence between the category of the left regular ternary groups over I and the category of the left I-groups. Section 4 presents a decomposition of a left infra-near ring I as a semidirect sum (as an additive group) of its maximal Z-infra-near ring and C-infra-near