**Proposition 2.** *Si $\mathcal{C}$ est cartésienne fermée, alors $\forall A \in |\mathcal{C}_{a_2}|$, $\exists F$, $G : \mathcal{C}_{a_2} \to \mathcal{C}_{a_2}$ — des foncteurs — tels que les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{a_2} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "U"'] & \mathcal{C}_{a_2} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "A\times -"] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}_{a_2} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "U"'] & \mathcal{C}_{a_2} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "A^{-}"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

*soient commutatives, où $A\times -$ est le foncteur produit, $A$ son adjoint (à droite) et $U$ est le foncteur d'oublie.*

*Démonstration.* Comme dans la démonstration de la proposition précédente, il résulte que $\mathcal{C}_{a_2}$ a des produits. Si $A, X, Y \in |\mathcal{C}_{a_2}|$ et $\alpha \in C_{a_2}(X, Y)$, alors $1_A \times \alpha \in \mathcal{C}_{a_2}(A \times X, A \times Y)$, donc $F = A \times - : \mathcal{C}_{a_2} \to \mathcal{C}_{a_2}$ $(A \in |\mathcal{C}_{a_2}|)$. Soient $A, B \in |\mathcal{C}_{a_2}|$. $\forall X \in |\mathcal{C}|$ il existe $B^A \in |\mathcal{C}|$ tel que $\mathcal{C}(A \times X, B) \underset{\cong}{\varphi_X} \mathcal{C}(X, B^A)$, où $\varphi_X$ est l'isomorphisme naturel. On peut alors, définir l'opération $*_X$ sur $\mathcal{C}(X, B^A)$ par $u *_X v = \varphi_X(\varphi_X^{-1}(u) *_{A\times X} \varphi_X^{-1}(v))$, où $u, v \in \mathcal{C}(X, B^A)$. En remarquant que pour $\alpha \in \mathcal{C}(Y, X)$, $\varphi_Y^{-1}(u\,\alpha) = \varphi_X^{-1}(u)(1_A \times \alpha)$ et $\mathcal{C}(1_A \times u, B)$ est un homomorphisme, on déduit que $B^A \in |\mathcal{C}_{a_2}|$. En utilisant la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(A\times X, B) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\mathcal{C}(A\times X, f)"] & \mathcal{C}(X, B^A) \arrow[d, "\mathcal{C}(X, f^A)"] \\ \mathcal{C}(A\times X, C) \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{C}(X, C^A) \end{tikzcd}$$

où $B, C \in |\mathcal{C}_{a_2}|$ et $f(\mathcal{C}_{a_2}(B, C)$, on démontre que $f^A \in \mathcal{C}_{a_2}(B^A, C^A)$, donc on peut construire $G$.

Notons par $\mathcal{C}_a$ les catégories des objets groupe commutatif ou anneau commutatif — associées à $\mathcal{C}$.

**Proposition 3.** *$\mathcal{C}_a(X, A)(X, A \in |\mathcal{C}_a|)$ avec l'opération définie par $A \in |\mathcal{C}_a|$ est sousstructure algébrique de $\mathcal{C}(X, A)$, doté de l'opération $*_X$ définie par l'opération de $A \in |\mathcal{C}_a|$.*

*Démonstration.* Soit $A \in |\mathcal{C}_a|$ doté avec $f : A \times A \to A$, $i : A \to A$, $e : 1 \to A$, ($g : A \times A \to A$ éventuellement). On démontre que $\forall Y \in |\mathcal{C}|$, $\mathcal{C}(Y, i) : \mathcal{C}(Y, A) \to \mathcal{C}(Y, A)$ est un homomorphisme, donc $i \in \mathcal{C}_a(A, A)$. Alors pour $u \in \mathcal{C}_a(X, A)$ il résulte que $i\,u \in \mathcal{C}_a(X, A)$ et que $i\,u$ est l'inverse de $u$. Pour $u, v \in \mathcal{C}_a(X, A)$ il résulte, que $f < u, v > \in \mathcal{C}_a(X, A)$ en utilisant la remarque 1.

BIBLIOGRAPHIE

1. Pareigis B. — *Categories and functors*, Academic Press, 1970.
2. Bucur I., Deleanu A. — *Introduction to the theory of categories and functors*, J. Wiley & Sons, 1968.

*Received 21.X1978*

*Séminaire Mathématique*
*Université „Al. I. Cuza"*
*6600 Iaşi, R.S. Roumanie*

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVI, s. I a, 1980, f. 1

# SUR LES SUITES ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE PERIODIQUES EN PROBABILITE

PAR

ANCA-MARIA PRECUPANU

Dans un article récent [5], nous avons mis en évidence certaines propriétés remarquables des fonctions presque-périodiques en probabilité, définies par une propriété du type Bohr en probabilité.

Dans la note présente, nous allons introduire, de la même façon, la notion de suite asymptotiquement presque-périodique en probabilité et, en suivant une idée de G. H. Meisters [1], nous allons établir un théorème du type Dini (théorème 7), qui donne un critérium pour l'uniforme convergence en probabilité des suites monotones de fonctions presque-périodiques en probabilité.

En général, nous utiliserons les notations et la terminologie de l'article ci-dessus cité [5].

En ce qui suit, nous désignerons par : $R$—l'ensemble des nombres réels ; $N$—l'ensemble des entiers positifs ; $(\Omega, \mathcal{A}, P)$—un espace de probabilité. De même, nous comprendrons par une fonction aléatoire sur $R$ une fonction définie sur $R$ et à valeurs dans l'espace de toutes les variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nous désignerons encore par : $C_p(R)$—l'ensemble des fonctions aléatoires continues en probabilité sur $R$ ; $AP_p(R)$—l'ensemble des fonctions presque-périodiques en probabilité sur $R$.

**Définition 1.** *Un ensemble $A$ de nombres réels est dit relativement dense s'il existe une longueur $l > 0$ (longueur d'inclusion) telle que tout intervalle de longueur supérieure à $l$ contienne au moins un point de $A$.*

**Définition 2.** *Soit $f$ une fonction aléatoire sur $R$. Un nombre réel $\tau$ est appelé nombre de translation de $f$ par rapport aux nombres positifs $\varepsilon$ et $\eta$ si*

$$P(\{\omega \in \Omega ; |f(t + \tau, \omega) - f(t, \omega)| \geq \varepsilon\}) < \eta,$$

*pour tout $t \in R$.*

Soit $A = A(\varepsilon, \eta ; f)$ l'ensemble de ces nombres de translation.

**Définition 3.** *On dit qu'une fonction $f \in C_p(R)$ est une fonction presque périodique en probabilité si pour chaque couple $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, l'ensemble $A(\varepsilon, \eta ; f)$ est relativement dense.*

**Définition 4.** *On dit qu'une suite de fonctions $f_n \in C_p(R)$ est asymptotiquement presque-périodique en probabilité si pour chaque couple $\varepsilon > 0$ et*

*$\eta > 0$ il existe $n_0 \in N$ tel que l'ensemble des nombres de translation communs à toutes les fonctions $f_n$ avec $n \geqslant n_0$ soit relativement dense.*

On remarque que la notion de suite asymptotiquement presque-périodique en probabilité diffère de la notion de suite uniformément presque-périodique en probabilité (voir [5]) parce qu'en général, dans la définition 4 le nombre $n_0$ est dépendant de $\varepsilon$ et $\eta$.

**Théorème 5.** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions aléatoires continues en probabilité sur $R$, qui converge uniformément en probabilité sur $R$ vers la fonction $f$.*

*Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

I) $f \in AP_P(R)$ ;

II) *la suite $(f_n)$ est asymptotiquement presque-périodique en probabilité.*

*Démonstration.* Montrons que I) $\rightarrow$ II). En effet, si $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, de la convergence uniforme en probabilité sur $R$ de la suite $(f_n)$, il résulte l'existence d'un nombre $n_0 \in N$, tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait

$$P(\{\omega \in \Omega \,;\, |f_n(t, \omega) - f(t, \omega)| \geqslant \{\varepsilon/3\}) < \eta/3, \tag{1}$$

pour tout $t \in R$. D'autre part, puisque $f \in AP_P(R)$, il existe un nombre positif $l$ tel que chaque intervalle de $R$ de longueur supérieure à $l$ contienne au moins un point $\tau$ de façon que

$$P(\{\omega \in \Omega \,;\, |f(t + \tau, \omega) - f(t, \omega)| \geqslant \varepsilon/3\}) < \eta/3, \tag{2}$$

pour tout $t \in R$.

En utilisant les relations (1) et (2) on obtient immédiatement pour ce point $\tau$ l'inegalité

$$P(\{\omega \in \Omega \,;\, |f_n(t + \tau, \omega) - f_n(t, \omega)| \geqslant \varepsilon\}) < \eta,$$

pour tout $t \in R$ et $n \geqslant n_0$, ce qui signifie que la suite $(f_n)$ est asymptotiquement presque-périodique en probabilité.

Montrons, maintenant, que II) $\rightarrow$ I). Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. Puisque la suite $(f_n)$ est asymptotiquement presque-périodique en probabilité, on peut trouver $n_0' \in N$ et $l > 0$ tels que chaque intervalle de $R$ de longueur supérieure à $l$ contienne un point $\tau$ de façon que

$$P(\{\omega \in \Omega \,;\, |f_n(t + \tau, \omega) - f_n(t, \omega)| \geqslant \varepsilon/3)\} < \eta/3, \tag{3}$$

pour tous $t \in R$ et $n \geqslant n_0'$. En utilisant les relations (1) et (3), pour $n \geqslant \max\{n_0', n_0\}$ nous obtenons :

$$P(\{\omega \in \Omega \,;\, |f(t + \tau, \omega) - f(t, \omega)| \geqslant \varepsilon\}) < \eta,$$

pour tout $t \in R$, c'est-à-dire que $f \in AP_P(R)$.

**Lemme 6.** *Soit $(X, \tau)$ un espace topologique compact et soient $f, f_n$ $(n \in N)$ des fonctions aléatoires continues en probabilité sur $X$. Si la suite $(f_n)$ est décroissante et converge en probabilité sur $R$ vers $f$, alors $(f_n)$ converge uniformément en probabilité sur $R$ vers $f$.*

*Démonstration.* Pour chaque $\varepsilon > 0$ et $n \in N$, désignons par

$$E_n = E_n(\varepsilon) = \left\{t \in X \,;\, \int_\Omega \frac{|f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|}{1 + |f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|}\, dP(\omega) \geqslant \varepsilon\right\}.$$



On voit aisément que les ensembles $E_n$ sont fermés et la suite $(E_n)$ est décroissante. Puisque la suite $(f_n)$ converge en probabilité vers $f$ sur $R$, il résulte que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$. Mais $X$ est un espace compact, ce qui entraîne que la suite $(E_n)$ contienne une famille finie avec l'intersection $\varnothing$. Donc il existe un nombre $n_0 \in N$ tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait

$$\int_\Omega \frac{|f_n(t, \omega) - f(t, \omega)|}{1 + |f_n(t, \omega) - f(t, \omega)|}\, dP(\omega) < \varepsilon,$$

pour tout $t \in X$, c'est-à-dire que la suite $(f_n)$ converge uniformément en probabilité sur $R$ vers $f$.

Ce lemme constitue une version du théorème abstrait de D i n i ([1], [2]) pour le cas des fonctions aléatoires. Maintenant, à l'aide du lemme 6 nous pouvons établir un critérium de type Dini pour les fonctions presque-périodiques en probabilité.

**Théorème 7.** *Soit $(f_n)$ une suite décroissante de fonctions continues en probabilité sur $R$, qui converge en probabilité sur $R$ vers la fonction $f \in C_P(R)$. Si la suite $(f_n)$ est asymptotiquement presque-périodique en probabilité, alors la convergence de $(f_n)$ sur $R$ est uniforme en probabilité.*

*Démonstration.* En effet, si $(f_n)$ est une suite asymptotiquement presque-périodique en probabilité, pour chaque couple de nombres positifs $\varepsilon$ et $\eta$ on trouve une longueur d'inclusion $l$ et un nombre $n_0 \in N$ correspondants aux nombres $\varepsilon/3$, $\eta/3$. Pour chaque $t \in R$, soit $\tau \in [-t, -t + l]$ de la définition 4, pour lequel

$$P(\{\omega \in \Omega;\, |f_n(t + \tau, \omega) - f_n(t, \omega)| \geqslant \varepsilon/3\}) < \eta/3, \tag{4}$$

pour tout $t \in R$ et $n \geqslant n_0$. Puisque, en vertu du lemme 6, la suite $(f_n)$ converge uniforme en probabilité sur $[0, l]$ vers $f$, on peut choisir un nombre $n_0' \in N$ tel que

$$P(\{\omega \in \Omega;\, |f_n(t, \omega) - f_m(t, \omega)| \geqslant \varepsilon/3\}) < \eta/3, \tag{5}$$

pour tout $t \in [0, l]$.

Maintenant, en utilisant (4) et (5) on obtient pour $m, n > \max\{n_0, n_0'\}$:

$$\begin{aligned} P(\{\omega \in \Omega;\, |f_n(t, \omega) - f_m(t, \omega)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant\ & P(\{\omega \in \Omega;\, |f_n(t, \omega) - f_n(t + \tau, \omega)| \geqslant \varepsilon/3\}) + \\ & + P(\{\omega \in \Omega;\, |f_n(t + \tau, \omega) - f_m(t + \tau, \omega)| \geqslant \varepsilon/3\}) + \\ & + P(\{\omega \in \Omega;\, |f_m(t + \tau, \omega) - f_m(t, \omega)| \geqslant \varepsilon/3\}) < \eta, \end{aligned}$$

pour tout $t \in R$, inégalité qui assure, grâce aux résultats compris dans [3], chap. XVII, § 2, que la convergence de la suite $(f_n)$ est uniforme en probabilité sur $R$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Meisters G. H. — *Almost periodic Dini theorems*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 5, 1975, p. 419—425.
2. Namioka I. — *Partially ordered linear topological spaces*, Memoirs of the American Mathematical Society, 24, 1957.
3. Onicescu O., Mihoc Gh., Ionescu-Tulcea C.T. — *Calculul probabilităţilor şi aplicaţii*, Editura Academiei, 1956, Bucureşti.
4. Onicescu O., Istrăţescu V. — *Approximation theorems for random functions*, Rendiconti di Matematica Roma, 8, 1975, p. 65—81.
5. Precupanu A. — *Some properties of the almost periodic functions in probability*. (sub tipar la An. şt. Iaşi).

*Reçu le 18.XI.1978*

*Faculté de Mathématiques*
*Université de Iassy*
*R.S. Roumanie*

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi
Tomul XXVI, s. I a, 1980, f. 1

# DUALITY IN BEST APPROXIMATION PROBLEM

BY

TEODOR PRECUPANU

The best approximation problem in normed linear spaces may be regarded as a special optimization problem. Thus, many known properties of the best approximation problem appear as particular cases of some general results of optimization theory. For instance, it is the case for the duality properties of the convex best approximation for which the convex analysis offers strong methods of investigation. Using various results from the optimization theory, many authors have obtained interesting results in the abstract approximation theory or in the approximation theory for concret spaces of functions. A unitary treatment of the best approximation problem as an optimization problem can be found in the book of P.-J. Laurent [7].

In the present paper we intend to point out a relationship between the existence of the elements of best approximation by a closed set and the property that the sum of two closed sets is also closed. Consequently, we obtain different characterizations of the proximinal sets of a normed linear space.

§ 1. **Some duality results.** Let $C$ be a non empty closed set of the normed linear space $X$. Let us consider the *problem of the best approximation*

$$(\mathcal{P}_u) \qquad \min_{x \in C} \| x - u \|$$

of an element $u \in X$ by the elements of the set $C$.

The solutions of this problem (if they exist) are called the *elements of the best approximation* of $u$ by the elements of $C$. The problem $\mathcal{P}_u$ can be considered as a *problem without constraints*

$$(1.1) \qquad \min_{x \in X} \{ \| x - u \| + I_C(x) \}$$

or as a *minimax problem*

$$(1.2) \qquad \min_{x \in C} \sup_{x^* \in S^*} (x^*, u - x),$$

where $I_A$ denotes the *indicator function* of a set $A$ and

$$S^* = \{ x^* \in X^* ; \| x^* \| \leqslant 1 \}$$

is the closed unit ball of the dual $X^*$ of the normed linear space $X$.