Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXVI, s. I a, 1980, fasc. 1

PARALLÉLISME RELATIF DANS UME CONFIGURATION MYLLER DANS DES ESPACES DE RIEMANN

PAR

A. ROMAN

1. On considère dans l'espace riemannien V_n une courbe (c), des points de laquelle partent deux directions orthogonalles de vecteurs unitaires ξ_1^i, ξ_2^i, situées dans un espace linéaire T^{n-1}, et qui dépendent différentiellement des points de (c). L'ensemble de ces objects a été nommé configuration Myller et notée par $\mathfrak{M}$ $(c\,;\,\xi_1^i,\,\xi_2^i,\,T^{n-1})$. Les équations fondamentales pour une telle configuration sont. [2] :

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\nabla \xi_a^i}{ds} &= -G_{2(a-2)}\,\xi_{a-3}^i - G_{2a-3}\,\xi_{a-1}^i + G_{2a-1}\,\xi_{a+1}^i + T_a\,n^i\,,\\
\frac{\nabla n^i}{ds} &= -T_1\,\xi_1^i - T_2\,\xi_2^i - \cdots - T_{n-1}\,\xi_{n-1}^i,\quad a = 1,\,2,\,\ldots,\,n-1,
\end{aligned}
$$

où les fonctions $G_{2k}(k = 1,\,2,\,\ldots,\,n-4)$ sont positives et toutes les autres fonctions ont des signes quelconques.

2. L'objet de cette note est l'étude du parallélisme relatif des vecteurs par rapport à d'autres vecteurs ou plus généralement du parallélisme des espaces vectoriels dans la configuration $\mathfrak{M}$ en établissant des interprétations géométriques pour les zéros des invariants G_{2a}.

Définition 1 : *On dit qu'un vecteur ξ_a^i est transporté parallélement en $\mathfrak{M}$, relativement à un autre vecteur ξ_b^i $(b = a)$, le long de la courbe (c), si :*

$$
(2)\qquad \frac{\nabla \xi_a^i}{ds}\,\xi_{b\,i}\,n^i = 0\,.
$$

Définition 2 : *On dit que le sous-espace vectoriel $T^p(\xi_{a_1}^i,\,\ldots,\,\xi_{a_p}^i)$ de T^{n-1} est transporté parallélement en $\mathfrak{M}$, relativement à un autre sous-espace $T^m(\xi_{b_1}^i,\,\ldots,\,\xi_{b_m}^i)$, $(a_k \neq b_r)$, de T^{n-1}, le long de la courbe (c), si*

$$
(3)\qquad \frac{\nabla \xi_{a_1}^{i_{a_q}} \ldots \xi_{a_p}^{i_{a_p}}}{ds}\,\xi_{b_1}^{i_{b_p}} \ldots \xi_{b_m}^{i_{b_m}}\,n^i = 0\,.
$$

De la définition 2, on déduit le

Théorème 1. *Si un espace vectoriel $T^e \subset T^{n-1}$, est transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$, relativement à un autre espace $T^m \subset T^{n-1}$, le long de la courbe (c), alors l'espace T^m est transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$, relativement à n'importe quel espace $T^q \supset T_m$, $T^q \subset T^{n-1}$.*

Le fait que l'espace $T^e \subset T^{n-1}$ est transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$, relativement à l'espace $T^m \subset T^{n-1}$ le long de la courbe (c), signifie qu'on a la relation (3,) qui est valable si on considère un vecteur $\xi^{ib_{m+1}}_{b_{m+1}}$, or par induction, plusieurs tels vecteurs.

Il résulte :

Théorème 2. *Dans les mêmes conditions, quand T^e est transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$, relativement à l'espace T^m, il existe un espace $T^r \subseteq T^m$, relativement auquel T^e est transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$.*

Maintenant, nous pouvons ennoncer :

Théorème 3. *Si l'espace vectoriel $T^e \subset T^{n-1}$, est transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$, relativement a l'espace $T^m \subset T^{n-1}$, et si T^m est transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$ relativement à T^e, alors l'espace $T^q = T^e + T^m$ est transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$, dans le sens de [1].*

Pour simplifier la démonstration, considérons deux vecteurs ξ^i_a et ξ^i_b qui sont transportés parallèlement en $\mathfrak{M}$, l'un par rapport à l'autre. En tenant compte de la définition 1, on a au plus les relations :

$$G_{2(a-2)} = G_{2a-3} = G_{2a-1} = G_{2a} = 0,$$
$$G_{2(b-2)} = G_{2b-3} = G_{2b-1} = G_{2b} = 0.$$

De ces relations il résulte que :

$$\frac{\nabla_{\xi_a} \xi^{i_a}_{\xi_b} \xi^{i_b}}{ds} n^{ij} = 0,$$

ce qui exprime que l'espace des vecteurs (ξ^i_a, ξ^i_b) est transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$.

Le reciproque est évidente.

D'ici, il découle :

Théorème 4. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace $T^e \subset T^{n-1}$ $(e > 1)$, soit transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$, est que n'importe quels deux sous-espaces complémentaires en T^m, soient transportés parallèlement en $\mathfrak{M}$ l'un par rapport à l'autre.*

Les résultats obtenus plus haut nous permettent d'obtenir :

Théorème 5. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un vecteur ξ^i_a du repère Frenet de $\mathfrak{M}$ soit transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$ sont :*

$$G_{2(a-2)} = G_{2a-3} = G_{2a-1} = G_{2a} = 0 \text{ si } a = 3, 4, \ldots, n-3 \,;\; G_1 = G_2 = 0$$
$$\text{si } a = 1 \,;\; G_1 = G_3 = G_4 = 0, \text{ si } a = 2 \,;\; G_{2(n-4)} = G_{2n-7} = G_{2n-5} = 0$$
$$\text{si } a = n-2 \text{ et } G_{2(n-3)} = G_{2n-5} = 0 \text{ si } a = n-1$$

On ob tient aussi :

Théorème 6. *La condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur ξ^i_1 de $\mathfrak{M}$ soit transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$, relativement au vecteur ξ^i_2, est $G_3 = 0$.*

Théorème 7. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le vecteur ξ^i_2 de $\mathfrak{M}$ soit transporté parallèlement au vecteur ξ^i_1, sont $G_3 = G_4 = 0$.*

Théorème 8. *Les conditions nécessaire et suffisantes pour que le biplan (ξ^i_1, ξ^i_2) soit transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$, sont $G_2 = G_3 = G_4 = 0$.*

Les derniers trois théorèmes donnent une interprétation géométrique des zéros des invariants $G_a (a = 1, 2, 3, 4)$.

Définition 3. *On dit que le vecteur V^a est transporté parallèlement sur la courbe (c) si $\nabla V^a/ds$ est parallèle à n^a.*

On en déduit :

Théorème 9. *Les conditions nécessaires et suffisantes afin qu'un vecteur V^a soit transporté parallèlement en $\mathfrak{M}$ le long de la courbe (c) sont :*

$$(*) \qquad \frac{dV^a}{dc} - G_{2a} V^{a-2} - G_{2a-1} V^{a-1} + G_{2(a-3)} V^{a-3} + G_{2(a-2)} V^{a-2} = 0,$$
$$(a = 1, 2, \ldots, n-1)$$

En particulier, si V^a se trouve dans le biplan (ξ^i_1, ξ^i_2), les conditions précédentes deviennent :

$$\frac{dV^3}{ds} - G_1 V^2 = 0, \quad \frac{dV^2}{ds} + G_1 V^1 = 0,$$
$$V^1 G_2 + V^2 G_3, \quad V^2 G_4 = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Miron R. — *Configurații Myller $\mathfrak{M}(c, \xi^i_1, T^{n-1})$ în spații riemanniene*, Studii și Cerc St. Mat. Iași XII, f. 2.
2. Roman A. — *Configurații Myller $\mathfrak{M}(c, \xi^i_1, \xi^i_2, T^{n-1})$ în spații riemanniene*. An. șt. Univ. Iași, 1978.

Reçu 22.V.1979

Lic. „Gh. Șincai"
București
R. S. Romania