4. Chen B. Y. — *On CR - submanifolds of a Kaehler manifold*, to appear.
5. Chen. B. Y. and Ogiue K. — *On totally real submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1974), 257 — 266.
6. Ogiue K. — *Differential geometry of Kaehler submanifolds*, Advances in Math. 13 (1974), 73 — 114.
7. Okumura M. — *Certain almost contact hypersurfaces in Kaehlerian manifolds of constant holomorphic sectional curvature*, Tôhoku Math. J. 16 (1964), 270 — 284.
8. Yano K. — *On a structure defined by a tensor field f of type* (1,1) *satisfying* $f^3 + f = 0$, Tensor N.S., 14 (1963), 99 — 109.
9. Yano K. and Kon M. — *Generic submanifolds*, to appear in Annali di Mat.

Received 29.VII.1979

Polytechnic Institute of Iaşi
Department of Mathematics,
R. S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXVI, s. I a, 1980, fasc. 1

CONGRUENCES DE CÔNES QUADRATIQUES TANGENTS À LA SURFACE SUPPORT

PAR

D. RIMER

0. Introduction. Dans l'espace projectif P_3, on considère une surface regulière Σ de classe $C^t (t \geqslant 1)$ et, à chaque point $M(u_1, u_2) \in \Sigma$, on attache un cône quadratique (Q), dont le sommet est au point M. On y distingue trois variétés biparamétriques de cônes quadratiques, selon que les droites suivant lesquelles le plan (π) — tangent à Σ en M, - coupe le cône (Q) sont : 1) réelles et distinctes, 2) imaginaires ou 3) réelles et coïncidentes. Nous notons ces variétés par $V_i(2\,;\,(1,1)\,;\,P_3)$, où les valeurs 1, 2, 3 de l'indice i correspondent aux trois situations mentionées et, dans la paranthèse sont précisés : le nombre 2 des paramètres, l'espèce 1 et la signature 1 du cône générateur, l'espace projectif ambiant, P_3 [3]. Les variétés V_1, V_2 ont été étudiées dans [1] ; nous allons nous occuper des variétés V_3, que nous nommons *congruences de cônes quadratiques tangents à la surface support* Σ. L'image de V_3 dans l'espace S_9 [2] est une surface, que nous notons par $\bar{V}_3$. Les indices utilisés sont : $h = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$; $\alpha = \overline{0,3}$; $s = \overline{1,7}$.

1. Les formules Frenet et le théorème fondamental. Nous choisissons les repères d'ordre zéro par les mêmes conditions que dans [2], de manière que l'équation du cône local, rapporté à ces repères, est

$$(1.1) \qquad Q(u_1, u_2\,;\,t_s) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0, \quad x^4 = f^i(u_h\,;\,t_s),$$

où t_s sont les paramètres secondaires. Avec les conditions de fixité d'un point dans P_3 (ou du point-image (Q) dans S_9 [2]), nous obtenons huit pfaffiens principaux d'ordre zéro : ω_0^4, $\omega_2^1 + \omega_1^2$, $\omega_3^1 - \omega_1^3$, $\omega_3^2 - \omega_2^3$, $\omega_1^1 - \omega_2^2$, $\omega_1^1 - \omega_3^3$. En excluant de l'étude les variétés pour lesquelles au moins un de ces pfaffiens est $\equiv 0$ ou $[\omega_0^1, \omega_0^2] = 0$ (variétés, dont les images $\bar{V}_3$ sont situées dans un espace projectif P_r $(r < 8)$, nous notons : $\omega_0^3 = \alpha_h \omega_0^h$, $\omega_2^1 + \omega_1^2 = \alpha_{2+h} \omega_0^h, \ldots, \omega_1^1 - \omega_3^3 = \alpha_{11+h} \omega_0^h$. Alors le plan (H), déterminé par A_i et dA_0, a l'équation

$$(1.2) \qquad (\mathrm{H}) = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 - x^3 = 0.$$

L'intersection du plan (H) et du cône local (Q) est donnée par le système

$$(1.3) \quad \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 - x^3 = 0, \quad (1 - \alpha_1^2)(x^1)^2 - 2\alpha_1\alpha_2 x^1 x^2 + (1 - \alpha_2^2)(x^2)^2 = 0.$$

Afin que (H) soit tangent à (Q) il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \ \alpha_1 \alpha_2 \neq 0. \tag{1.4}$$

En continuant à appliquer l'algorithme de la méthode du repère mobile de Cartan, on obtient 12 équations, qui, pour : $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = \alpha_{10} = 0$, $\alpha_{12} = 1$, avec $\alpha_9 \neq 0$, donnent les 7 pfaffiens principaux du Ier ordre : ω_1^α, ω_2^0, ω_2^3, ω_3^0. Les 7 paramètres secondaires t_s étant fixés, nous avons le repère Frenet (du Ier ordre) de la congruence, 5 invariants finis du Ier ordre ($p_1 = \alpha_1$, $p_2 = \alpha_2$, $p_3 = \alpha_7$, $p_4 = \alpha_9$, $p_5 = \alpha_{11}$; $p_1^2 + p_2^2 = 1$, $p_1 p_2 p_4 \neq 0$) et 14 invariants finis du IIème ordre ($p_6, \ldots, p_{19}$). Aucune des conditions d'intégratibilité n'est finie. Les formules Frenet sont :

$$\left\{\begin{aligned}
dA_0 &= [-3p_{11+h}\,\omega_0^h + (p_4 + p_5)\,\omega_0^1 + \omega_0^2]\,A_0 + \omega_0^h A_h + p_h\,\omega_0^h A_3,\\
dA_1 &= p_{5+h}\,\omega_0^h A_0 + p_{11+h}\,\omega_0^h A_1 + p_{13+h}\,\omega_0^h A_2 + p_{15+h}\,\omega_0^h A_3,\\
dA_2 &= p_{7+h}\,\omega_0^h A_0 + p_{13+h}\,\omega_0^h A_1 + (p_{11+h}\,\omega_0^h - p_4\,\omega_0^1) A_2 + p_{17+h}\,\omega_0^h A_3\\
dA_3 &= p_{9+h}\,\omega_0^h A_0 + p_{15+h}\,\omega_0^h A_1 + (p_{17+h}\,\omega_0^h + p_4\,\omega_0^1) A_2 +\\
&\qquad + (p_{11+h}\,\omega_0^h - p_5\,\omega_0^1 - \omega_0^2) A_3.
\end{aligned}\right. \tag{1.5}$$

Théorème fondamental. *Étant donnés sur une surface régulière $\Sigma \subset P_3$, deux formes de Pfaff linéairement indépendantes et 19 fonctions régulières, $p_1, \ldots, p_{19}$, où $p_1^2 + p_2^2 = 1$, $p_1 p_2 p_4 \neq 0$, il y a une congruence de cônes quadratiques tangents à Σ, uniquement déterminée à une transformation projective près, pour laquelle les formes et les fonctions données sont les formes invariantes et les invariants finis.*

Remarque 1.1. Vu la relation $p_1^2 + p_2^2 = 1$, on a 18 invariants finis indépendants. C'est le même nombre que chez les variétés V_h[1].

2. Interprétations géométriques. L'équation du cône local, rapporté au repère Frenet, étant

$$Q(u_1, u_2) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0, \ x^i = \varphi^i(u_1, u_2), \tag{2.1}$$

avec (1.5) nous obtenons

$$\begin{aligned}
dQ &= -2(p_{11+h} Q + T_h)\,\omega_0^h, \text{ où } T_1 = -p_4 (x^2)^2 + p_5 (x^3)^2 + x^1 x^3 -\\
&\quad - p_1 x^3 x^0 + p_3 x^2 x^3, \ T_2 = (x^3)^2 + x^2 x^0 - p_2 x^2 x^0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$T_2 = 0$ est un cône quadratique. A_0 est le sommet du cône (Q), A_1 est le sommet du cône (T_2). $A_1 \in (T_1)$; le plan tangent à (T_1) au point A_1 est $x^0 = 0$. Ce plan est tangent aussi au cône (T_2), la droite de contact étant $A_1 A_2$. Le point A_0 et la droite $A_1 A_2$ déterminent le plan $x^3 = 0$. Le plan polaire du point A_1 par rapport au cône (Q) est $x^1 = 0$. Les intersections des plans $(x^1 = 0, x^3 = 0)$ et de $(x^1 = 0, x^3 = 0)$ sont les droites $A_0 A_2$ respectivement $A_2 A_3$, l'intersection des deux dernières droites étant le sommet A_2. Le plan $x^3 = 0$ a comme droite de pôles, relativement au cône (Q), la droite $A_0 A_3$ et l'intersection de cette droite avec $A_2 A_3$ est le sommet A_3.

Soit $R = A_0 + dA_0$ un point voisin à A_0 et les birapports

$\tau_1 = (A_2 A_3)[A_0, A_1 ; U_{01}, R]$, $\tau_2 = (A_1, A_3)[A_0, A_2 ; U_{02}, R]$. Avec (1.5)$_4$ on obtient

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0^1} + (1 - 3\,p_{12})\frac{\omega_0^2}{\omega_0^1} + (p_4 + p_5 - 3\,p_{12}),$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{\omega_0^2} - (1 - 3p_{12}) - (p_4 + p_5 - 3p_{12})\frac{\omega_0^1}{\omega_0^2},$$

d'où il résulte la relation $\tau_1 \omega_0^1 + \tau_2 \omega_0^2 = 0$. L'interprétation des invariants finis est obtenue d'une manière analogue que pour les variétés V_h [1]. Mentionons encore que A_0 est situé sur les quadriques (T_1) et (T_2), les plans tangents à (T_1) et à (T_2) au point A_0 sont $(H_1) = x^1 - p_1 x^3 = 0$, $(H_2) = x^2 - p_2 x^3 = 0$. Les plans (H), (H_1), (H_2) appartiennent à un même fascicule de plans ayant pour axe, la droite de contact du plan (H) avec le cône (Q) : $(d) = (x^1 = \lambda p_1, x^2 = \lambda p_2, x^3 = \lambda, \lambda \in R)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Rimer, D. — *Variétés biparamétriques de cônes quadratiques*. An. şt. Univ. Iaşi XIII (1967) 349—365.
2. Rimer D. — *Complexes de quadriques dans P_3*. An. şt. Univ. Iaşi (1979), fasc. 2.
3. Rimer D. — *Compléments à l'étude différentielle des variétés de quadriques*. *Bull. Inst. Polyt. Iaşi (1980), fasc. 1.*

Reçu le 11.VI.1979

Faculté de Mathématiques
Université de Iassy
R. S. Roumanie