11. Ştefănescu, M. — *A generalization of the concept of near-ring: Infra-near rings*. An. şt. Univ. Iaşi, 25 (1979), 45—56.
12. Ştefănescu, M. — *Infra-near rings of affine type*, An. şt. Univ. Iaşi, 24 (1978), 5—14.
13. Ştefănescu, M. — *Multiplications infra-distributives sur un groupe*, Publ. Math. Debrecen (to appear).
14. Ştefănescu, M. — *Self-distributive infra-near rings*. Atti. Accad. Naz. Lincei, 68 (1980).

Received 18.IV.1979

Faculty of Mathematics
University of Iaşi,
Iaşi, R.S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVI, s. I a, 1980, f. 1

SUR QUELQUES STRUCTURES ALGEBRIQUES DANS LES CATÉGORIES

PAR

I. TOFAN

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A un objet de $\mathcal{C}$. Par définition [1, cap. 3; 2, cap. 4] on suppose que *A est doté d'une certaine structure algébrique si* $\forall X \in |\mathcal{C}|$, ($|\mathcal{C}|$ *désigne la classe des objets de* $\mathcal{C}$) *l'ensemble* $\mathcal{C}(X, A)$ *est doté de la structure considérée et pour chaque morphisme* $u: X \to Y$ ($Y \in |\mathcal{C}|$), $\mathcal{C}(u, A)$ *est un homomorphisme pour cette structure*. On peut montrer [1, cap. 3; 2, cap. 4] que cette condition est équivalente à une condition de factorization pour le foncteur contravariant $\mathcal{C}(-, A): \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ (Ens désigne la catégorie des ensembles).

Nous allons supposer dès maintenant que, sauf mention spéciale, $\mathcal{C}$ a des produits finis et un objet final, cas dans lequel on peut expliciter, comme ci-dessous, la condition antérieure.

Soient p_1, p_2, p_3 les projections pour $A \times A \times A$, q_1, q_2 les projections pour $A \times A$. Notons par $<.>$ le morphisme qui correspond par la propriété d'universalité du produit à un ensemble adequat de morphismes (de même source).

Soit un morphisme $f: A \times A \to A$, nommé opération sur l'objet A. Pour chaque $X \in |\mathcal{C}|$ on peut définir sur $\mathcal{C}(X, A)$ une opération $*_X$ par $u *_X v = f < u, v >$, où $u, v \in \mathcal{C}(X, A)$.

Remarque 1: $\forall X \in |\mathcal{C}|$, $u, v \in \mathcal{C}(X, A)$ et $\forall q: Y \to X$, $(u *_X v)q = (uq) *_X (vq)$.

Lemme 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) $f(1_A \times f) < p_1, < p_2, p_3 >> = f(f \times 1_A) << p_1, p_2 >, p_3 >$ (*condition d'associativité pour* f);

b) $\forall X \in |\mathcal{C}|$, *l'opération* $*_X$ *définie sur* $\mathcal{C}(X, A)$ *est associative*;

c) *l'opération* $*_{A \times A \times A}$ *définie sur* $\mathcal{C}(A \times A \times A, A)$ *satisfait à l'égalité*: $p_1 *_{A \times A \times A} (p_2 *_{A \times A \times A} p_3) = (p_1 *_{A \times A \times A} p_2) *_{A \times A \times A} p_3$.

Lemme 2. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) $f < q_2, q_1 > = f$ (*condition de commutativité pour* f) ($< q_2, q_1 > \neq < q_1, q_2 > = 1_{A \times A}$);

b) $\forall X \in |\mathcal{C}|$, *l'opération* $*_X$ *définie sur* $\mathcal{C}(X, A)$ *est commutative*;

c) *l'opération* $*_{A \times A}$ *définie sur* $\mathcal{C}(A \times A, A)$ *satisfait à l'égalité*: $q_1 *_{A \times A} q_2 = q_2 *_{A \times A} q_1$.

Soit 1 l'objet final de $\mathcal{C}$ et les produits

$$\begin{tikzcd} A \times 1 \arrow[r, "q_A"] \arrow[d] & A \\ 1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \times A \arrow[r] \arrow[d, "q'_A"] & 1 \\ A & \end{tikzcd}$$

Notons par $!_X$ l'unique morphisme $X \to 1$. Soit $1 \xrightarrow{e} A$.

Lemme 3. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $f(1_A \times e) = q_A$, $f(e \times 1_A) = q'_A$;

b) $\forall X \in |\mathcal{C}|$, *l'opération* $*_X$ *définie sur* $\mathcal{C}(X, A)$ *admet comme élément neutre* $e!_X$;

c) *les opérations* $*_{A\times 1}$ *et* $*_{1\times A}$ *définies sur* $\mathcal{C}(A \times 1, A)$, $\mathcal{C}(1 \times A, A)$ *admettent les éléments neutres* $e!_{A\times 1}$, *et* $e!_{1\times A}$ *respectivement.*

Soient $f : A \times A \to A$ et $1 \to A$ satisfaisant à a) du Lemme 3.

Lemme 4. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\exists\, i : A \to A$ *satisfaisant à* $f < 1_A, i > = e!_A = f < i, 1_A >$;

b) $\forall X \in |\mathcal{C}|$, $\forall u \in \mathcal{C}(X, A)$ *a un inverse par rapport à l'opération* $*_X$;

c) $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ *a un inverse par rapport à l'opération* $*_A$.

Soient $f, g : A \times A \to A$ et $\circ_X$ définie (en utilisant g) de façon analogue à $*_X$.

Lemme 5. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $f(1 \times g) < p_1, < p_2, p_3 > > = g(f \times f) < < p_1, p_2 >, < p_1, p_3 > >$ *(condition de distributivité à droite de* f *par rapport à* g*)* ;

b) $\forall X \in |\mathcal{C}|$, *l'opération* $*_X$ *est distributive à droite par rapport à* $\circ_X$ *(*$*_X$, $\circ_X$ *sont définies sur* $\mathcal{C}(X, A)$*)* ;

c) *Les opérations* $*_{A+A+A}$, $\circ_{A\times A\times A}$ *définies sur* $\mathcal{C}(A \times A \times A, A)$ *satisfont à* $p_1 *_{A\times A\times A} p_2 \circ_{A\times A\times A} p_3) = (p_1 *_{A\times A\times A} p_2) \circ_{A\times A\times A} (p_1 *_{A\times A\times A} p_3)$.

Remarque 2. Sont équivalentes :

— les conditions a) des lemmes 1, 3, 4 sur un même objet ;

— la condition b) du lemme 3 (sans la spécification de la forme de l'élément neutre) et des lemmes 1 et 4 sur un même objet ;

— les conditions c) des lemmes 1, 3, 4 avec la même restriction que pour les conditions b) ci-dessus.

En effet en utilisant la remarque 1 on obtient la forme désirée pour l'élément neutre.

Remarque 3. Si $\forall X \in |\mathcal{C}|$, $\mathcal{C}(X, A)$ est doté d'une structure de groupe (ou groupe commutatif, ou anneau, ou anneau commutatif) par rapport à l'opération $*_X$ (et $\circ_X$ pour la structure d'anneau) satisfaisant à la condition de la remarque 1 alors, $q_1 *_{A\times A} q_2 : A \times A \to A$ (éventuellement $q_1 \circ_{A\times A} q_2$ aussi) est une opération sur A satisfaisant aux conditions équivalentes (selon les lemmes) aux conditions satisfaites par les opération (s) qui définit (définissent) la structure sur $\mathcal{C}(X, A)$.

En effet si on note $q_1 *_{A\times A} q_2$ par f (et éventuellement $q_1 \circ_{A\times A} q_2$ par g) on peut constater que $\forall X \in |\mathcal{C}|$ on obtient, pour $u, v \in \mathcal{C}(X, A)$, $u *_X v = f < u, v >$ $(u \circ_X v = g < u, v >)$.

Pour les objets dotés d'une structure algébrique analogue (obtenue par la réunion convenable des conditions des lemmes antérieures), A_i avec

f_i (éventuellement g_i), $i = 1, 2$, on définit la notion d'homomorphisme, $u : A_1 \to A_2$ par la condition $u f_1 = f_2 (u \times u)$ $(u g_1 = g_2 (u \times u))$.

Remarque 4. Cette condition est équivalente à la condition que $\forall X \in |\mathcal{C}|$, $\mathcal{C}(X, u)$ soit un homomorphisme pour la situation considérée.

En effet pour $A_1, A_2 \in |\mathcal{C}|$ dotés avec $f_1 : A_1 \times A_1 \to A_1$, $e_1 : 1 \to A_1$, $i_1 : A_1 \to A_1$, $f_2 : A_2 \times A_2 \to A_2$, $e_2 : 1 \to A_2$, $i_2 : A_2 \to A_2$, pour un homomorphisme $q : A_1 \to A_2$ et pour $u, v \in \mathcal{C}(X, A_1)$, où $X \in |\mathcal{C}|$, on obtient $q(u *_X v) = q f_1 < u, v > = f_2 (q \times q) < u, v > = f_2 < qu, qv > = (qu) *'_X (qv)$, où $*_X$ est définie sur $\mathcal{C}(X, A_1)$ par f_1 et $*'_X$ est définie sur $\mathcal{C}(X, A_2)$ par f_2 (éventuellement une relation similaire pour g_1 et g_2). En prenant $X = A_1 \times A_1$, $u = p_1$, $v = p_2$, où par p_1, p_2 on note les projections du produit $A_1 \times A_1$, on démontre l'affirmation réciproque.

Il résulte immédiatement que si $u : A \to B$, $v : B \to C$ sont des homomorphismes, alors vu est un homomorphisme. On obtient les catégories des objets groupe commutatif, anneau, anneau commutatif (notées génériquement par $\mathcal{C}_{a_1}$), et les catégories des objets groupe, anneau, groupe commutatif, anneau commutatif (notées génériquement par $\mathcal{C}_{a_2}$) — associées à $\mathcal{C}$.

Un objet de $\mathcal{C}$ peut être doté d'une structure algèbrique par diverses opérations et dans ce cas il fournira plusieurs objets de $\mathcal{C}_{a_i}$ $(\mathcal{C}_{a_1})$, qui seront individualisés par cette opération.

Proposition 1. $\mathcal{C}_{a_1}$ *est une catégorie additive.*

Démonstration. 1_1 et $!_{1\times 1}$ (considéré deux fois éventuellement) équipent l'objet final 1 avec la structure algèbrique considérée.

Soit $A \in |\mathcal{C}_{a_1}|$. La relation $f(e \times e) = f(1_A \times e)(e \times 1_1)$ (éventuellement une relation similaire pour $g : A \times A \to A$), où $f : A \times A \to A$ est l'opération sur A, $e : 1 \to A$ est l'élément neutre de f, démontre que $e : 1 \to A$ est un morphisme de $\mathcal{C}_{a_1}$. Pour chaque objet de $\mathcal{C}_{a_1}$, $!_A$ est homomorphisme. Soient $A_1, A_2 \in |\mathcal{C}_{a_1}|$ dotés avec $f_1 : A_1 \times A_1 \to A_1$, $f_2 : A_2 \times A_2 \to A_2$, $i_1 : A_1 \to A_1$, $i_2 : A_2 \to A_2$, $e_1 : 1 \to A_1$, $e_2 : 1 \to A_2$. En vertu de la remarque 4, il résulte que le sousensemble de $\mathcal{C}(1, A_2)$, des éléments $q\alpha$ où $\alpha : 1 \to A_1$, est fermé à l'opération $*_1$ définie par f_1 (éventuellement aussi à $\circ_1$, définie par g_1). L'élément qe_1 est neutre pour $*_X$ et $q\alpha$ admet l'inverse $qi_1\alpha$ par rapport à l'opération $*_X$. On en déduit que $qe_1 = e_2$. Alors, du fait que 1_1 est l'élément neutre de $\mathcal{C}(1,1)$, il résulte qu'il existe un seul homomorphisme de 1 à A. En conclusion, l'objet final 1 de $\mathcal{C}$ est objet zéro pour $\mathcal{C}_{a_1}$. En utilisant les lemmes 1—4, on démontre que $\mathcal{C}_{a_2}(X, Y)$ est groupe commutatif pour chaque $X, Y \in |\mathcal{C}_{a_2}|$. Selon les remarques 1 et 4, on démontre que la composition des homomorphismes est bilinéaire par rapport à l'opération de $\mathcal{C}_{a_1}(X, Y)$. Pour les objets A_1, A_2 considérés, nous pouvons définir une opération $*''_X$ sur $\mathcal{C}(X, A_1 \times A_2)$ par $\alpha *''_X \beta = < p_1\alpha *_X p_1\beta, p_2\alpha *'_X p_2\beta >$, où $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(X, A_1 \times A_2)$, p_1, p_2 sont les projections du produit $A_1 \times A_2$ (éventuellement on définit de façon analogue une opération $\circ''_X$). Pour $u : Y \to X$ $\mathcal{C}(u, A_1 \times A_2) : \mathcal{C}(X, A_1 \times A_2) \to \mathcal{C}(Y, A_1 \times A_2)$ est un homomorphisme. Les conditions des lemmes 3, 4 sont satisfaites dans ce cas en considérant $< e_1, e_2 > : 1 \to A_1 \times A_2$ et $i_1 \times i_2 : A_1 \times A_2 \to A_1 \times A_2$. Finallement on vérifie que $\forall X \in |\mathcal{C}|$ $\mathcal{C}(X, p_1)$, $\mathcal{C}(X, p_2)$, $\mathcal{C}(X, < q, r >)$ où $M \in |\mathcal{C}_{a_1}|$, $q \in \mathcal{C}_{a_1}(M, A_1)$, $r \in \mathcal{C}_{a_1}(M, A_2)$ sont des homomorphismes pour la structure algébrique considérée.

Proposition 2. *Si $\mathcal{C}$ est cartésienne fermée, alors $\forall A \in |\mathcal{C}_{a_2}|$, $\exists F, G : \mathcal{C}_{a_2} \to \mathcal{C}_{a_2}$ — des foncteurs — tels que les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{a_2} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "U"'] & \mathcal{C}_{a_2} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "A\times -"] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}_{a_2} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "U"'] & \mathcal{C}_{a_2} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "A"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

soient commutatives, où $A \times -$ est le foncteur produit, A son adjoint (à droite) et U est le foncteur d'oublie.

Démonstration. Comme dans la démonstration de la proposition précédente, il résulte que $\mathcal{C}_{a_2}$ a des produits. Si $A, X, Y \in |\mathcal{C}_{a_2}|$ et $\alpha \in C_{a_2}(X, Y)$, alors $1_A \times \alpha \in \mathcal{C}_{a_2}(A \times X, A \times Y)$, donc $F = A \times - : \mathcal{C}_{a_2} \to \mathcal{C}_{a_2}$ $(A \in |\mathcal{C}_{a_2}|)$. Soient $A, B \in |\mathcal{C}_{a_2}|$. $\forall X \in |\mathcal{C}|$ il existe $B^A \in |\mathcal{C}|$ tel que $\mathcal{C}(A \times X, B) \underset{\cong}{\varphi_X} \mathcal{C}(X, B^A)$, où φ_X est l'isomorphisme naturel. On peut alors, définir l'opération $*_X$ sur $\mathcal{C}(X, B^A)$ par $u *_X v = \varphi_X(\varphi_X^{-1}(u) *_{A\times X} \varphi_X^{-1}(v))$, où $u, v \in \mathcal{C}(X, B^A)$. En remarquant que pour $\alpha \in \mathcal{C}(Y, X)$, $\varphi_Y^{-1}(u\,\alpha) = \varphi_X^{-1}(u)(1_A \times \alpha)$ et $\mathcal{C}(1_A \times u, B)$ est un homomorphisme, on déduit que $B^A \in |\mathcal{C}_{a_2}|$. En utilisant la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(A\times X, B) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\mathcal{C}(A\times X, f)"] & \mathcal{C}(X, B^A) \arrow[d, "\mathcal{C}(X, f^A)"] \\ \mathcal{C}(A\times X, C) \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{C}(X, C^A) \end{tikzcd}$$

où $B, C \in |\mathcal{C}_{a_2}|$ et $f(\mathcal{C}_{a_2}(B, C)$, on démontre que $f^A \in \mathcal{C}_{a_2}(B^A, C^A)$, donc on peut construire G.

Notons par $\mathcal{C}_a$ les catégories des objets groupe commutatif ou anneau commutatif — associées à $\mathcal{C}$.

Proposition 3. *$\mathcal{C}_a(X, A)(X, A \in |\mathcal{C}_a|)$ avec l'opération définie par $A \in |\mathcal{C}_a|$ est sousstructure algébrique de $\mathcal{C}(X, A)$, doté de l'opération $*_X$ définie par l'opération de $A \in |\mathcal{C}_a|$.*

Démonstration. Soit $A \in |\mathcal{C}_a|$ doté avec $f : A \times A \to A$, $i : A \to A$, $e : 1 \to A$, $(g : A \times A \to A$ éventuellement). On démontre que $\forall Y \in |\mathcal{C}|$, $\mathcal{C}(Y, i) : \mathcal{C}(Y, A) \to \mathcal{C}(Y, A)$ est un homomorphisme, donc $i \in \mathcal{C}_a(A, A)$. Alors pour $u \in \mathcal{C}_a(X, A)$ il résulte que $i\,u \in \mathcal{C}_a(X, A)$ et que $i\,u$ est l'inverse de u. Pour $u, v \in \mathcal{C}_a(X, A)$ il résulte, que $f < u, v > \in \mathcal{C}_a(X, A)$ en utilisant la remarque 1.

BIBLIOGRAPHIE

1. Pareigis B. — *Categories and functors*, Academic Press, 1970.
2. Bucur I., Deleanu A. — *Introduction to the theory of categories and functors*, J. Wiley & Sons, 1968.

Received 21.X1978

Séminaire Mathématique
Université „Al. I. Cuza"
6600 Iaşi, R.S. Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVI, s. 1 a, 1980, f. 1

SUR LES SUITES ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE PERIODIQUES EN PROBABILITE

PAR

ANCA-MARIA PRECUPANU

Dans un article récent [5], nous avons mis en évidence certaines propriétés remarquables des fonctions presque-périodiques en probabilité, définies par une propriété du type Bohr en probabilité.

Dans la note présente, nous allons introduire, de la même façon, la notion de suite asymptotiquement presque-périodique en probabilité et, en suivant une idée de G. H. Meisters [1], nous allons établir un théorème du type Dini (théorème 7), qui donne un critérium pour l'uniforme convergence en probabilité des suites monotones de fonctions presque-périodiques en probabilité.

En général, nous utiliserons les notations et la terminologie de l'article ci-dessus cité [5].

En ce qui suit, nous désignerons par : R—l'ensemble des nombres réels ; N—l'ensemble des entiers positifs ; $(\Omega, \mathcal{A}, P)$—un espace de probabilité. De même, nous comprendrons par une fonction aléatoire sur R une fonction définie sur R et à valeurs dans l'espace de toutes les variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nous désignerons encore par : $C_p(R)$—l'ensemble des fonctions aléatoires continues en probabilité sur R ; $AP_p(R)$—l'ensemble des fonctions presque-périodiques en probabilité sur R.

Définition 1. *Un ensemble A de nombres réels est dit relativement dense s'il existe une longueur $l > 0$ (longueur d'inclusion) telle que tout intervalle de longueur supérieure à l contienne au moins un point de A.*

Définition 2. *Soit f une fonction aléatoire sur R. Un nombre réel τ est appelé nombre de translation de f par rapport aux nombres positifs ε et η si*

$$P(\{\omega \in \Omega : |f(t+\tau, \omega) - f(t, \omega)| \geqslant \varepsilon\}) < \eta,$$

pour tout $t \in R$.

Soit $A = A(\varepsilon, \eta; f)$ l'ensemble de ces nombres de translation.

Définition 3. *On dit qu'une fonction $f \in C_p(R)$ est une fonction presque périodique en probabilité si pour chaque couple $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, l'ensemble $A(\varepsilon, \eta; f)$ est relativement dense.*

Définition 4. *On dit qu'une suite de fonctions $f_n \in C_p(R)$ est asymptotiquement presque-périodique en probabilité si pour chaque couple $\varepsilon > 0$ et*