Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXVI, s. I a, 1980, fasc. 1

VARIÉTÉS DIFÉRENTIABLES MODELÉES SUR DES ESPACES DE FRÉCHET ; L'INTÉGRATION DES CHAMPS DE VECTEURS

PAR

NECULAI PAPAGHIUC

Dans cette note nous introduisons les LCR-variétés différentiables modelées sur des espaces de Fréchet, nous définissons la LCR-variété tangente d'une LCR-variété et utilisons les résultats locaux de [4] pour résoudre le problème de l'intégration des champs de vecteurs sur une LCR-variété de classe C_M^k. Les définitions et les résultats utilisés dans cette note sont pris de [4]. Pour définir les variétés différentiables modelées sur des espaces de Fréchet, nous supposons que tous les espaces de Fréchet qui interviennent satisfont à la condition (R) de [4] et considérons aussi dans chaque espace de Fréchet la topologie raffinée définie dans [4].

Soient $\{E_i\}_{i\in I}$ des espaces de Fréchet et X un ensemble donné.

Définition 1. *Nous dirons qu'un ensemble* $\mathcal{A} = \{(U_i, h_i, E_i) ; i \in \overline{I}\}$ *est un LC-atlas de classe* $C_M^k (k \geqslant 1)$ *sur l'ensemble* X, *si* $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, *pour tout* $i \in I$, *l'application* $h_i : U_i \to h_i(U_i) \subset E_i$ *est bijective,* $h_i(U_i)$ *est un sous-ensemble ouvert dans la topologie localement convexe (l. c.) de* E_i *et pour tout* $(i, j) \in I \times I$, *les ensembles* $h_i(U_i \cap U_j)$ *sont ouverts dans la topologie l.c. de* E_i *et les applications* $h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_j) \to h_j(U_i \cap U_j)$ *sont de classe* C_M^k *dans le sens de la définition 6 de* [4].

Proposition 1. *Soit* $\mathcal{A} = \{(U_i, h_i, E_i) ; i \in I\}$ *un LC-atlas de classe* C_M^k *sur* X. *Alors, sur l'ensemble* X *il existe deux topologies notées par* $\tau_{l.c.}$ *et respectivement* τ_r *pour lesquelles les sous-ensembles* U_i *sont ouverts et les applications* h_i *sont des homéomorphismes.*

La démonstration résulte facilement en définissant un ensemble $U \subset X$ comme ouvert dans la topologie $\tau_{l.c.}$ si pour tout $i \in I$, l'ensemble $h_i(U \cap U_i)$ est ouvert dans la topologie $l.c.$ de E_i et un ensemble $V \subset X$ comme ouvert dans la topologie τ_r si pour tout $i \in I$, l'ensemble $h_i(U \cap U_i)$ est ouvert dans la topologie raffinée de E. L'ensemble X muni de la topologie τ_r sera noté par X_r et muni de la topologie $\tau_{l.c.}$ sera noté par $X_{l.c.}$.

Soit U un ensemble ouvert de $X_{l.c.}$ et soit (U, h, E) une LC-carte locale sur X, où E est un espace de Fréchet et h un homéomorphisme de U sur un sous-ensemble ouvert dans la topologie $l.c.$ de E.

Définition 2. *Nous dirons que la LC-carte locale* (U, h, E) *est* C_M^k*-compatible avec le LC-atlas* $\mathcal{A}$ *si, pour tout* $i \in I$, *les applications* $h \circ h_i^{-1}$ *et* $h_i \circ h^{-1}$ *sont de classe* C_M^k.

Définition 3. *Une LC-variété différentiable X de classe C_M^k modelée sur les espaces de Fréchet $\{E_i\}_{i\in I}$ est une classe d'équivalence de couples $(X, \mathcal{A})$* (où $\mathcal{A}$ est un LC-atlas de classe C_M^k sur X) *pour la relation d'équivalence : $(X, \mathcal{A}) \sim (Y, \mathcal{B})$ si $X = Y$ et toute LC-carte de $\mathcal{A}$* (resp. $\mathcal{B}$) *est C_M^k-compatible avec le LC-atlas $\mathcal{B}$* (resp. $\mathcal{A}$).

Nous introduirons dans ce qui suit une classe plus ample de LC-variétés de classe C_M^k modelées sur des espaces de Fréchet.

Définition 4. *Nous dirons que $\mathcal{A} = \{(U_i, h_i, E_i) ; i \in I\}$ est un LCR-atlas de classe C_M^k sur un ensemble X si $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, pour tout $i \in I$, l'application $h_i : U_i \to h_i(U_i) \subset E_i$ est bijective, $h_i(U_i)$ est un sous-ensemble raffiné ouvert de E_i et pour tout $(i, j) \in I \times I$, les ensembles $h_i(U_i \cap U_j)$ sont raffinés ouverts dans E_i et les applications $h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_j) \to h_j(U_i \cap U_j)$ sont de classe C_M^k.*

Proposition 2. *Si $\mathcal{A}$ est un LCR-atlas sur X, alors sur l'ensemble X il existe une topologie unique pour laquelle U_i sont ouverts et les h_i des homéomorphismes.*

La démonstration, est classique si on définit U comme ouvert dans X si pour tout $i \in I$, l'ensemble $h_i(U \cap U_i)$ est raffiné ouvert dans E_i. Une LCR-carte locale (U, h, E) sur X, où U est ouvert dans X et h un homéomorphisme de U sur un sous-ensemble raffiné ouvert d'espace de Fréchet E, est dite C_M^k-compatible avec le LCR-atlas $\mathcal{A}$ si pour tout $i \in I$, les applications $h \circ h_i^{-1}$ et $h_i \circ h^{-1}$ sont de classe C_M^k.

Définition 5. *Une LCR-variété différentiable de classe C_M^k est une classe d'équivalence de couples $(X, \mathcal{A})$* (où $\mathcal{A}$ *est un LCR-atlas de classe C_M^k sur X*) *pour la relation d'équivalence : $(X, \mathcal{A}) \sim (Y, \mathcal{B})$ si $X = Y$ et toute LCR-carte de $\mathcal{A}$* (resp. $\mathcal{B}$) *est C_M^k-compatible avec le LCR-atlas $\mathcal{B}$* (resp. $\mathcal{A}$).

Remarque. Toute LC-variété de classe C_M^k est aussi une LCR-variété de classe C_M^k.

Dans ce qui suit nous considérons les LCR-variétés X de classe C_M^k, supposons que tous les models E_i, $i \in I$ de X sont isomorphes avec un espace de Fréchet E et que la topologie de LCR-variété de X donnée par la proposition 2 est séparée Hausdorff.

Soient X et Y deux LCR-variétés de classe C_M^k modelées sur les espaces de Fréchet E et respectivement F et soit $f : X \to Y$ une application.

Définition 6. *Nous dirons que f est de classe C_M^k si pour tout point $x \in X$ il existe une LCR-carte locale (U, h, E) dans $x (x \in U)$ et une LCR-carte locale (V, g, F) dans $f(x)$, telles que l'application $g \circ f \circ h^{-1} : h(U) \to g(V)$ soit de classe C_M^k dans le sens de la définition 6 de* [4].

Soit maintenant X une LCR-variété de classe C_M^k modelée sur l'espace de Fréchet E, x un point de X, (U, h) et (U_1, h_1) deux LCR-cartes locales dans x et u, u_1 deux vecteurs de E.

Définition 7. *On dit que les triplets (U, h, u) et (U_1, h_1, u_1) sont équivalents $((U, h, u) \sim (U_1, h_1, u_1))$ si la condition :*

$$(h_1 \circ h^{-1})'(h(x))(u) = u_1$$

est satisfaite où par $(h_1 \circ h^{-1})'$ on a notée l'application dérivée de $h_1 \circ h^{-1} : h(U \cap U_1) \to h_1(U \cap U_1)$.

Proposition 3. *La relation „$\sim$" ci-dessus est une relation d'équivalence.*

Notons par $[U, h, u]$ la classe d'équivalence du triplet (U, h, u) et par T_xX l'ensemble de toutes les classes d'équivalence $[U, h, u]$ où (U, h) est une LCR-carte locale dans $x \in X$ et $u \in E$. L'ensemble T_xX est appelé l'espace tangent au point x à X et un élément $[U, h, u] \in T_xX$ est appelé un vecteur tangent au point x à X.

Soit (U, h) une LCR-carte locale quelconque dans $x \in X$. Définissons l'application $\theta_U : E \to T_xX$ par $\theta_U(u) = [U, h, u]$. Sur l'espace tangent T_xX on définit la structure d'espace vectoriel par :

$$[U, h, u] + [U, h, v] = [U, h, u + v] ; \quad u, v \in E \quad \text{et}$$
$$\lambda[U, h, u] = [U, h, \lambda u)] ; \quad \lambda \in R, \ u \in E.$$

On vérifie que l'application θ_U est linéaire par rapport à la structure d'espace vectoriel de T_xX donnée par les opérations ci-dessus. En définissant sur l'espace vectoriel T_xX la famille de semi-normes $\{|\cdot|_\alpha ; \alpha \in \Gamma_E\}$ où $|[U, h, u]|_\alpha = |u|_\alpha$ pour toute $\alpha \in \Gamma_E$ = l'ensemble de toutes les semi-normes continues sur E, on obtient que T_xX est aussi un espace de Fréchet et que l'application $\theta_U : E \to T_xX$ est un isomorphisme topologique linéaire qui conserve les semi-normes (c'est-à-dire, $\theta_U \in \mathrm{Isom}_{\varphi_0}(E, T_xX)$ où $\varphi_0 : \Gamma_E \to \Gamma_E$ est l'application identique (voir les définitions et les notations de [4]).

Il est aussi facile de voir que la famille des semi-normes de T_xX définie en utilisant une autre carte locale (U_1, h_1) dans x sur X, est équivalente avec la famille des semi-normes définie ci-dessus, parce que les applications $(h \circ h_1^{-1})'(h_1(x))$ et $(h_1 \circ h^{-1})'(h(x))$ sont linéaires et continues. Il résulte ainsi que les applications θ_U et θ_U^{-1} sont aussi continues par rapport aux topologies $l.c.$ de E et T_xX et par rapport aux topologies raffinées des espaces E et T_xX, en plus $\theta_{U_1}^{-1} \circ \theta_U = (h \circ h_1^{-1})'(h_1(x))$, (U_1, h_1) étant une autre LRC-carte locale dans x sur X. Désignons par $TX = \bigcup_{x\in X} T_xX$ et appelons l'ensemble TX, *l'espace tangent à la LCR-variété X.*

Montrons que TX est aussi une LCR-variété de classe C_M^{k-1} modelée sur $E \times E$. Définissons l'application $\Pi : TX \to X$ par $\Pi([U, h, u]) = x$ pour tout vecteur $[U, h, u] \in T_xX$. Évidemment, l'application Π est surjective. Soit (U, h) une LCR-carte locale sur X. Définissons une LCR-carte locale sur TX par :

$$Th : \Pi^{-1}(U) \to h(U) \times E ; \ (Th)([U, h, u]) = (h(x), u) \text{ où}$$
$$[U, h, u] \in \Pi^{-1}(U) \text{ et } \Pi([U, h, u]) = x.$$

L'ensemble $h(U)$ étant raffiné ouvert dans E, il résulte que $h(U) \times E$ est raffiné ouvert dans $E \times E$. L'application Th est bijective et donc le tiple $(\Pi^{-1}(U), Th, E \times E)$ est une LCR-carte locale sur TX.

Proposition 4. *Si $\{(U_i, h_i)\}_{i\in I}$ est un LCR-atlas de classe C_M^k sur X alors $\{(\Pi^{-1}(U_i), Th_i)\}_{i\in I}$ est un LCR-atlas de classe C_M^{k-1} sur TX.* En considérant sur TX le LCR-atlas maximal du LCR-atlas $\{(\Pi^{-1}(U_i), Th_i)\}$ il résulte que TX est une LCR-variété de classe C_M^{k-1} modelée sur $E \times E$. On montre aussi que l'application $\Pi : TX \to X$ est de classe C_M^{k-1} dans le sens de la définition 6 et donc que l'ensemble TX a une structure de LCR-fibré vectoriel de classe C_M^{k-1}.

Définition 8. *Nous dirons q'une application $\xi : X \to TX$ est un champ de vecteurs de classe C_M^{k-1} sur X si l'application ξ est de classe C_M^{k-1} dans le sens de la définition 6 et de plus nous avons $\xi(x) \in T_xX$ pour tout $x \in X$.*

Définition 9. *Soit J un intervalle ouvert de R tel que $0 \in J$ et soit $g: J \to X$ une application, où X est une LCR-variété de classe C_M^k modelée sur l'espace de Fréchet E. On dit que g est de classe C^k sur J si pour tout $t \in J$, il existe une LCR-carte locale (U, h) dans $g(t)$ sur X telles que $g(J) \subset U$ et l'application $h \circ g : J \to h(U) \subset E$ soit de classe C^k sur J dans le sens de la définition 3 de [4].*

Définition 10. *Une application $g : J \to X$ de classe C^k est une courbe intégrale d'un champ de vecteurs ξ sur X dans le point $x \in X$ si $g(0) = x$ et $g'(t) = \xi(g(t))$ pour tout $t \in J$, où $g'(t) = Tg(i(t))$. Tg est l'application tangente de g, $Tg : J \times R \to TX$ et $i : J \to R$ est la section identique.* En utilisant la représentation locale du champ ξ dans le LCR-cartes locales (U, h) sur X et $(H^{-1}(U), Th)$ sur TX nous obtenons l'application $Th \circ \xi \circ h^{-1} : h(U) \to h(U) \times E$ définie par :

$$(Th \circ \xi \circ h^{-1})(u) = (u, \xi_h(u)) \text{ pour tout } u \in h(U).$$

L'application $\xi_h : h(U) \subset E \to E$ est appelée la partie principale du champ ξ. Il résulte ainsi que localement, les champs de vecteurs sur une LCR-variété de classe C_M^k sont donnés par les applications de classe C_M^{k-1} d'un sous-ensemble $h(U)$ raffiné ouvert de E dans E.

En effet, si ξ est un champ de vecteurs de classe C_M^{k-1} sur X, il est évident que la partie principale $\xi_h : h(U) \to E$ est aussi une application de classe C_M^{k-1}. Alors, dire que localement, une application $g : J \to X$ est une courbe intégrale pour le champ ξ est équivalent à dire que l'application $h \circ g$ est une courbe intégrale sur $h(U)$ pour ξ_h, c'est-à-dire que $(h \circ g)'(t) = \xi_h((h \circ g)(t))$ pour tout $t \in J$. Le théorème 4 de [4] est alors un théorème d'existence pour le flux local d'un champ de vecteurs ξ de classe C_M^{k-1} sur une LCR-variété X modelée sur un espace de Fréchet E. D'une manière clasique on peut montrer la proposition suivante :

Proposition 5. *Soient $g_1 : J_1 \to X$ et $g_2 : J_2 \to X$ deux courbes intégrales pour le champ ξ sur la LCR-variété X telles que $g_1(0) = g_2(0) = x_0$. Alors les applications g_1 et g_2 coïncident sur $J_1 \cap J_2$.*

Notons par A_{x_0} l'ensemble de toutes les courbes intégrales g pour le champ ξ avec la condition intiale $g(0) = x_0$. Soit $J(x_0)$ la réunion des domaines de $g \in A_{x_0}$ et notons $J(x_0) = (t^-(x_0), t^+(x_0)) \subset R$.

$$\text{Soit } D(\xi) = \{(t, x) \mid t \in (t^-(x), t^+(x)), x \in X\} \subset R \times X.$$

Définition 11. *Nous appelerons le flux global pour ξ, une application $g : D(\xi) \to X$ tel que pour tout $x \in X$, l'application $g_x : J(x) \to X$ définie par $g_x(t) = g(t, x)$ soit une courbe intégrale de classe C^{k-1} pour ξ avec la condition initiale $g_x(0) = x$.*

Théorème 1. *Soit ξ un champ de veteurs de classe C_M^{k-1} sur X et $g : D(\xi) \to X$ le flux global pour ξ. Alors pour tout $x \in X$ et tout $t_0 \in J(x)$, nous avons $J(g(t_0, x)) = J(x) - t_0$ et pour tout $t \in J(x) - t_0$ on a $g(t, g(t_0, x)) = g(t + t_0, x)$.*

Démonstration. Soit $x_1 = g(t_0, x) \in X$. Pour $x_1 \in X$, il existe une courbe intégrale $g_{x_1} : J(x_1) \to X$ avec $g_{x_1}(0) = x_1$. Soit g_1 la courbe intégrale définie par $g_1(t) = g_x(t + t_0)$ avec $g_1(0) = g_x(t_0) = x_1$. On a $g_1(0) = g_{x_1}(0)$ et donc les courbes intégrales g_1 et g_{x_1} ont le même domaine $J(x_1) = \{t \in R : t + t_0 \in J(x)\} = J(x) - t_0$ et $g_{x_1}(t) = g_1(t)$ pour tout $t \in J(x) - t_0$. Il résulte encore $g(t, g(t_0, x)) = g(t + t_0, x)$.

Théorème 2. *Soit ξ un champ de vecteurs de classe C_M^{k-1} sur la LCR-variété X de classe C_M^k modelée sur l'espace de Fréchet E. Alors l'ensemble $D(\xi)$ est ouvert dans $R \times X$, le flux global g est de classe C^{k-1} par rapport à (t, x), pour tout $t \in J(x)$ l'ensemble $D_t = \{x \in X : (t, x) \in D(\xi)\}$ est ouvert dans X et l'application $g_t : D_t \to X$ définie par $g_t(x) = g(t, x)$ est de classe C_M^{k-1}.*

Démonstration. Fixons le point $x_0 \in X$ et notons par J' l'ensemble de tous les points $t \in J(x_0)$ avec la propriété q'il existe un nombre réel $a > 0$ et un voisinage ouvert U de x_0 tel que l'ensemble $(t - a, t + a) \times U \subset D(\xi)$ et la restriction de g à $(t - a, t + a) \times U$ soit de classe C^{k-1} par rapport à (t, x) et pour tout $t_1 \in (t - a, t + a)$, l'application $g_{t_1} : U \to X$ soit de classe C_M^{k-1}. D'une manière classique, on montre que $0 \in J'$ et que J' coïncide avec $J(x_0)$. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in D(\xi)$ il existe un sous-ensemble $J(x_0) \times U \subset D(\xi)$ tel que $(t_0, x_0) \in J(x_0) \times U$, U soit un voisinage ouvert de x_0 et la restriction de g à $J(x_0) \times U$ soit de classe C^{k-1} par rapport à (t, x) et de classe C_M^{k-1} par rapport à x.

Remarque. Si X est une LC-variété de classe C_M^k modelée sur l'espace de Fréchet E, alors tous les résultats ci-dessus restent valables si nous considérons sur X la topologie τ_r donnée par la proposition 1.

BIBLIOGRAPHIE

1. Gheorghiez, Gh., Oproiu, V. — *Varietăţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale*, vol. I, Ed. Academiei, Bucureşti, 1976.
2. Lang S. — *Introduction to Differentiable Manifolds*, Interscience, New York, 1962.
3. Marinescu G. — *Tratat de analiză funcţională*, vol. II, Ed. Academiei, Bucureşti, 1972.
4. Păpaghiuc N. — *Sur le calcul différentiel de Marinescu dans les espaces localement convexes*, An. şt. Univ. Iaşi, fasc. 1, 1979.

Reçu le 5.VI.1978

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
R. S. Roumanie