REFERENCES

1. Céa J. — *Optimisation. Théorie et algorithmes*, Dunod, Paris, 1971.
2. Geoffrion, A. M., Hogan W. — *Coordination of two-level organizations with multiple objectives*, in „Techniques of Optimization" Academic Press, New York, 1972.
3. Glowinski R., Lions, J. L., Trémolières R. — *Analyse numérique des inéquations variationelles*, Dunod, Paris, 1976.
4. Hogan W. — *Directional derivatives for extremal-value functions with applications to the completely convex case*, Oper. Res. 21, 1973, 188—209.
5. Ilioi C. — *A unified approach of the descent methods for minimization of convex functionals*. Part I : *General theory*, An. şt. Univ. Matematica, Iaşi, Tom XXIV, 1978, 307—319 ; *Part II : Steplength algorithms*, Bull. Soc. Math. R.S.R. 23, 1979, 143—156
6. Ilioi C. — *Constrained minimization of nonsmooth functionals by an extension of the Frank-Wolfe algorithm*, An. şt. Univ. Matematica, Iaşi, Tom XXV, 1979, 332—336
7. Ilioi C. — *On the convergence of a feasible directions algorithm for minimization of convex nonsmooth constraints*, to appear in Mathematica, Cluj.
8. Ioffe, A. D., Tihomirov, V. M. — *The theory of the extremal problems*, (in Russian), Nauka, Mosków, 1974.
9. Levitin E. S. — *A general method of minimization for extremal nonsmooth problems* (in Russian), J. Vicisl. Mat. i Mat. Fiz. 9, 1969, 783—806.
10. Zoutendijk G. — *Methods of feasible directions*, Elsevier, 1960.
11. Polak E. — *Computational methods in optimization : a unified approach*, Academic Press, New York, 1971.

Received 11.X.1979

Faculty of Mathematics
University of Iaşi
Iaşi, R.S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXVI, s. I a, 1980, fasc. 1

SUR LES VECTEURS ET LES DISTRIBUTIONS DE KILLING ET LEURS EXTENSIONS

PAR

GH. GHEORGHIEV

1. Introduction. En examinant beaucoup de modèles géométriques) utilisée dans les théories unitaires des champs physiques (voir la bibliographie) on arrive à la conclusion, qu'on doit admettre l'existence d'un ou de plusieurs champs de vecteur de Killing orthogonaux sur les variétés pseudoriemanniennes, ce qui nous a conduit à considérer les distributions de Killing (§6). Après une exposition succinte de la méthode des coordonées non-holonomes et orthogonales sur les variétés de Riemann et de Lorentz (§2), de même que celle du repère mobile (§3), on passe à l'étude d'un champ de Killing généralisé et d'autres extensions (§4), apparus de même dans la théorie de la relativité sous la forme du mouvement rigide de Rosen-Rayner [9] ; ici sont inclus les vecteurs de Killing, le cas conforme, ainsi que celui de quasi-conformité. Dans le §5 on détermine tous les invariants orthogonaux d'un champ de Killing générique et on établit la liaison avec la courbure Frenet de ses lignes vectorielles et avec la torsion de non-holonomie de l'hypersurface normale. Ensuite, on étudie une p-distribution de Killing sur une variété de Riemann et on démontre quelques propriétés, comme par exemple : la distribution de Killing est localement symétrique tandis que sa distribution complémentaire est totalement géodésique, en étant aussi localement plate (§6).

Enfin, en suivant le procédé appliqué au vecteur de Killing, on esquisse quelques extensions d'une distribution de Killing qui conservent aussi les inclusions effectives (18) établies au §4.

2. Sur les coordonnées non-holonomes et orthogonales. La méthode des coordonées non-holonomes a été initiée par E. Cartan, T. Levi-Civita et Gr. Ricci au comencement du siècle.

Soient, M — une variété C^∞-différentiable, $T(M)$ et $T^*(M)$ — les fibrés tangent et cotangent de M, et, encore, $P(M)$ — le fibré principal des repères de M. En chaque point $x \in M$ on considère les repères linéaires duaux, (X_i), (ω^j), $i, j = 1, 2, \ldots, n = \dim M$, dans les fibres locales $T_x(M)$ et $T_x^*(M)$. Dans le cas d'un repère naturel, qui conduit au coordonées courvilignes ou holonomes sur M, on a : $X_i = \partial/\partial x^i$, $\omega^j = dx^j$, où (x^i) sont les coordonées de x, dans un charte locale autour de ce point. En général, dans le cas non-holonome, les crochets des vecteurs d'une base sont par donnés

(1) $$[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k,$$

où les fonctions C^k_{ij} sont les coéfficients de structure du repère non holonome considéré. La formule duale de (1) est

(1') $$d\omega^k = -1/2\ C^k_{ij}\, \omega^i \wedge \omega^j.$$

L'utilité de la méthode est evidencié surtout dans le cas où la variété M est dotée de structures supplémentaires — tenseur métrique ou d'autres objets géométriques. Alors, le choix des repères spécifiques est lié directement au groupe conservant l'objet fondamental de M.

En ce qui suit on considère la variété M — de Riemann (R) ou de Lorentz $(\mathfrak{L})$ [20], notée par (M, g). Alors, les G-structures correspondates sont formées par des repères orthogonaux, ayant comme groupes structuraux $O(n)$ ou $O(1, n-1)$ respectivement. On sait que (M, g) peut être munie d'une seul connexion ∇, conservée par G et a torsion nulle, donnée par [12]

(2) $$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma^k_{ij} X_k,$$

ou, par les formes de Pfaff correspondantes

(2') $$\omega^j_i = \Gamma^j_{ki}\, \omega^k.$$

Les coefficients Γ^j_{ki} sont précisement les symboles de Christoffel, généralisées pour un repère non holonome.

Maintenant en utilisant les dérivées non holonomes, c'est à dire, $df = f_{,k}\, \omega^k$, $dg_{ij} = g_{ij,k}\, \omega^k$, les coefficients Γ de la connexion de Levi-Civita sont donnés par

(3) $$\Gamma^i_{jk} = \left\{{i \atop jk}\right\} + \frac{1}{2}\left(C^i_{jk} - g^{ih}\, C^l_{kh}\, g_{lj} - g^{ih}\, C^l_{jh}\, g_{lk}\right),$$

où $\left\{{i \atop jk}\right\}$ sont les symboles de Christoffel de seconde espèce, exprimés par les dérivées non holonomes du tenseur métrique g de M.

S'il y a un repère orthonormal, on aura les relations

(4) $$\omega^i_j + \omega^j_i = 0, \qquad (\omega^i_j - \omega^j_i = 0),$$

d'où il résulte immédiatement que

(4') $$\Gamma^i_{kj} + \Gamma^j_{ki} = 0, \qquad (\Gamma^i_{kj} - \Gamma^j_{ki} = 0).$$

Dans le cas riemannien (R) on a $\Gamma^i_{ki} = 0$, $i, k = 1, \ldots, n$.

Si (M, g) est une variété $(\mathfrak{L})$ (ayant métrique hyperbolique normale), nous aurons

$$\Gamma^\alpha_{i1} - \Gamma^1_{i\alpha} = 0, \quad \Gamma^\beta_{i\alpha} + \Gamma^\alpha_{i\beta} = 0 \quad i = 1, \ldots, n, \quad \alpha, \beta = 2, \ldots, n$$

et, en particulier, il y a $\Gamma^\alpha_{i\alpha} = 0$.

Puisque, dans le cas orthonormé on a $\left\{{i \atop jk}\right\} = 0$, la formule (3) fournira immédiatement la liaison directe entre les coefficients de structure du repère non holonome avec ceux de la connexion ∇. D'où il y a

(3') $$2\,\Gamma^i_{jk} = C^i_{jk} - C^k_{ji} + C^j_{ki}$$

et, réciproquement, on a

(3'') $$C^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}.$$

Exemple. On déduit sans difficulté la formule

$$\operatorname{div} X_i = \sum_k \Gamma^k_{ki}.$$

Puisque ∇ est la connexion de Levi-Civita on obtient les identités

$$\nabla_X g(Y, Z) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

La courbure de ∇ est donnée par [12]:

(5) $$R(X, Y)Z = \{[\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}\} Z,$$

d'où il résulte la formule de la courbure riemanniene

$$R(U, Z, X, Y) = g(R(X, Y)Z, U), \ \forall X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M).$$

Dualement, en utilisant les expressions locales de la connexion et de la courbure, on a

$$d\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k + \Omega^j_i, \quad \text{où} \quad \Omega^j_i = R^j_{ikl}\, \omega^k \wedge \omega^l.$$

Alors, on peut écrire symboliquement les équations de structure d'Élie Cartan sous la forme

(6) $$d\bar{\omega} = \bar{\omega} \wedge \omega, \ d\omega = \omega \wedge \omega + \Omega,$$

où $\Omega = R\bar{\omega} \wedge \bar{\omega}$, et $\bar{\omega} = [\omega^1, \ldots, \omega^n]$, $\omega = [\omega^j_i]$.

Enfin, on rappelle qu'au changement du repère (X_i), (ω^j) par une matrice orthogonale $A(x, n)$ $(AA' = I)$, nous aurons

(7) $$\bar{\bar{\omega}} = A\bar{\omega} \quad \text{et} \quad \bar{\omega} = A\, dA' + A\omega A'.$$

Par conséquant si on considère le point $x \in M$ fixé et on désigne par δ l'accroissement donné aux paramètres u du groupe G, nous avons $\delta x = 0$, $\bar{\bar{\omega}}(\delta) = \bar{\omega}(\delta) = 0$, tandis que $\bar{\omega}(\delta) = A\delta A' \neq 0$ seront précisement les formes invariantes du groupe structural G, qui peut être $O(n)$ ou $O(1, n-1)$. Si on considérera encore un déplacement arbitraire d, on peut évaluer alors les covariants bilinéaires de $d\bar{\bar{\omega}}$ et de $d\bar{\omega}$ par (6): il y a

(8) $$d\bar{\bar{\omega}}(d, \delta) = [\bar{\bar{\omega}}(d) \wedge \bar{\omega}(\delta)], \ d\bar{\omega}(d, \delta) = [\omega(d) \wedge \bar{\omega}(\delta)]$$

par ce que la courbure Ω est une forme principale et on a $\Omega(d, \delta) = 0$.

3. Sur la méthode du repère mobile. Soit $\Delta(M) \subset T(M)$ une distribution différentielle p-dimensionelle de la variété (M, g). Cela veut dire qu'on donne l'application régulière $\Delta : D \subset M \to T(M)$, $x \to \Delta_x \subset T_xM$, où Δ_x est un sous-espace fermé de l'espace tangent, isomorphe à $\mathbf{R}^p$ pour chaque $x \in M$. Alors, la distribution donnée est un sous-fibré du $T(M)$ à fibre type $\mathbf{R}^p$ ayant la même base M. Puisque en $T(M)$ nous avons à la disposition une métrique, on peut construire, en chaque $x \in M$, l'espace complémentaire $\Delta^\perp_x$ ainsi que $T_x(M) = \Delta_x \oplus \Delta^\perp_x$. L'ensemble $\bigcup_{x \in M} \Delta^\perp_x = \Delta^\perp(M)$ sera aussi un sous-fibré de $T(M)$, de fibre $\mathbf{R}^{n-p}$, ayant évidemment $\Delta(M) \oplus \Delta^\perp(M) = T(M)$, où chaque terme de la somme est doté de la métrique induite par g.

On peut aussi adapter le repère non holonome et orthogonal, en le décomposant en deux sous-repères complémentaires $(X_{i'}, X_a)$ où $i' = 1, \ldots, n-p$ et $a = n-p+1, \ldots, n$, de manière que le sous-ensemble (X_a), soit un repère (orthogonal) dans chaque fibre Δ_x, tandis que $(X_{i'})$ — dans $\Delta_x^{\perp}$. Il en résulte la décomposition correspondante du corepère, en $(\omega^{i'}, \omega^a)$.

Maintenant, nous nous proposons d'évaluer les invariants orthogonaux d'une distribution $\Delta(M)$. Pour abréger tant l'exposition de la méthode, que les calculs nous supposons comme connu sur $\Delta(M)$, (X_a), qui sera un repère canonique de la variété, en général non holonome, tangente à $\Delta(M)$[1]. Il reste à déterminer seulement les composantes du sous-repère $(X_{i'})$ normales à $\Delta(M)$. Or, la distribution $\Delta(M)$ est donnée, localement, par le système de Pfaff

$$\omega^a = 0, \quad a = n-p+1, \ldots, n, \tag{9}$$

où $\omega^a(x, u, dx)$ dépendent aussi de u^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$-paramètres du groupe structural G, qui agit sur la variété (M, g).

On sait que la méthode du repère mobile (MRM) revient à l'étude de solutions, ayant la dimension maximum, d'une distribution involutive. Pour une distribution quelconque, cela revient à étudier le système de Pfaff qui la définit, c'est à dire, chez nous le système (9), relativement au groupe structural G [10]. Alors, le covariant bilinéaire de l'expression $d(9)$ appliquée au premier membre de (9), modulo (9), avec d—arbitraire et δ — à l'intérieur du groupe G, nous donne

$$\omega^a_{i'}(\delta)\ \omega^{i'}(d) = 0 \quad i' = 1, \ldots, n-p, \quad a = n-p+1, \ldots, n.$$

Puisque $\omega^i(d)$ sont quelconques, il y a

$$\omega^a_{i'}(\delta) = 0 \tag{10}$$

et alors, le prolongement du système initial sera donné par

$$\omega^a_{i'} - \Gamma^a_{ji'}\,\omega^j = 0 \quad j = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Remarque. (10) est précisement le système de définition du sous-groupe G_1 (qui peut être $O(n-p)$ si la variété M est de Riemann), exprimé par les formes invariantes du groupe G.

L'étape suivante de la MRM sera un nouveau prolongement, c'est à dire, on doit évaluer maintenant le covariant bilinéaire de l'expression d (11) modulo (9) et (11), pour d—quelconque et δ—à l'intérieur du sous groupe G_1. Après des calculs standard, on arrive aux équations

$$\begin{aligned} &\delta\Gamma^a_{bh'} - \Gamma^a_{bh'}\,\omega^{h'}_{i'}(\delta) = 0. && i', j', h', = 1, 2, \ldots, n-p \\ &\delta\Gamma^a_{j'i'} - \Gamma^a_{j'i'}\,\omega^{j'}_{i'}(\delta) - \Gamma^a_{i'h'}\,\omega^{h'}_{i'}(\delta) = 0, && a, b = n-p+1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{12}$$

Naturellement, les intégrales premières du système (12) sont précisement les invariants orthogonaux de la distribution etudiée. Si, dans cette étape de la MRM, on peut épuiser tous les paramètres secondaires du groupe

[1] L'hypothèse este justifiée dans l'étude d'une distribution de Killing et ses généralisations (§6).

G_1, on arrive au repère canonique et à la détermination de tous les invariants cherchés. Sinon, on doit continuer le prolongement.

4. Sur les vecteurs de Killing généralisés. Dans ce qui suit nous étudierons les champs vectoriels de Killing et quelques unes de ses généralisations. Dans ce but on doit associer au tenseur fondamental g (positif défini ou de type hyperbolique normal) la dérivée de Lie, $\mathfrak{L}_{\bar v}\, g$, relative à un vecteur $\bar v$, pour le moment arbitraire ; on l'a noté par $s(\bar v, g) = \mathfrak{L}_{\bar v}\, g$, puisqu'elle est la partie symétrique du tenseur gradient $\nabla\bar v$, appelé en mécanique, tenseur de déformation de la vitesse $\bar v$. La définition de plus bas donnée au vecteur de Killing généralisé (Kg) est basée sur deux résultats de la théorie matricielle [2]. Le premier, est le théorème : la condition nécessaire et suffisante pour amener deux matrices symétriques à la forme diagonale par une transformation orthogonale, est qu'elles soient permutables ; chez nous, on doit avoir $g\, s(\bar v, g) = s(\bar v, g)\, g$. Le deuxième résultat se refère au cas quand une des matrices est positive définie ; alors, il existe une transformation inversable (τ) qui amène g (pour la variété (R)) à la forme Id, tandis que $s(\bar v, g)$ reçoit la forme diagonale. Il me semble intéressant de savoir si le dernier résultat, peut être étendu, eventuellement avec des conditions supplémentaires à la métrique de type $(\mathfrak{L})$, ou même pseudoeuclidienne ; il est possible que cela entrainerait quelques restrictions pour la transformation (τ). Les propriétés rappelées de l'espace modèle peuvent être transposées usuellement sur la variété (M, g), ce qui assurera la consistance de nos généralisations de ci-dessous du vecteur (K).

Soient, la varieté (R) ou $(\mathfrak{L})$, (M, g), rapportée à un repère non holonome et orthogonal et $\mathfrak{L}_{\bar v}\, g = s(\bar v, g)$, le tenseur symétrique associé à g. On suppose qu'il existe un difféomorfisme $\tau \in \mathrm{Diff}(M)$ afin que g reçoive la forme canonique,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (\omega^i)^2 \quad \text{ou} \quad ds^2 = (\omega^1)^2 - \sum_{a=2}^{n} (\omega^a)^2 \tag{13}$$

et afin que la matrice transformée $s(\bar v, g, \tau)$ devienne diagonale.

Définition 1. *Si pour chaque transformation du groupe structural G, qui conserve la forme canonique de g et la direction de $\bar v$, le tenseur associé $s(\bar v, g)$ maintient toujours sa forme diagonale, alors $\bar v$ est appelé le vecteur de Killing généralisé* (Kg).

Si $\bar v$ est un vecteur (Kg), les transformations du groupe G conservant la direction de $\bar v$ appartiennent au sous-groupe G_1 de G, qui peut être $O(n-1)$ ou $O(1, n-2)$. D'autre part, si on considère l'hypersurface V_n^{n-1} normale à $\bar v$, il résulte que le tenseur raccoursi $\mathfrak{L}_{\bar v}\, g/V_n^{n-1}$ reste aussi diagonale pour chaque transformation de G_1, groupe qui agit sur V_n^{n-1}. D'ici on peut détacher une autre extension du vecteur (K) qui comprend, en particulier, le mouvement „rigide" sur (R) ou sur $(\mathfrak{L})$, introduit par N. Rosen et C. Rayner en théorie de la relativité générale [9, 11].

Soient, le champ vectoriel $\bar v$ sur (M, g), V_n^{n-1} — l'hypersurface normale à $\bar v$ et la dérivée de Lie $\mathfrak{L}_{\bar v}\, g$, raccoursi sur V_n^{n-1}, c'est à dire $\mathfrak{L}_{\bar v}\,(g/V_n^{n-1}) = s_r(\bar v, g)$.

On suppose qu'il existe un difféomorphisme τ_r de manière que la métrique induite g/V_n^{n-1} soit amenée à la forme canonique et la $s_r(\bar v, g)$ devienne diagonale.

Définition 2. *Si chaque transformation du groupe structural G_1 de la V_n^{n-1}, conserve la forme canonique de g/V_n^{n-1} et la forme diagonale de la $s_r(\bar{v}, g)$, alors $\bar{v}$ sera vecteur de Killing généralisé, au sens de Rosen-Rayner, $(K_r g)$.*

Il est clair que chaque vecteur $\bar{v}$ de Killing généralisé est aussi de type $(K_r g)$, d'où il suit que toutes les propriétés d'un champs de type $(K_r g)$ appartiennent aussi aux vecteurs (Kg) ; mais ces derniers pourraient avoir encore d'autres propriétés, spécifiques aux vecteurs de Killing généralisés.

Nous allons exprimer cette relation peut-être improprement, par le signe d'inclusion, c'est à dire, par $Kg \subset K_r g$.

Soit maintenant $\bar{v} = v\, I_n$, I_n étant le verseur et v — la norme de v affectée éventuellement de signe pour certains champs sur la variété $(\mathfrak{L})$. On considère la dérivée covariante $\nabla_{I_n} I_n$, appelée le vecteur de la première courbure Frenet des lignes vectorielles (λ) du champ $\bar{v}$; ceci peut être écrit encore $\nabla_{I_n} I_n = \varkappa_1 I_1$, en mettant en évidence tant la première courbure que la première normale de (λ).

D'autre coté, on voit aisément que si $\bar{v}$ est de type (Kg), alors la partie tangente à V_n^{n-1} du gradient $\nabla \lg v$, sera précisement

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{Grad} \lg v = -\nabla_{I_n} I_n \text{ et on a } \varkappa_1 = \| \operatorname{Grad} \lg v \|.$$

Cette formule exprime une propriété spécifique d'un champ de Killing généralisé.

Puis, on voit clairement que le tenseur raccoursi $s_r(\bar{v}, g)$ définit sur V_n^{n-1} une forme bilinéaire ; si $\bar{v}$ est de type $K_r g$, la forme considérée se réduit au facteur $v/2$, à la deuxième forme fondamentale de la V_n^{n-1}, rapportée aux directions principales (de Darboux), $\bar{d}_{i'}(i' = 1, \ldots, n-1)$ de l'hypersurface normale. Il résulte que les verseurs $(\bar{d}_{i'}, I_n)$ constituent un repère canonique du champ $\bar{v}$. Si $\bar{v}$ est de type $K_r g$, alors les composantes de $s_r(\bar{v}, g)$, au facteur $v/2$ près, par rapport à $\bar{d}_{i'}$, seront les courbures principales de V_n^{n-1} et par suite, on obtient $n-1$ invariants orthogonaux de $\bar{v}$. Donc nous avons mis en évidence n invariants du champs $\bar{v}$ de type $(K_r g)$. Je ne peux pas affirmer qu'ils épuisent tous les invariants fonctionnelement indépendents pour ce type de vecteurs ; je soupçonne qu'il y a aussi d'autres invariants. Enfin, on remarque que la normale I_1 des lignes vectorielles (λ) étant un verseur invariant, les paramètres directeurs de I_1 par rapport au repère $(\bar{d}_{i'})$ seront des constantes. On a le théorème

Théorème 1. *Soient un champ $\bar{v}$ de type $K_r g$ et V_n^{n-1} l'hypersurface normale à $\bar{v}$. Alors le tenseur raccoursi $s_r(\bar{v}, g) = \mathfrak{L}_{\bar{v}}(g/V_n^{n-1})/V_n^{n-1}$ est, au facteur $v/2$, près, la deuxième forme fondamentale rapportée aux directions principales de V_n^{n-1}. Si de plus, on a la formule* (14), *alors $\bar{v}$ sera le vecteur de Killing généralisé.*

Maintenant nous signalerons quelques cas particuliers remarquables des champs $\bar{v}$ de types $K_r g$ ou (Kg).

1) Si $s_r(\bar{v}, g) = 0$, alors $\bar{v}$ est la vitesse d'un mouvement rigide au sens de Rosen-Rayner ; dans ce cas on peut dire que $\bar{v}$ est un vecteur de Killing réduit, (K_r). En particulier, si $s(\bar{v}, g) = 0$, c'est à

dire, si $L_{\bar{v}} g = 0$, alors $\bar{v}$ définit un mouvement sur la variété (M, g), en étant un vecteur de Killing. Du théorème précédent on déduit le

Théorème 2. *Soit un champ $\bar{v}$ de type (K_r), ayant $s_r(\bar{v}, g) = 0$. Alors, l'hypersurface normale à $\bar{v}$ est localement plate ayant les directions asymptotiques indéterminées.*

En particulier, si $\bar{v}$ est le vecteur de Killing, la valeur v sera invariante, étant donnée par $\nabla \lg v = -\nabla_{I_n} I_n$, où I_n est le verseur de $\bar{v}$.

Remarque 1. Si $M = \mathbf{R}^n$, alors la V_n^{n-1} normale à $\bar{v}$, de type (K_r), se réduit au hyperplan non holonome.

Remarque 2. Si $\bar{v}$ est un vecteur de Killing il suit $\operatorname{div} \bar{v} = 0$, $\nabla_{\bar{v}} \bar{v} = -1/2\, \nabla v^2$.

2) Si on a $s_r(\bar{v}, g) = \lambda g/V_n^{n-1}$, on peut dire que $\bar{v}$ est la vitesse d'un mouvement „rigide-conforme" sur (M, g) [9], ou que le vecteur est de type (K_{rc}). En particulier, si on a $s(\bar{v}, g) = \mu g$, où $\mu = \operatorname{div} \bar{v}/n$, on arrive au mouvement conforme sur (M, g) et le vecteur $\bar{v}$ est de type (K_c). Du théorème 1 il résulte le suivant

Théorème 3. *Soit le champ $\bar{v}$ de type K_{rc}, ayant $s_r(\bar{v}, g) = \lambda g/V_n^{n-1}$. Alors, la V_n^{n-1} normale à $\bar{v}$ est une hypersurface localement sphérique ayant indéterminées les directions principales* (de Darboux). *En particulier, si $\bar{v}$ est un vecteur de Killing conforme, alors la valeur v est invariante, et est donnée par la formule*

$$\nabla \lg v = -\nabla_{I_n} I_n - \frac{\operatorname{div} \bar{v}}{2v} I_n .$$

Remarque. Si on a $M = R^n$, alors V_n^{n-1} normale à $\bar{v}$, de type K_{rc}, est une hypersphère non holonome.

3) Un dernier exemple se réfère aux difféomorphismes d'un paramètre, défini par $\bar{v}$, qu'on peut appeler quasi-conformes.

Soit (M, g) rapportée au repère (X_i), (ω^j). Alors $\bar{v}$ peut être donné localement par $\bar{v} = v_i X_i$, c'est à dire par les composantes $v_i(x)$. Si $\bar{v}$ est un vecteur de Killing généralisé, les composantes v_i sont les solutions du système différentiel

$$\text{(15)} \qquad v_{(ij)} = 0, \quad i \neq j,$$

et vérifient encore d'autres conditions de la définition 1. D'autre coté, récemment il y a été établi un critérium, exprimé en coordonées cartésiennes, afin qu'une famille d'homéomorphismes à un paramètre de R^n ou de C^n, soit d'homéomorphismes quasi-conformes [4, 17]. En transposant ce critérium sur (M, g) et en l'exprimant sous forme invariante, il suit que le champ générateur $\bar{v}$ doit vérifier l'inégalité

$$\text{(16)} \qquad \left\| \mathfrak{L}_{\bar{v}} g - \frac{\operatorname{div} \bar{v}}{n} I \right\| < C \text{ (const)}, \quad \forall x \in D \subset M,$$

où D est un domaine convexe homéomorphe à une boule de l'éspace modèle de M, domaine qui peut appartenir à une carte de coordonées locales sur M.

En effet, par l'inégalité (16), on mésure la déviation d'un difféomorphisme quasi-conforme, d'un autre — conforme. Maintenant, si $\bar{v}$ est de Killing généralisé, le tenseur $\mathfrak{L}_{\bar{v}}\, g$ sera diagonale. I étant la matrice unité, l'inégalité (16) sera vérifiée si les inégalités numériques suivantes sont satisfaites.

$$\left| v_{(i)i} - \frac{\operatorname{div} \bar{v}}{n} \right| \leq \frac{C}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Ceci montre que les difféomorphismes quasi-conformes à un paramètre, engendrés par $\bar{v}$, et vérifiant (16), sont englobés en ceux définis par $\bar{v}$ de type $(Kg.)$

En vertu du théorème 1 il suit qu'un champ $\bar{v}$ de type (Kg) sera un vecteur quasi-conforme, ou, raccoursi (K_{qc}) si, la composante $\nabla \lg v \cdot I_n$, et aussi les courbures principales de la V_n^{n-1} normale à $\bar{v}$, sont bornées, les dernières étant encore de même signe. Ceci nous permet d'affirmer que *groso modo*, les transformations quasi-conformes d'une variété de Riemann sont ces difféomorphismes qui transforment une boule en un domaine, borné par un hyperellipsoïde, la constante C de l'inégalité (16) étant liée au rapport entre les sémiaxes extrémales de cet ellipsoïde.

Remarque. Si il y a un champ $\bar{v}$ de type $K_r\, g$ et la sous-variété V_n^{n-1} normale à $\bar{v}$ a les courbures principales bornées et de même signe, alors on peut dire que le vecteur $\bar{v}$ est de type quasiconforme, ou, (K_{rqc}).

Maintenant, nous pouvons énoncer le dernier théorème :

Théorème 4. *Soit $\bar{v}$ un champ de type K_{rg} sur une variété de Riemann (M, g). Le vecteur $\bar{v}$ définira des difféomorphismes quasi-conformes à un paramètre, si l'hypersurface normale à $\bar{v}$ est localement convexe, c'est a dire toutes les courbures principales sont bornées en ayant le même signe. Si $\bar{v}$ est de type (Kg), ayant la norme v monotone et vérifiant le formule* Grad lg $v = -\varkappa_1 I_1$, *il sera du type (K_{qc}).*

En récapitulant, on peut affirmer que les dépendances de tous les types de champs introduits dans ce paragraphe sont englobés dans le schéma des inclusions suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} K & \subset & K_c & \subset & K_{qc} & \subset & K_g \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ K_r & \subset & K_{rc} & \subset & K_{rqc} & \subset & K_{rg} \end{array} \tag{18}$$

5. Les invariants orthogonaux d'un vecteur de Killing. On choisit le repère (X_i) de manière que le vecteur de Killing soit $\bar{v} = v X_n$. Alors, l'hypersurface normale à $\bar{v}$ est donée localement par l'équation

$$\omega^n = 0. \tag{19}$$

En utilisant la MRM exposée en §3, on remarque que dans l'hyperplan tangent à V_n^{n-1} en $x \in D \subset M$ où agit le groupe $O(n-1)$ (si M serait une variété (K)), ayant les formes invariantes $\omega_{i'}^{j'}(\delta) = -\omega_{j'}^{i'}(\delta)$ $(i' \neq j' = 1, \ldots, n-1)$, dépendant de C_{n-1}^2 paramètres secondaires, le système prolongé sera

$$\omega^n = 0, \ \omega_{i'}^n = \Gamma_{ji'}^n \omega^j \to i' = 1, \ldots, n-1 \ ; \ j = 1, \ldots, n-1, n. \tag{20}$$

où les coefficients $\Gamma_{ji'}^n$ dépendent encore de paramètres secondaires. Si on considère $x \in D$ fixé, alors on a

$$\omega^i(\delta) = 0 \quad \omega_{i'}^n(\delta) = 0, \quad \omega_{i'}^{j'}(\delta) \neq 0, \quad \delta\, \Gamma_{ji'}^n \neq 0.$$

En utilisant les équations de structure (6), nous évaluerons maintenant le covariant bilinéaire du premier membre de la rélation (20_2) modulo (20), pour un déplacement arbitraire d et pour l'accroissement δ à l'intérieur du groupe $O(n-1)$. Après les calculs effectués selon le schéma du §3, on arrive au système différentiel suivant.

$$\delta\Gamma_{ni'}^n - \Gamma_{nj'}^n \omega_{i'}^{j'}(\delta) = 0, \quad \delta\Gamma_{i'j'}^n - \Gamma_{i'h'}^n \omega_{j'}^{h'}(\delta) - \Gamma_{j'h'}^n \omega_{i'}^{h'}(\delta) = 0. \tag{21}$$

Si $\Gamma_{n1}^n \neq 0$ et $\Gamma_{n\alpha}^n = 0$, $\alpha = 2, n-1$, du premier sous-système (21_1), il suit que

$$\omega_1^{i'}(\delta) = 0 \tag{*}$$

et par conséquent $n-1$ paramètres secondaires ont été fixés et $\omega_1^{i'}$ deviennes des formes principales. Or, de (21_1) pour $i' = 1$, il résulte que $\delta\Gamma_{n1}^n = 0$, et, par suite $\Gamma_{n1}^n = -\varkappa_1$ est un invariant — la première courbure de Frenet d'une ligne de Killing. Puisque $\nabla_n X_n = -\nabla \log v$ et $\nabla_n X_n \cdot X_n = 0$, il suit que la courbure $\varkappa_1$, le long d'un ligne de Killing, est constante ; elle peut varier si on passe d'une ligne à une autre de la congruence de courbes Killing.

Remarque. Si dim $M = 2$, on a sur M un réseau sémi-géodésique où les parallèles sont des cercles géodésiques de Gauss. Si dim $M = 3$, j'ai montré autrefois que la deuxième courbure de Frenet d'une ligne du Killing est aussi constante. Ceci me fait supposer que toutes les courbures d'une ligne de Killing sont constantes. On pourrait le démontrer, éventuellement par induction, selon $n = \dim M$, en utilisant les formules de Frenet bien connues.

En revenant, on considère maintenant les équations du deuxième soussystème de (21_2) par $j' = 1$. En tenant compte de (*), on a

$$\delta\Gamma_{j'1}^n - \Gamma_{1h'}^n \omega_{j'}^{h'}(\delta) = 0.$$

Si tous les coefficents $\Gamma_{j'1}^n = 0$, $j' = 3, \ldots, n-1$, on obtinet $\omega_{j'}^2(\delta) = 0$ et alors on a $\delta\, \Gamma_{21}^n = 0$. Nous arrivons ainsi aux nouvelles formes principales $\omega_{j'}^2$, $(j' = 3, \ldots, n-1)$ et à l'invariant $\Gamma_{21}^n = \tau_2$.

Ensuite, en prenant une nouvelle partie du système (21_2) correspondante à $j' = 2$ et en procédant analoguement, on obtient un nouvel set de formes principales et encore l'invariant $\Gamma_{32}^n = \tau_3$, au détriment des paramètres secondaires, dont le nombre a diminué. On continue le procéssus jusqu'à l'épuisement des paramètres secondaires. Dans le cas d'un vecteur de Killing générique le procéssus s'arrette à cette étape de la MRM et on obtient tous les $n-1$ invariants d'un champ $\bar{v}$ de type (K). Ils sont

$$\Gamma_{n1}^n = -\varkappa_1, \quad \text{et} \quad \Gamma_{\alpha\alpha-1}^n = \tau_\alpha^1, \ \alpha = 2, \ldots, n-1.$$

Pour donner l'interprétation aux invariants τ_α, nous évaluons l'expression $d\,\omega^n \wedge \omega^n$, en tenant compte que tous les coefficients $\Gamma_{ji'}^n$, sont nuls à l'exception de $\varkappa_1$ et τ_α. Après des calculs, on arrive à

$$d\omega^n \wedge \omega^n = \sum_{\alpha=2}^{n-1} \tau_\alpha \, \omega^{\alpha-1} \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^n.$$

En conséquence, τ_α sont les composantes de la torsion de nonholonomie de l'hypersurface normale à $\bar{v}$.

Cas particulier. Si le champ de Killing $\bar{v}$ est holonome, c'est à dire — l'hypersurface normale à v est une famille à un paramètre d'hypersurfaces ordinaires on doit avoir :

$$d\omega^n \wedge \omega^n = 0$$

ce qui entraine les relations

$$\tau_\alpha = 0, \ \alpha = 2, \ldots, n-1.$$

Donc, un vecteur de Killing holonome, a un seul invariant orthogonal — la première courbure de Frenet $\varkappa_1$, de la ligne vectorielle (λ). Cet invariant dépend seulement de $n-1$ arguments.

6. Les distributions de Killing et extensions. On suppose dorénavant que la variété de Riemann (M, g) admet p vecteurs de Killing orthogonaux, $\bar{v}_a$, $a = n-p+1, \ldots, n$, et on dit alors qu'on a une p-distribution de Killing $\Delta(M)$, définie sur M. On peut adapter le repère considéré (X_i) en le décomposant en deux sous-repères complémentaires $(X_{i'}, X_a)$, tels que $\bar{v}_a = v_a X_a$ où, $i', j' = 1, 2, \ldots, n-p$; $a, b = n-p+1, \ldots, n$. Alors, (X_a) sera un repère de la distribution $\Delta(M)$, tandis que la partie $(X_{i'})$, définira la distribution complémentaire $\Delta^\perp(M)$ et on a la somme de Whitney

$$\Delta(M) \oplus \Delta^\perp(M) \equiv T(M).$$

Puisque nous avons les conditions

$$\mathfrak{L}_{\bar{v}_a} g = 0,$$

en utilisant les formules du §2, celles-ci deviennent

$$g(\nabla_X \bar{v}_a, Y) + g(X, \nabla_Y \bar{v}_a) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

En particulier, pour $X = X_i$, $Y = X_j$, en ayant aussi $\bar{v}_a = v_a X_a$, on obtient

$$g(\nabla_{X_i} v_a X_a, X_j) + g(X_i, \nabla_{X_j} v_a X_a) = 0,$$

ou

$$g(v_{a,i} X_a + v_a \Gamma^h_{ia} X_h, X_j) + g(X_i, v_{a,j} X_a + v_a \Gamma^h_{ja} X_h) = 0.$$

D'ici on obtient le système suivant de définition de la distribution de Killing $\Delta(M)$

$$\delta_{aj} v_{a,i} + v_{a,j} \delta_{ai} + v_a (\Gamma^j_{ia} + \Gamma^i_{ja}) = 0 \qquad \begin{matrix} i, j = 1, 2, \ldots, n \\ a = n-p+1, \ldots, n. \end{matrix} \tag{22}$$

Si $i = j = a$ on a $v_{a,a} = 0$; pour $i = a \neq j$ $(j = a \neq i)$ il en résulte

$$v_{a,j} + v_a \Gamma^j_{aa} = 0,$$

ou

$$\nabla \lg v_a + \Gamma^h_{aa} X_h = 0. \tag{23}$$

En tenant compte de (2) on arrive immédiatement à la formule

$$\nabla_{X_a} X_a = - \nabla \lg v_a, \tag{23'}$$

qui montre que le vecteur de la première courbure de Frenet définie par les champs $\bar{v}_a$ est un gradient. Donc, chaque vecteur de Killing $\bar{v}_a$ est normal à une famille d'hypersurfaces (holonomes) et on a la

Proposition 1. *A une p-distribution de Killing $\Delta(M)$ on peut associer une distribution involutive $\delta(M)$, dont les variétés intégrales de dimension maximum sont définies localement par*

$$v_a = C_a \ (\text{const}) \ a = n-p+1, \ldots, n. \tag{24}$$

En considérant le cas général $i \neq a \neq j$, de (22) on déduit les conditions

$$\Gamma^j_{ia} + \Gamma^i_{ja} = 0 \ (i \neq a \neq j) \tag{25}$$

Remarque 1. Si la distribution de Killing $\Delta(M)$ est définie par p vecteurs orthonormés, englobés dans un repère (X_i), alors (25) constitue son système de définition.

Remarque 2. Puisque div $X_a = \Gamma^i_{ia}$, de (25), il résulte que div $X_a = 0$. D'autre coté, on a div $\bar{v}_a = v_{a,a} + v_a$ div X_a, d'où il suit div $\bar{v}_a = 0$. Donc, une p-distribution de Killing est, en même temps, une distribution solenoidale. La réciproque, évidemment, n'est pas vraie.

En tenant compte de la relation d'antisymétrie (4), les formules (25) peuvent être écrites encore sous la forme :

$$\Gamma^a_{ij} + \Gamma^a_{ji} = 0 \ (i \neq a \neq j), \qquad \Gamma^{i'}_{ab} + \Gamma^a_{i'b} = 0, \ (a \neq b). \tag{26}$$

En particulier, de la première on a $\Gamma^a_{bb} = 0$ et par conséquant la formule (23) devient.

$$\nabla_{X_a} X_a = - \nabla \lg v_a = \Gamma^{i'}_{aa} X_{i'}, \tag{23''}$$

ce qui montre que les vecteurs de la première courbure Frenet des champs $\bar{v}_a$ appartiennent à la distribution complémentaire $\Delta^\perp(M)$. Donc, on aura : la distribution involutive $\delta(M)$ définie par (24) est englobée en $\Delta^\perp(M)$.

Maintenant, nous concrétiserons les équations de la connexion (2) en mettant en évidence tant la partie de la connexion induite sur Δ et $\Delta^\perp$ respectivement, que la partie de la seconde forme fondamentale de chacune d'elles [12]. On aura

$$\begin{aligned} \nabla_{X_{i'}} X_{j'} &= \Gamma^{k'}_{i'j'} X_{k'} + \Gamma^a_{i'j'} X_a, \\ \nabla_{X_a} X_b &= \Gamma^c_{ab} X_c + \Gamma^{i'}_{ab} X_{i'}. \end{aligned} \tag{27}$$

En procédant analoguement avec (22), on obtient

$$\begin{aligned} &\Gamma^a_{i'j'} + \Gamma^a_{j'i'} = 0 \quad (\Gamma^a_{i'i'} = 0) ; \quad \Gamma^a_{i'b} + \Gamma^a_{bi'} = 0 \ (a \neq b) ; \\ &\Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{cb} = 0 \ (b \neq a \neq c) ; \ \Gamma^{i'}_{ab} + \Gamma^a_{i'b} = 0 \ (a \neq b). \end{aligned} \tag{28}$$

Les formules (28) contiennent, en réalité, toutes les propriétés de la distribution de Killing. Nous signalons ici seulement une conséquence de la relation (28_1). Puisque $\Gamma^a_{i'i'} = 0$, de (27_1) on a $\nabla_{X_{i'}} X_{i'} = \Gamma^k_{i'i'} X_k$. Donc, les courbures géodésiques des lignes vectorielles tangentes à $X_{i'}$ (tant de la variété ambiante M, que de la distribution $\Delta^\perp$), sont les mêmes. D'ici il suit, en particulier, que chaque ligne autoparallèle de la distribution complémentaire ($\Gamma^k_{i'i'} = 0$) sera aussi ligne géodésique pour la variété ambiante, d'où on a la

Proposition 2. *La distribution complémentaire d'une distribution de Killing est totalement géodésique.*

La reciproque n'a pas lieu.

D'autre part, si on généralise sur une distribution quelconque la notion de direction asymptotique d'une sous-variété [6], la relation $\Gamma^a_{i'i'} = 0$ indique que les directions asymptotiques sur $\Delta^\perp(M)$ sont indéterminées. Or cette propriété est caractéristique aux plans non holonomes d'un espace euclidien. On obtient ainsi un autre aspect de la distribution complémentaire de la Δ (M) de Killing — d'être localement plate.

Une p-distribution de Killing se remarque par une mobilité locale. En effet, si $p = n$, on a la variété de Riemann doté par un repère de Killing. Or, on sait que une telle variété est locale symétrique [7]. En procédant comme en [7] et en utilisant la formule (5) on arrive à

$$\nabla_{X_a} \mathcal{R}(X_b, X_c) = 0, \quad \forall X_a, X_b, X_c \in \mathfrak{X}(\Delta),$$

ce qui montre que la courbure riemanniene induite sur $\Delta(M)$ est covariant constante ; donc on à la

Proposition 3. *Une distribution de Killing est localement symétrique*

Cas particulier. Si la distribution $\Delta^\perp(M)$ est involutive, alors le crochet

$$[X_{i'}, X_{j'}] = (\Gamma^k_{i'j'} - \Gamma^k_{j'i'}) X_k \qquad \begin{matrix} i', j' = 1, 2, \ldots, n-p \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

doit être tangent à $\Delta^\perp$ et on a

$$\Gamma^a_{i'j'} - \Gamma^a_{j'i'} = 0 ;$$

d'où, en comparant avec (28_1), il résulte

$$\Gamma^a_{i'j'} = 0.$$

Donc, la seconde forme bilinéaire fondamentale de la distribution sera identiquement nulle si et seulement si la $\Delta^\perp$ est involutive; alors, les variétés intégrales de dimension maximum de celle-ci sont totalement géodésiques.

Maintenant, en procédant comme au §4 on peut généraliser la notion de la distribution de Killing (K) comme il suit.

Définition 3. *Une p-distribution Δ (M) sera (Kg), de Killing généralisée ou (K_{rg}) si les champs vectoriels orthogonaux de sa définition, $\bar{v}_a$, $a = n - p + 1, \ldots, n$ sont les vecteurs (K_g) (ou K_{rg}).*

D'ici il résulte que toutes les matrices symétriques associées $\mathcal{L}_{\bar{v}_a} g = s(\bar{v}_a, g)$ (ou $s(\bar{v}_a, g/\Delta^\perp)$) peuvent être amenés simultanément sous forme

diagonale, la forme qui est conservée par les transformations du groupe structural de $\Delta(M)$.

Cas particuliers. 1) Si on a $s(\bar{v}_a, g) = 0$ (ou $s(\bar{v}_a, g/\Delta^\perp) = 0$) on retrouve la distribution de Killing (K) (ou, on obtient une nouvelle distribution (K_r))

2) Si on a $s(\bar{v}_a, g) = \lambda_a g$ (ou $s(\bar{v}_a, g/\Delta^\perp) = \mu_a g/\Delta^\perp$), on arrive aux distributions K_c de Killing conformes (ou K_{rc}).

3) On peut aussi obtenir une distribution (K_{qc}) — de Killing quasi-conforme (ou K_{rqc}) — si on exige d'être définie par des vecteurs orthogonaux $\bar{v}_a$, de type K_{qc} (ou K_{rqc}).

Nous esquisserons seulement le procédé d'obtenir les expressions analytiques locales pour les nouveaux types de distributions. Pour cela nous maintenons le choix du repère adapté aux Δ et $\Delta^\perp$ et les autres notations. Puisqu' on a

$$s(\bar{v}_a, g)(X, Y) = g(\Delta_X \bar{v}_a, Y) + g(X, \nabla_Y \bar{v}_a), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

nous obtenons pour $X = X_i$, $Y = X_j$ et $v_a = v_a X_a$,

$$[s(\bar{v}_a, g)]_{ij} = v_{a,i}\, \delta_{aj} + v_{a,j}\, \delta_{ai} + v_a (\Gamma^i_{ja} + \Gamma^j_{ia}). \tag{28}$$

Cette formule nous donne pour $i \neq j$ et puis pour $i = j$ le résultat suivant.

$$[s(\bar{v}_a, g)]_{ij} = v_a(\Gamma^i_{ja} + \Gamma^j_{ia}) \; ; \; [s(\bar{v}_a, g)]_{ii} = 2\, v_{a,i}\, \delta_{ai} + 2 v_a\, \Gamma^i_{ia}. \tag{29}$$

D'ici il résulte aisément que la distribution $\Delta(M)$ sera de type K_{rg} si et seulement si on a

$$\Gamma^a_{i'j'} + \Gamma^a_{j'i'} = 0, \quad i' \neq j' = 1, \ldots, n-p, \quad a, b = n-p+1, \ldots, n \tag{30}$$

Si, de plus, on a

$$\nabla \lg v_a = \Gamma^{i'}_{ba} X_{i'} - \Gamma^b_{aa} X_b, \tag{31}$$

alors, Δ (M) est une distribution (Kg) — de Killing généralisé. Si on a (30) et

$$2\, v_a\, \Gamma^{i'}_{i'a} = \mu_a. \tag{32}$$

Δ (M) sera de type K_{rc} : elle se réduit au type K_c — de Killing conforme — si on a de plus

$$2\, v_{a,a} = \lambda_a, \quad 2\, v_a\, \Gamma^b_{ba} = \lambda_a. \tag{33}$$

Enfin, $\Delta(M)$ sera de type K_r si, en dehors de (30), (31) on a

$$\Gamma^{i'}_{i'a} = 0.$$

La distribution sera (K) si on a de plus

$$v_{a,a} = 0, \quad \Gamma^b_{ba} = 0,$$

et ainsi on arrive à la distribution de Killing. D'ici il résulte évidemment que la formule d'inclusion (18) reste encore valable pour tous les types de distributions introduits ci-dessus.

En ayant toujours pour modèle les théoremes du §4, on peut trouver sans difficultés les propriétés de ces distributions; on peut déterminer leurs invariants par la méthode esquissée au §3.

Une dernière remarque. L'existence d'une distribution de Killing sur une variété (M, g), ayant la propriété de locale symétrie, indique l'existence d'un groupe de mouvements qui agit sur M. Ainsi on arrive à un nouvel aspect d'un vieux problème de la classification des variétés (K) selon leur groupe de mouvements. La possibilité d'évaluer les invariants orthogonaux d'une distribution (K) permet d'entrevoir des nouveaux moyens d'utiliser en ce but [1].

Les généralisations faites aux vecteurs et distributions (K) et surtout le cas de quasi-conformité, indiquent des nouvelles perspectives d'étude. Les extensions sur les variétés $(\mathcal{L})$ peuvent être utiles dans la théorie unitaire des champs physiques [3, 18].

BIBLIOGRAPHIE

1. Alexeevskii, D. V., Kimelfeld, B.N. — *Classification des variétés riemanniennes homogènes, conformes plates.* Mat. Zametki 24 (1978), 102—110.
2. Bellman, R. — *Introduction to matrix analysis.* Mc Graw-Hill Book, New York, 1960.
3. Cahen, M., Kerbrat, Y. — *Champs de vecteurs conformes et transformations conformes des espaces lorentziens symétriques.* Journ. de Math. pures et appl. 57 (1978), 99—132.
4. Caraman, P. — *Homeomorfisme cvasiconforme n-dimensionale.* Editura Academiei R.S.R., București, 1968.
5. Cartan, E. — *La théorie unitaire d'Einstein-Mayer.* dans Oeuvres Complètes, P. III, vol. 2, 1863—1875, Paris, Gauthier-Villars, 1955.
6. Chern, S. S. — *La géométrie des sous-variétés d'un espace euclidien à plusieurs dimensions.* L'enseignement math. 40 (1951—1954), 24—46.
7. D'Atri, J., Nickerson, H. — *The existence of special orthonormal frames.* J. Diff. Geom. 2 (1968), 393—409.
8. Einstein, A., Mayer, W. — *Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität.* Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. 1931 : 541—557 ; 1932 : 130—137.
9. Gheorghiev, Gh. — *Sur les mouvements rigides.* An. şt. Univ. Iaşi, Mat. X (1964), 407—415.
10. Gheorghiev, Gh. — *Despre distribuţii nestaţionare şi invarianţii lor ortogonali.* Lucrările Confer. de Geom. şi Top., Cluj, sept. 1978 (à paraitre).
11. Gheorghiev, Gh., Ignat, M. — *Sui moti rigidi nei mezzi continui.* Atti Sem. Mat. e Fisico, Univ. Modena XXI (1972), 37—61.
12. Gheorghiev, Gh., Oproiu, V. — *Varietăţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale*, vol. 1 (1976), vol. 2 (1979) Editura Academiei București.
13. Hoffmann, B. — *A generalisation of the Einstein-Mayer field theory.* Quart. Journal Oxford, 7 (1936), 32—42.
14. Lichnerowitz, A. — *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme.* Masson, Paris, 1955.
15. Pigeaud, P. — *Unified theory in pentadimensional space.* Reports Math. Phys. 14 (1978), 261—284.
16. Podolanski, J. — *Unified field theory in six dimensions.* Proc. Roy. Soc. London, 201 (1950), 234—260.
17. Semenov, V. I. — *Sur les groupes uniparamétriques des homéomorphismes quasi-conformes dans l'espace euclidien.* Sibirski Mat. Journ. 17 (1976), 177—193.
18. Tchupahin, A. P. — *Les groupes conformes nontriviales dans l'espace de Riemann.* Doklady Akad. Nauk 246 (1979) 1056—1058.
19. Vrănceanu, G. — *Sur une théorie unitaire non holonome des champs physiques.* Opera mat. 1 (1969), 363—386.
20. Vrănceanu, Gh., Roşca, R. — *Introduction in relativity and pseudo-riemannian geometry.* Editura Academiei, București, 1976.
21. Yano, K., Ohgane, M. — *On six-dimensional unified field theories.* Rendiconti di Mat. 13 (1954), 99—132.

Received 25.V.1979

Faculty of Mathematics University of Iaşi
Iaşi, R. S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXVI, s. I a, 1980, f. 1

BICOFIBRATIONS

BY

I. POP

In this Note we consider the notion of bicofibration which is a generalization of the topological sum of two spaces; it includes the join of complexes and it is dual to the notion of bifibration defined in [1]. The last result is used to construct some bifibrations and some simple bifibrations.

1. We recall from [1] that a bifibration is a pair $(X, B_i, p_i)_{i=1,2}$ of Hurewicz fibrations having the same total space X and such that for these fibrations there exist two lifting functions λ_1, λ_2 satisfying the following conditions :

$$(1)\qquad \begin{aligned} p_1\lambda_2(x_2, \omega_2) &= p_1(x_2) \text{ and} \\ p_2\lambda_1(x_1, \omega_1) &= p_2(x_1), \end{aligned}$$

for every $(x_i, \omega_i) \in \Omega_{x_i} = \{(x_i, \omega_i) \in X \times B_i^I / \omega_i(0) = p_i(x_i)\}$, $i = 1, 2$.

If the fibres of the fibrations and the total space X are connected, locally path connected and the base spaces B_i are locally path connected and semi-locally 1-connected, then the bifibration is called connected. A connected bifibration is called a simple bifibration if $p_1^{-1}(b_1) \cap p_2^{-1}(b_2)$ is a discrete subspace of X, for every points $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$.

Remark 1. Using arbitrary homotopies, the notion of bifibration can be given as follows : A pair of continuous maps (X, B_i, p_i) $(i=1,2)$ is a bifibration if for any topological space Y, any continuous map $f : Y \to X$ and any homotopies $F_i : Y \times I \to B_i$, $i = 1, 2$, such that $F_i(y, 0) = p_i f(y)$, there exist two homotopies $G_i : Y \times I \to X$, $i = 1, 2$, such that :

$$(2)\qquad G_i(y, 0) = f(y), \ \forall y \in Y, \ i = 1, 2,$$

$$(3)\qquad p_i G_i = F_i, \ i = 1, 2,$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} p_2 G_1(y, t) &= F_2(y, 0) = p_2 f(y), \\ p_1 G_2(y, t) &= F_1(y, 0) = p_1 f(y), \end{aligned}$$

for every $(y, t) \in Y \times I$.

Example 1. Let $(X, B_i, p_i)_{i=1,2}$ be a pair of Hurewicz fibrations. We consider the continuous maps $p_i' : X_1 \times X_2 \to B_i$, $i = 1, 2$, defined by $p_i'(x_1, x_2) = p_i(x_i)$, for $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Then the pair $(X_1 \times X_2, B_i, p_i)((=1,2)$ is a bifibration. If p_i are covering projections, with X_i, $i = 1, 2$ con-