Corollaire 7.8 *Si K est principal alors tout point de S_pK est complet.*

§8. **Deux catégories.** Soit $\mathbf{C}_1$ une catégorie qui satisfait aux mêmes hypothèses que $\mathbf{C}$ (cf. §1). Considérons $F:\mathbf{C}\to\mathbf{C}_1$ un foncteur additif, qui satisfait : (a) u monomorphisme $\Rightarrow F(u)$ monomorphisme. (b) F commute avec les limites projectives finies.

Définissons l'application $\psi:\mathrm{Sp}(F(A))\to\mathrm{Sp}(A)$ par $\psi(F(A),\mathbf{A})=(A,\mathbf{A}')$ ou : $\mathbf{A}'=\{A'\subseteq A \mid F(A')\in\mathbf{A}\}$

On a $A\in\mathbf{A}'$, car $F(A)\in\mathbf{A}$. Si $F(A')\in A$ et $A'\subseteq A''$ alors $F(A')\subseteq F(A'')$ d'après (a), donc $F(A'')\in\mathbf{A}$ et $A''\in\mathbf{A}'$. Si $F(A')$ et $F(A'')\in\mathbf{A}$ alors $F(A'\cap A'')=F(A')\cap F(A'')$ d'après (b), donc $A'\cap A''\in\mathbf{A}'$. Ceci montre que ψ est bien défini.

Proposition 8.1. *On a* $\psi^{-1}(\mathbf{O}(A'))=\mathbf{O}(F(A'))$.

Démonstration. On a les équivalences :

$$(F(A),\mathbf{A})\in\psi^{-1}(\mathbf{O}(A'))\Leftrightarrow(A,\mathbf{A}')\in\mathbf{O}(A,)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A'\in\mathbf{A}'\Leftrightarrow F(A')\in\mathbf{A}\Leftrightarrow(F(A),\mathbf{A})\in\mathbf{O}(F(A')).$$

Théorème 8.2. *Il existe un ψ-morphisme* $\varphi:\mathbf{O}_A\to\mathbf{O}_{F(A)}$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, ψ est continu. Définissons : $\varphi_A : Q_+(\varepsilon(A,\{A'\}),A)\to Q_+(\varepsilon(F(A),\{F(A')\}),F(A))$, par $\varphi_A([u])=[F(u)]$. (a) et (b) montrent que $F(\varepsilon(A,\{A'\})\subseteq\varepsilon(F(A),\{F(A')\})$ car les constructions des prop. 3.5.—3.7. n'utilisent que des limites projectives finies. Ceci prouve que $[F(u)]\in Q_+(\varepsilon(F(A),\{F(A')\}),F(A))$. Enfin, si $u_1\in[u]$, donc $u_1|_{A''}=u|_{A''}$ ce qui donne $F(u_1)|_{F(A'')}=F(u)|_{F(A'')}$ $\varphi_{A'}$ est donc bien défini. Soit $A'\subseteq A''$. Alors $F(A')\subseteq F(A'')$, donc $\varepsilon(F(A),\{F(A'')\})\subseteq\varepsilon(F(A),\{F(A')\})$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Q_+(\varepsilon(A,\{A'\}),A) & \xrightarrow{\varphi_{A'}} & Q_+(\varepsilon(F(A),\{F(A')\},F(A)) \\ \uparrow\rho & & \uparrow\rho \\ Q_+(\varepsilon(A,\{A''\}),A) & \xrightarrow{\varphi_{A''}} & Q_+(\varepsilon(F(A),\{F(A'')\},F(A)) \end{array}$$

ce qui prouve que φ est un ψ-morphisme.

BIBLIOGRAPHIE

Pour les références [1] à [9], voir [10].

[1a] Popa E. — *Notion de spèctre dans une catégorie quelconque I.* An. şt. Univ. Iaşi, tom XXVI 1980, fasc. 2, p. 282—302

Faculté de Mathématiques
Université de Jassy
R.S. Romania

Reçu le 14.I.1980

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVII, s. I a, 1981, f. 1

SUR L'EXISTENCE DES VALEURS PROPRES POSITIVES POUR DES OPÉRATEURS NON-LINÉAIRES DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

PAR

G. ISAC et R. GAUDET

1. Le problème des valeurs propres positives pour un opérateur a ses origines dans les travaux de Frobenius et Perron [8], [10] et il a été étudié par : Birkhoff et Kellog [2], Krein et Rutman [10], S. Karlin [8], M. A. Krasnoselskii [9, a), b)], D. E. Edumunds, A. J. B. Potter et C. A. Stuart [6], I. Massabo et C. A. Stuart [11], H. H. Schaefer [12], H. Amann [1] etc.

Sur les espaces localement convexes, ce problème a été étudié par H. Schaefer [12], F. E. Bonsall [3] et récemment par A. Cornea et I. Ichim [4].

Les résultats obtenus sur les espaces localement convexes sont des théorèmes d'existence et les démonstrations données utilisent directement ou indirectement le degré topologique [4], [9], [11].

Nous utilisons une méthode très simple, c'est *la méthode de continuité de Poincaré* exprimée par un résultat de A. Granas [7]. L'utilisation du théorème de Granas et des cônes localement bornés, qui sont considérés dans cette note, nous permettent des démonstrations sur l'existence des valeurs propres positives pour les opérateurs non-linéaires compacts, dans les espaces localement convexes sans utiliser le degré topologique.

2. Si X est un espace topologique et $U\subset X$ un ensemble, $\overline{U}$ sera la fermeture de U et ∂U la frontière.

Soit F^* la classe des espaces qui ont la propriété de point fixe pour es applications compactes. La classe F^* est formée par tous les espaces lopologiques X qui ont la propriété suivante : si $f:X\to X$ est une application continue et compacte, alors f a un point fixe dans l'ensemble X. Les ensembles convexes fermés d'un espace localement convexe se trouvent dans la classe F^*. L'espace $L_p(0<p<1)$ qui est homéomorphe à l_2 (d'après le théorème Bessaga-Pelczynski) appartient à la classe F^* et aussi les espaces linéaires topologiques admissibles au sens de Klee. Tous les espaces vectoriels que nous considérons sont des espaces réels. Utilisant la méthode de continuité de Poincaré, qui est infiniment plus simple que la méthode du dégre topologique, A. Granas a démontré dans l'ouvrage [7] le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit C un convexe appartenant à la classe F^*, U un voisinage ouvert de $O \in C$ et $f: \overline{U} \to C$ une application continue et compacte. Si f n'a pas de points fixes dans $\overline{U}$, alors il existe $x \in \partial U$ et $0 < \lambda < 1$ tels que $\lambda f(x) = x$.*

Du théorème 1 nous obtenons facilement le résultat suivant.

Corollaire [Birkhoff-Kellog]. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie, U une boule ouverte de centre O et f une application compacte et continue de ∂U dans E, telle que $O \notin \overline{f(\partial U)}$.*

Alors il existe $x_0 \in \partial U$ et $\rho > 0$ tels que $f(x_0) = \rho x_0$.

Démonstration. L'espace E étant de dimension infinie, le théorème 6.2 de Dugundji [5] dit que ∂U est un retract absolu, donc il existe une retraction $\mathcal{R}$ de $\overline{U}$ dans ∂U (qui prolonge l'application identique de ∂U). Alors : $g(x) = f(\mathcal{R}(x))$ est une application continue et compacte de $\overline{U}$ dans E telle que, $0 \notin \overline{g(\overline{U})}$. Il existe $\alpha > 0$ tel que : $\overline{U} \cap \alpha \cdot \overline{g(\overline{U})} = \emptyset$, d'où il résulte que l'application $h(x) = \alpha g(x)$ est continue, compacte et elle n'a pas des points fixes dans $\overline{U}$.

Le théorème 1 implique qu'il existe $x_0 \in \partial U$ et $0 < \lambda < 1$ tels que : $\lambda h(x_0) = \lambda \alpha g(x_0) = \alpha \lambda f(x_0) = x_0$.

Si on pose : $\rho = 1/\alpha . \lambda$ on obtient le corollaire.

Remarque. Le corollaire n'est pas vrai dans un espace de dimension finie.

Théorème 2. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe séparé, A un compact de E tel que $0 \notin \operatorname{conv}(A)$ et $\mathbf{K}$ le cône convexe de sommet zéro engendré par A. Soit U un voisinage ouvert de zéro tel que $U \cap \mathbf{K}$ est borné et soit f : $\partial U \to A$ une application continue.*

Alors, il existe $x_0 \in \partial U \cap K$ et $\lambda_0 > 0$ tels que $f(x_0) = \lambda_0 x_0$.

Démonstration. a) On suppose que E est un espace normé et A convexe. Puisque $\partial U \cap \mathbf{K}$ est fermé dans l'ensemble $\overline{U}$, utilisant le théorème de prolongement de Dugundji [5, Th. 4.1] on obtient que f a un prolongement continue $\overline{f}: \overline{U} \to A$. L'ensemble $U \cap \mathbf{K}$ étant borné il existe $\alpha > 0$ tel que $\overline{U} \cap \mathbf{K} \cap \alpha A = \emptyset$. L'application $h(x) = \alpha \overline{f}(x)$ est continue et compacte de $\overline{U}$ dans αA et elle n'a pas des points fixes dans l'ensemble $\overline{U}$. Le théorème 1, implique qu'il existe $x_0 \in \partial U$ et $\lambda > 1$ tels que $h(x_0) = \lambda x_0$. Comme $\overline{f}(x_0) \in A$, il résulte que $x_0 \in \partial U \cap \mathbf{K}$ d'où :

$$\overline{f}(x_0) = f(x_0) \text{ et } f(x_0) = \lambda_0 x_0 \text{ où } \lambda_0 = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

b) On suppose maintenant que E est localement convexe. Soit V un voisinage de zéro. D'après un théorème connu d'approximation, il existe $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ et une application $f_V : \partial U \cap \mathbf{K} \to \operatorname{conv}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tels que :

$$(\forall x \in \partial U \cap \mathbf{K})(f(x) - f_V(x) \in V).$$

Par hypothèse, $0 \notin \operatorname{conv}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Si $\mathbf{K}_V$ est le cône convexe engendré par $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ alors $\mathbf{K}_V$ est contenu dans un espace de dimension finie de l'espace E.

Donc on peut appliquer la partie a) de la démonstration à la restriction de f_V à $\partial U \cap \mathbf{K}_V$. Il existe alors $x_V \in \partial U \cap \mathbf{K}_V$ et $\lambda_V > 0$ tels que :

$$f_V(x_V) = \lambda_V x_V, \text{ d'où : } f(x_V) - \lambda_V x_V \in V.$$

Soit W un voisinage ouvert, convexe symétrique de zéro contenu dans U et soit : $p_W(x) = \inf\{\rho < 0 \mid x \in \rho W\}$.

Si $V \subset W$ alors $p_W((f(x_V) - \lambda_V x_V) < 1$ d'où :

$$\lambda_V < \frac{1 + p_W(f(x_V))}{p_W(x_V)}.$$

Comme $p_W(x_V) \geq 1$, il résulte que si $V \subset W$ l'ensemble $\{\lambda_V\}$ est un ensemble borné.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des voisinages de zéro. On a :

$$\lim_{\mathcal{U}} f(x_V) = y \in A \text{ et } \lim_{\mathcal{U}} \lambda_V = \lambda_0.$$

Il résulte que $\lambda_0 > 0$ parce que pour tout V, $x_V \in \partial U \cap K$ et $\partial U \cap \mathbf{K}$ est borné et si on suppose que $\lim \lambda_V = 0$ il résulte que $\lambda_V \cdot x_V \xrightarrow{\tau} 0$ d'où on obtient que $O \in A$, ce qui est absurde.

Alors, $\lim_{\mathcal{U}} x_V = x_0 = y/\lambda_0 \in \partial U \cap \mathbf{K}$ et comme f est continue on a : $f(x_0) = \lambda_0 x_0$.

Corollaire. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe séparé $\mathbf{K} \subset E$ un cône convexe saillant de sommet zéro et $A \subset \mathbf{K}$ un compact tel que $0 \notin A$. Soit U un voisinage ouvert de zéro tel que $U \cap \mathbf{K}$ est borné et soit $f: \partial U \cap \mathbf{K} \to A$ une application continue.*

Alors, il existe $x_0 \in \partial U \cap \mathbf{K}$ et $\lambda_0 > 0$ tels que $f(x_0) = \lambda_0 x_0$.

Démonstration. Les hypothèses, $\mathbf{K}$ saillant et $0 \notin A$ impliquent $0 \notin \operatorname{conv}(A)$ et on peut utiliser le théorème 2.

Remarque. Le théorème 2 dans le cas d'un cône localement compact a été démontré dans l'ouvrage [4] par une démonstration différente qui utilise le degré topologique.

3. Nous supposons que $E(\tau)$ est un espace localement convexe réel tel que la topologique τ est définie par une famille *suffisante* de semi-normes $\{|\ |_\alpha\}_{\alpha \in A}$ c'est-à-dire :

$s_1)$ $\quad (\forall x \in E)(x \neq 0)(\exists \alpha \in A)(|x|_\alpha \neq 0)$,

$s_2)$ $\quad (\forall \alpha', \alpha'' \in A)(\exists \alpha \in A)(\forall x \in E)(|x|_{\alpha'}, |x|_{\alpha''} \leq |x|_\alpha)$.

Nous disons que l'ensemble $\mathbf{K} \subset E$ est un cône convexe si et seulement si :

$i)$ $\quad \mathbf{K} + \mathbf{K} \subset \mathbf{K}$; $\qquad ii)$ $(\forall \lambda)_{\in \mathbb{R}_+}(\lambda \mathbf{K} \subset \mathbf{K})$.

L'ensemble $B \subset E$ est une *base* pour le cône K si et seulement si :

$b_1)$ B est un ensemble convexe,

$b_2)$ $(\forall x)_{\in K \setminus \{0\}} (\exists \lambda)_{\in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}}$, unique) $(\exists b)_{\in B}$, unique) $(x = \lambda b)$.

Nous disons que l'ensemble convexe $B_1 \subset E$ *engendre* le cône $\mathbf{K}$ si : $\mathbf{K} = \bigcup_{\lambda \in R_+} \lambda B_1$.

Le cône convexe $\mathbf{K}$ s'appelle *bien basé* s'il est engendré par un ensemble convexe et borné A tel que $O \notin \overline{A}$. Utilisant un théorème de séparation, on peut démontrer qu'un cône convexe $\mathbf{K}$ est bien basé si et seulement si, il existe une base bornée B telle que $O \notin \overline{B}$.

Remarque. Les cônes convexes bien basés occupent une place très importante dans la théorie des espaces vectoriels topologiques ordonnés. Des cas particuliers de cônes bien basés sont utilisés dans la théorie axiomatique du potentiel, dans la théorie Choquet, etc.

Nous introduisons maintenant une classe de cônes convexes dans les espaces localement convexes qui a été inspirée par les cônes avec „plastering" qui ont été définis et utilisés en analyse nonlinéaire par M. A. Krasnoselskii [9].

Définition 1. *Nous disons que le cône convexe $\mathbf{K} \subset E$ est localement borné s'il existe un voisinage U de zéro tel que $U \cap \mathbf{K}$ est borné.*

Nous avons la caractérisation suivante pour les cônes localement bornés dans des espaces localement convexes.

Proposition 1. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe réel. Le cône convexe $\mathbf{K} \subset E$ est localement borné si et seulement si, il existe une seminorme continue p uniformément positive sur le cône $\mathbf{K}$, c'est-à-dire :*

$$(^*) \qquad (\forall \alpha \in A)(\exists \gamma_\alpha > 0)_{\in R}(\forall x \in \mathbf{K})(\gamma_\alpha \cdot |x|_\alpha \leqslant p(x)).$$

Démonstration. Soit $\mathbf{K} \subset E$ un cône convexe localement borné. Donc il existe un voisinage U de zéro tel que $U \cap \mathbf{K}$ est borné. Nous pouvons supposer que U est un voisinage ouvert, convexe et équilibré et nous considérons le fonctionnelle de Minkovski de l'ensemble U : $p(x) = \inf\{\rho > 0 \mid x \in \rho U\}$; $\forall x \in E$. La fonctionnelle p est une semi-norme continue. Nous avons aussi la relation suivante : $\partial U = \{x \in E \mid p(x) = 1\}$. En effet, nous avons la caractérisation suivante :

$$(x \in \partial U) \Leftrightarrow (\forall \lambda, \mu)(0 < \lambda < 1 < \mu)[(\lambda x \in U) \,\&\, (\mu x \notin U)].$$

Si $p(x) = 1$ et $0 < \lambda < 1 < \mu$ alors puisque : $p(\lambda x) = \lambda < 1 < \mu = p(\mu x)$ il résulte que $(\lambda x \in U)$ et $(\mu x \notin U)$. Soit maintenant $x \in E$ tel que : $(\forall \lambda, \mu) \cdot (0 < \lambda < 1 < \mu)[(\lambda x \in U) \,\&\, (\mu x \notin U)]$.

Dans ce cas $p(x) \neq 0$ parce que si $p(x) = 0$, il résulte que $2x \in U$ ce qui est absurde.

Soit $\mu_n \downarrow 1$ et $\lambda_n \uparrow 1$: puisque p est continue et $p(\lambda_n x) < 1 < p(\mu_n x)$ il résulte que $p(x) = 1$.

Puisque l'ensemble $\overline{U} \cap \mathbf{K}$ est borné, il résulte que pour toute α, il existe une constante $\beta_\alpha > 0$: telle que

$$(^{**}) \qquad (\forall x \in \overline{U} \cap \mathbf{K})(|x|_\alpha \leqslant \beta_\alpha).$$

Nous prouvrons maintenant que si $x \in \mathbf{K}$ et $p(x) = 0$, alors $x \neq 0$.

En effet, si $p(x) = 0$ alors la définition de la semi-norme p implique l'existence d'une suite $\{\rho_n\}_{n \in N}$ telle que : $\forall n \in N$, $\rho_n > 0$, $x \in \rho_n U$ et $\lim \rho_n = 0$.

Donc pour tout $\alpha \in A$ et tout $n \in N$ nous avons : $|x|_\alpha \leqslant \rho_n \cdot \beta_\alpha$ ce qui donne que $|x|_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in A$ d'où utilisant la propriété s_1) nous obtenons $x = 0$.

Alors si $x \in \mathbf{K} \setminus \{O\}$, $x/[p(x)] \in \partial U$ et de la relation $(^{**})$ nous avons $\{x\}_\alpha \leqslant \beta_\alpha p(x)$ et si nous posons $\gamma_\alpha = 1/\beta_\alpha$ nous obtenons la relation $(^*)$.

Si nous supposons que pour le cône $\mathbf{K}$ il existe une semi-norme continue p uniformément positive sur $\mathbf{K}$ alors, utilisant la propriété s_2) nous obtenons que l'ensemble $U = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$ est un voisinage de zéro tel que $U \cap \mathbf{K}$ est borné ce qui démontre la proposition.

Remarques. 1) Si U est un voisinage de zéro, ouvert, convexe, symétrique tel que : $U \cap \mathbf{K}$ est borné et si : $(\forall x, y \in \mathbf{K})(0 \leqslant \mathbf{K}x \leqslant \mathbf{K}y$ et $y \in U) \Rightarrow x \in U$ alors : $p(x) = \inf\{\rho > 0 \mid x \in \rho U\}$; $\forall x \in E$, est une semi-norme continue, uniformément positive et croissante sur $\mathbf{K}$ et le cône $\mathbf{K}$ est un cône *normal* [voir A. L. Peressini: *Ordered topological vector spaces* — Harper & Row (1967)].

2) La proposition 1 n'implique pas que la topologie sur le cône $\mathbf{K}$ est normable mais nous avons la propriété remarquable suivante : si $\mathbf{K} \subset E$ est un cône convexe localement borné et p une semi-norme continue et uniformément positive sur $\mathbf{K}$, alors une suite $\{x_n\} \subset \mathbf{K}$ est convergente vers zéro si et seulement si $p(x_n) \to 0$.

L'existence *d'ensemble séparant* définie dans l'ouvrage [4] caractérise les cônes localement bornés.

Soit $\mathbf{K} \subset E$ un cône convexe ; un sous-ensemble $A \subset \mathbf{K}$ s'appelle *séparant* s'il satisfait les conditions suivantes :

1°) A est fermé dans $\mathbf{K}$.

2°) $O \notin A$.

3°) La composante connexe de $\mathbf{K} \setminus A$ contenant l'origine est un ensemble borné dans E.

Proposition 2. *Le cône convexe $\mathbf{K} \subset E$ est localement borné si et seulement si, il existe un ensemble $A \subset \mathbf{K}$ séparant.*

Démonstration. Soit $A \subset \mathbf{K}$ un ensemble séparant. Puisque l'espace topologique $\mathbf{K}$ est localement connexe par lignes brisées il résulte que les composantes connexes de $\mathbf{K} \setminus A$ sont ouvertes dans $\mathbf{K}$. Donc la composante connexe de $\mathbf{K} \setminus A$ contenant l'origine est un ensemble borné dans E et ouvert dans $\mathbf{K}$, d'où il résulte qu'il existe un voisinage U de zéro tel que $U \cap \mathbf{K}$ est borné.

Réciproquement, si $\mathbf{K}$ est localement borné, il existe un voisinage U de zéro tel que $U \cap \mathbf{K}$ est borné, alors la frontière de U relativement à $\mathbf{K}$ est un ensemble séparant.

Définition 2. Nous disons que l'ensemble $A \subset \mathbf{K}$ est *(f)-séparant* si, pour tout sous-cône convexe $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$ engendré par un ensemble fini de vecteurs l'ensemble $A \cap \mathbf{K}'$ est séparant dans $\mathbf{K}'$.

Le résultat suivant est démontré dans l'ouvrage [4].

Proposition 3. *Soit $\mathbf{K} \subset E$ un cône convexe et $A \subset \mathbf{K} \setminus \{O\}$ un ensemble borné et fermé par rapport à $\mathbf{K}$. Si A est (f)-séparant alors il est séparant (et le cône $\mathbf{K}$ est localement borné).* On peut démontrer que si $\mathbf{K} \subset E$ est un cône convexe et $A \subset \mathbf{K}$ un ensemble, les conditions suivantes impliquent que A est séparant dans $\mathbf{K}$:

a) A est fermé dans $\mathbf{K}$,

b) $O \notin A$,

c) A est borné,

d) Pour tout $x \in \mathbf{K}$ on a : $(R_+ \,.\, x) \cap A = [a \,.\, x, b \,.\, x]$ où : $0 < a \leqslant b < +\infty$.

Exemples. 1°) Chaque cône convexe localement compact ou faiblement compact dans un espace localement convexe est localement borné.

2°) Chaque cône convexe qui a une base bornée et fermée dans un espace localement convexe est localement borné.

3°) Chaque cône convexe bien basé dans un espace localement convexe est localement borné. La mécanique quantique axiomatique utilise des cônes bien basés.

4°) Chaque cône convexe dans un espace normé est localement borné.

4. Nous présentons maintenant quelques résultats globaux sur les valeurs propres pour des opérateurs non-linéaires dans les espaces localement convexes.

Lemme. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe réel est $\mathbf{K} \subset E$ un cône convexe saillant et fermé.*

Si $x, y \in \mathbf{K}$ et $y \neq 0$ alors il existe $\beta_0 \in R$, $\beta_0 \geqslant 0$ tel que :

i) $$(\forall \beta \leqslant \beta_0)(x - \beta y \in \mathbf{K}).$$

ii) $$(\forall \gamma > \beta_0)(x - \gamma y \notin \mathbf{K}).$$

Démonstration. La démonstration se trouve dans l'ouvrage [9, *b*)].

Dans les résultats suivants la relation d'ordre utilisée sur l'espace E est la relation d'ordre définie par le cône convexe $\mathbf{K}$.

Proposition 4. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe réel, $\mathbf{K} \subset E$ un cône convexe saillant, fermé et $f : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ un opérateur croissant. On suppose :*

i) $(\exists)(\alpha, \delta, \gamma)(\alpha > 0, \gamma > \delta \geqslant 0)(\exists y, y \in \mathbf{K} \setminus \{O\})(\forall t, \delta \leqslant t < \gamma)(f(ty) \geqslant \alpha t y)$.

ii) $(\exists x \in \mathbf{K})$ *tel que :*

a) $x - \gamma y \notin \mathbf{K}$, *b*) $f(x) \leqslant \lambda x$ où $\lambda > 0$, *c*) $\beta y \leqslant x$ où $(\beta > 0$ et $\beta \geqslant \delta)$

Alors, $\alpha \leqslant \lambda$.

Démonstration. Nous supposons par absurde que $\lambda < \alpha$. Le lemme et les hypothèses *a*) et *c*) impliquent : $\beta < \gamma$. Puisque f est croissant, de la relation i), utilisant *c*) nous obtenons : $f(x) \geqslant f(\beta y) \geqslant \alpha \beta y$ et l'hypothèse *b*) implique : $\lambda x \geqslant \alpha \beta y$. Donc : $x \geqslant (\lambda^{-1}\alpha) \,.\, \beta y$ et nous obtenons la relation :

iii) $$x \geqslant (\lambda^{-1}\alpha)^k \,.\, \beta y \,; \quad \forall n \in N.$$

En effet, nous avons déjà démontré la relation iii) pour $n = 1$.

Nous supposons la relation iii) vraie pour n, alors *a*) et le lemme impliquent : $(\lambda^{-1}\alpha)^n \beta < \gamma$.

Puisque $(\lambda^{-1}\alpha)^n > 1$ il résulte : $(\lambda^{-1}\alpha)^n \beta \geqslant \beta \geqslant \delta$ et donc : $f(x) \geqslant f((\lambda^{-1}\alpha)^n \beta y) \geqslant \alpha(\lambda^{-1}\alpha)^n \beta y$ et la relation *b*) implique : $\lambda x \geqslant \alpha(\lambda^{-2}\alpha)^n \beta y$ d'où nous obtenons que iii) est vraie pour tout $n \in N$. Mais alors, la relation iii), *a*) et le lemme impliquent : $(\lambda^{-1}\alpha)^n \beta < \gamma$; $\forall n \geqslant 1$ ce qui est absurde. Donc nous avons $\alpha \leqslant \lambda$.

Théorème 3. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe réel, $\mathbf{K} \subset E$ un cône convexe, fermé, normal, localement borné et p une semi-norme continue*

uniformément positive et croissante sur $\mathbf{K}$. Soit $r \in R$, $r > 0$, $K_r = \{x \in \mathbf{K} \mid p(x) \leqslant r\}$ et $f : \mathbf{K}_r \to \mathbf{K}$ un opérateur complètement continu. On suppose qu'il existe un opérateur $g : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ monoton croissant et minorant pour f sur $\mathbf{K}_r$ tel que : $(\exists \alpha \in R)(\alpha > 0)(\exists \gamma)(\gamma \in R)(\exists y)(y \in \mathbf{K} \setminus \{0\})$:

i) $$(\forall x \in \mathbf{K})(x - \gamma y \notin \mathbf{K}),$$

ii) $$(\forall t)(0 < t < \gamma)(g(ty) \geqslant \alpha t y).$$

Alors, pour tout r_0, $0 < r_0 < r$ il existe $x_{r_0} \in \mathbf{K}$ et $\lambda_{r_0} \geqslant \alpha$ tels que : $f(x_{r_0}) = \lambda_{r_0} x_{r_0}$ et $p(x_{r_0}) = r_0$.

Démonstration. Soit : $0 < r_0 < r$ et $\{\varepsilon_n\}_{n \in N}$ une suite de nombres réels telle que :

1°) $(\forall n \in N)(\varepsilon_n > 0)$, 2°) $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$, 3°) $(\forall n \in N)(\varepsilon_n < \gamma)$,

4°) $(\forall n \in N)(\varepsilon_n \,.\, p(y) \leqslant r - r_0)$.

Puisque $y \neq 0$ et p est uniformément positive sur $\mathbf{K}$, on a : $p(y) > 0$.

Si $x \in \mathbf{K}_{r_0}$, alors $x + \varepsilon_n y \in \mathbf{K}_r$ pour tout $n \in N$ parce que : $d(x + \varepsilon_n y) \leqslant p(x) + \varepsilon_n p(y) \leqslant r_0 + (r - r_0) = r$. Pour chaque $n \in N$ nous considérons l'opérateur $f_n : \mathbf{K}_{r_0} \to \mathbf{K}$ complètement continu défini par : $f_n(x) = f(x + \varepsilon_n y)$; $\forall x \in \mathbf{K}_{r_0}$. Puisque l'opérateur g est croissant et minorant pour f, l'hypothèse *ii*) implique :

$$f_n(x) = f(x + \varepsilon_n y) \geqslant g(x + \varepsilon_n y) \geqslant g(\varepsilon_n y) \geqslant \alpha \varepsilon_n y \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{K}_{r_0}.$$

Nous avons donc la relation suivante :

5°) $$\{p(f_n(x)) \geqslant \alpha \varepsilon_n p(y) > 0 \,; \quad \forall x \in \mathbf{K}_{r_0}.$$

Soit : $U_{r_0} = \{x \in E \mid p(x) < r_0\}$ et comme p est uniformément positive sur $\mathbf{K}$, $\bar{U}_{r_0} \cup \mathbf{K}$ est borné. De la relation 5°), il résulte que : $O \notin \overline{f_n(\partial U_{r_0} \cap \mathbf{K})}$. Alors utilisant le corollaire du théorème 2, il résulte qu'il existe $x_n \in \mathbf{K}$ et $\lambda_n > 0$ tels que : $p(x_n) = r_0$. $f(x_n) = \lambda_n x_n$; $\forall n \in N$.

Nous avons aussi :

6°) $$f(x_n + \varepsilon_n y) = \lambda_n x_n \,; \quad \forall n \in N.$$

De la proposition 1, il résulte que l'ensemble $\mathbf{K}_r$ est borné et f étant complètement continu nous obtenons que $\{\lambda_n x_n\}_{n \in N}$ est un ensemble borné, donc $\{\lambda_n\}_{n \in N}$ est une suite de nombres réels bornés. Il existe alors $M > 0$ tel que : $(\forall n \in N)(\lambda_n \leqslant M)$. Puisque l'opérateur g est croissant et minorant pour f nous avons : $(\forall n \in N)(\lambda_n x_n \geqslant g(x_n + \varepsilon_n y) \geqslant g(x_n)$ et $(\forall n \in N)(\lambda_n x_n \geqslant g(x_n + \varepsilon_n y) \geqslant g(\varepsilon_n y) \geqslant \alpha \varepsilon_n y)$. Nous utilisons maintenant la proposition 4 en prenant : $\delta = 0$, $x = x_n$, $\lambda = \lambda_n$, $\beta = \lambda_n^{-1} \alpha \varepsilon_n$ et nous obtenons : $(\forall n \in N)(\lambda_n \geqslant \alpha)$.

Donc : $(\forall n \in N)(0 < \alpha \leqslant \lambda_n \leqslant M)$ et utilisant la relation 6°), la continuité, la compacité de l'opérateur f et éventuellement des sous-suites, nous pouvons supposer qu'il existe :

$\lambda_{r_0} = \lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n$; $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n + \varepsilon_n y)$. Soit, $x_{r_0} = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$; évidemment,

$$p(x_{r_0})=r_0,\ \alpha\leqslant\lambda_{r_0}\leqslant M \quad \text{et} \quad f(x_{r_0})=\lim_{n\to\infty} f(x_n+\varepsilon_n y)=\lambda_{r_0}x_{r_0}$$

et le théorème est démontré.

Théorème 4. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe réel, $\mathbf{K}\subset E$ un cône convexe, fermé, normal, localement borné et p_* une semi-norme continue uniformément positive et croissante sur $\mathbf{K}$. Soit $r\in R$, $r>0$, $\mathbf{K}_r=\{x\in\mathbf{K}\,|\,p(x)\leqslant r\}$ et $f:\mathbf{K}_r\to\mathbf{K}$ un opérateur complètement continu. On suppose :*

i) il existe un opérateur $g:E\to E$ monoton croissant et minorant pour f,

ii) $(\exists s\in R)(s\leqslant 1)(\forall x\in\mathbf{K})(\forall t\in R,\ t\geqslant 0)(g(tx)=t^s g(x))$.

iii) $(\exists u\in E)(u=v-w;\ v,w\in\mathbf{K})(-u\notin\mathbf{K})(\exists p\in N)$

$$(\exists\alpha\in R)(\alpha>0)(g^p(u)\geqslant\alpha u).$$

Alors, pour tout $0<r_0<r$ il existe $x_{r_0}\in\mathbf{K}$ et $\lambda_{r_0}\in R$, $\lambda_{r_0}>0$ tels que : $p_*(x_{r_0})=r_0$; $f(x_{r_0})=\lambda_{r_0}\cdot x_{r_0}$.

Démonstration. Pour chaque $n\in N$ nous considérons l'opérateur :

$$f_n(x)=f(x)+\frac{v}{n}\ ;\quad \forall x\in\mathbf{K}_r.$$

L'hypothèse *iii)* implique que $v\neq 0$. L'opérateur f_n est complètement continu sur l'ensemble : $\partial U_{r_0}=\{x\in\mathbf{K}\,|\,p_*(x)=r_0\}$. Puisque : $p_*(f_n(x))=p_*(f(x)+v/n)\geqslant p_*(v/n)=(1/n)p_*(v)>0$ pour tout $x\in\partial U_{r_0}$ il résulte que : $0\notin\overline{f_n(\partial U_{r_0})}$. Le corollaire du théorème 2 implique qu'il existe $x_n\in\partial U_{r_0}$ et $\lambda_n>0$ tels que : $f_n(x_n)=\lambda_n x_n$, d'où $f(x_n)+v/n=\lambda_n x_n$.

Comme p_* est uniformément positive sur $\mathbf{K}$, il résulte que ∂U_{r_0} est borné et comme f est complètement continu nous pouvons supposer (éventuellement utilisant une sous-suite) que la suite $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ est convergente.

Soit $y_*=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$; de la relation : $\lambda_n r_0=p_*(f(x_n)+v/n)$ il résulte que la suite $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ est bornée. Nous pouvons supposer que $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ est convergente (éventuellement utilisant une sous-suite). Soit $\lambda_{r_0}=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$; nous démontrons que : $\inf\limits_{n\in N}\{\lambda_n\}>0$. En effet, $\lambda_n x_n=f(x_n)=f(x)+\dfrac{v}{n}\geqslant g(x_n)+\dfrac{v}{n}$; $\forall n\in N$. Donc : $\lambda_n x_n\geqslant g(x_n)$ et $x_n\geqslant\dfrac{1}{n\lambda_n}\cdot v$, pour tout $n\in N$ d'où :

$$(\theta):\qquad g^p(x_n)\leqslant g^{p-1}(\lambda_n x_n)\leqslant g^{p-2}(\lambda_n^{1+s}x_n)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n^{1+s+\ldots+s^{p-1}}x_n.$$

De la relation : $x_n\geqslant 1/(n\lambda_n)\cdot v$ il résulte que $x_n\geqslant 1/(n\lambda_n)\,u$.

Le cône $\mathbf{K}$ étant normal, les intervalles en ordre sont bornés d'où on obtient qu'il existe $t_n>0$ tel que : $(x_n\geqslant t_n u)$ et $(x_n\geqslant tu\ ;\ \forall t>t_n)$. L'hypothèse *iii)* implique :

$$(\delta):\qquad g^p(x_n)\geqslant g^p(t_n u)=t_n^{s^p}g^p(u)\geqslant\alpha\cdot t_n^{s^p}\cdot u.$$

Les relations (θ) et (δ) impliquent : $\lambda_n^{1+s+\ldots+s^{p-1}}\cdot x_n\geqslant\alpha\cdot t_n^{s^p}\cdot u$. La définition de t_n implique :

$$\frac{\alpha t_n^{s^p}}{\lambda_n^{1+s+\ldots+s^{p-1}}}\leqslant t_n \ \text{ d'où : } \lambda_n^{1+s+\ldots+s^{p-1}}\geqslant\frac{\alpha}{t_n^{1-s^p}},\quad \forall n\in N.$$

Mais, la suite $\{t_n\}_{n\in N}$ est bornée, parce que si on suppose que $\{t_n\}\to+\infty$, de la relation : $x_n\geqslant t_n u$ nous obtenons (utilisant que p_* est uniformément positive sur $\mathbf{K}$) que : $\{x_n/\lambda_n\}\to 0$, donc $u\leqslant 0$ ($\mathbf{K}$ étant fermé) ce qui est absurde.

Donc, $\inf\limits_{n\in N}\lambda_n>0$ d'où : $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda_{r_0}>0$. Alors $\{x_n\}_{n\in N}$ (éventuellement une sous-suite) est convergente : soit $x_{r_0}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Evidemment, $x_{r_0}\in\partial U_{r_0}$ et $f(x_{r_0})=\lambda_{r_0}x_{r_0}$ et le théorème est démontré.

Corollaire. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe réel, $\mathbf{K}\subset E$ un cône convexe fermé normal et localement borné. Soit $g:E\to E$ un opérateur complètement continu, positif, monoton, croissant et homogène d'ordre $s\leqslant 1$ sur le cône $\mathbf{K}$. S'il existe : $p\in N$, $\alpha\in R$, $\alpha>0$, $u=v-w$, $(v,w\in\mathbf{K})$ tels que : $-u\notin\mathbf{K}$ et $g^p(u)\geqslant\alpha u$, alors il existe $\lambda>0$, $x\in\mathbf{K}$, $x\neq 0$ tels que : $g(x)=\lambda x$.*

Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe réel et $\mathbf{K}\subset E$ un cône convexe.

Définition 3. *Un opérateur $f:K\to\mathbf{K}$ s'appelle strictement positif sur $\mathbf{K}$ si : $\forall\{x_n\}_{n\in N}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$, la relation $f(x_n)\to 0$ implique l'existence d'une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de la suite $\{x_n\}$ convergente vers zéro.*

Remarques. 1°) Un cas particulier de cette notion a été utilisé par H. Schaefer dans l'ouvrage [12].

2°) Un opérateur uniformément positif au sens de Krasnoselskii [9, *a*] est strictement positif.

Théorème 5. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe réel, $\mathbf{K}\subset E$ un cône convexe saillant, fermé, normal et localement borné. Si $f:\mathbf{K}\to\mathbf{K}$ est un opérateur complètement continu et strictement positif, alors pour tout $c>0$ il existe $\lambda_c>0$ et $x_c\in\mathbf{K}$ tels que : $f(x_c)=\lambda_c x_c$ et $p(x_c)=c$; où p est une semi-norme uniformément positive sur $\mathbf{K}$.*

Démonstration. Soit $y\in\mathbf{K}\setminus\{O\}$ et $c\in R$, $c>0$; nous considérons l'opérateur $f_c:\mathbf{K}\to\mathbf{K}$ défini par : $f_c(x)=f(x)+\{c-p(x)\}y$. L'opérateur f_c est complètement continu. Nous pouvons démontrer la relation suivante :

$$(\gamma):\ \inf\{p(f(x))\,|\,x\in\mathbf{K},\ p(x)\geqslant(1/2)c\}=\varepsilon>0.$$

En effet, si nous supposons que :

$$\inf\{p(f(x))\,|\,x\in\mathbf{K}\ \text{et}\ p(x)\geqslant(1/2)c\}=0,$$

alors il existe une suite $\{x_n\}\subset\mathbf{K}$ telle que : $p(x_n)\geqslant(1/2)c$ pour tout $n\in N$ et $p(f(x_n))\to 0$ et puisque f est strictement positif, il résulte qu'il existe une sous suite $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=0$ ce qui est impossible.

Le cône étant normal nous pouvons supposer que la semi-norme p est monotone croissante sur $\mathbf{K}$ donc nous avons :

$$\inf_{x\in\mathbf{K}}p(f_c(x))\geqslant\inf\sup\{p(f(x)),\ |c-p(x)|p(y)\}\geqslant\inf\left\{c,\ \frac{1}{2}cp(y)\right\}>0.$$

Donc l'opérateur :

$$g_c(x)=\frac{c\,f_c(x)}{p(f_c(x))}$$

est bien défini, il est continu et il applique l'ensemble $\mathbf{K} \cap \{x | p(x) \leq c\}$ dans un ensemble compact. Le théorème Tichonoff-Singbal implique qu'il existe $x_c \leq \mathbf{K} \cap \{x | p(x) \leq c\}$ tel que : $x_c = g_c(x_c)$. Nous avons : $p(x_c) = c$ et si nous posons : $\lambda_c = p(f_c(x_c))/c$ nous obtenons, $f(x_c) = \lambda_c x_c$ ce qui démontre le théorème.

Remarque. Un cas particulier du théorème 5 est démontré par H. Schaefer dans l'ouvrage [12].

BIBLIOGRAPHIE

1. Amann H. — *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces* SIAM Review. Vol. 18 Nr. 4 (1976) p. 620—709.
2. Birchoff G. and Kellog O. — *Invariant points in function spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. Nr. 2—3 (1922) p. 96—115.
3. Bonsall F. E. — a) *Linear operators in complete positive cones.* Proc. Roy. Soc. London (3) 8 (1958) p. 53—75. b) *Positive operators compact in an auxiliary topology* Pacific J. Math. Nr. 10 (1960) p. 1 131—1 138.
4. Cornea A. et Ichim I. — *Sur l'existence des valeurs propres pour les applications compactes.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. Tom XXII. Nr. (1977) p. 599—606.
5. Dugundji J. — *An extension of Tietze's theorem.* Pacific J. Math. 1 (1951) p. 353—367.
6. Edmunds D. E., Potter A. J. B., Stuart C. A. — *Non-compact positive operators.* Proc Roy. Soc. London Ser. A 328 (1972) p. 67—81.
7. Granas A. — *Sur la méthode de continuité de Poincaré.* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B t. 282 (1976) p. 983—985.
8. Karlin S. — *Positive operators.* J. Math. Mech. Vol. 8 Nr. 6 (1959) p. 907—937.
9. Krasnoselskii M. A. — a) *Positive solutions of operator equations.* Noordhoff, Groningen (1964). b) *Topological Methods in the theory of non-linear integral equations* Pergaman Press, Oxford (1964).
10. Krein M. G. and Rutman M. A. — *Linear operators leaving invaraint a cone in a Banach space.* Uspehi Mat. Nauk (Nr. 5) Nr. 1 (23) (1948) p. 3—95.
11. Massabo I. and Stuart C. A. — *Positive Eigenvectors of k-set contractions.* Nonlin. Anal. Theory, Math. et Appl. Vol. 3 Nr. 1 (1979) p. 35—44.
12. Schaefer H. H. — *On non-linear positive operators.* Pacific J. Math. Nr. 9 (1959) p. 847—860.
13. Stuart C. A. — *The principal component of solutions for nonlinear eigenvalue problems.* Ball. Un. Mat. Ital. (5) 13—B (1976) p. 726—742.

Collège militaire royal de Saint-Jean
Département de Mathématiques
Saint-Jean, Québec, Canada JOJ 1RO

Reçu le 9.V.1980

Département de Mathématiques
Faculté des sciences
Université de Sherbrooke,
Sherbrooke, Québec, Canada J1K 2R1

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVII, s. I a, 1981, f. 1

OPTIMAL IMPULSIVE CONTROL OF LINEAR EVOLUTIONARY PROCESSES WITH QUADRATIC PERFORMANCE INDEX IN HILBERT SPACES

BY

F. IACOB

§1. **Introduction.** One of the topics of contemporary interest in the control theory is that related to the impulsive control problems. These problems arise quite naturally from a number of mathematical models describing various physical, economic or biological processes in which certain modifications may often be well approximated by instantaneous changes of the system.

During recent years some successful studies, investigating various aspects of particular impulsive control cases, both from a theoretical and a computational point of view, have been developed. The works of J. G. Pierce and A. Schumitzky [13, 14] are relevant. A good deal of attention has been given to this topic by J. L. Lions and his collaborators [10], who introduced the technique of quasi-variational inequalities for solving such problems. Finally, J. Noailles [11, 12] has very recently reported a couple of results relating to impulsive control in the area of evolution equations.

The purpose of this paper is to single out a particular type of problem — the linear impulsive regulator problem. Using a "semigroup and evolution operator" approach, an analytical treatment of a quadratic cost-linear dynamics impulsive control process is made. Concerning the existence of an optimal control law, the appropriate operator Riccati equation (in a mild version) is considered and studied.

The paper is divided into eight sections. In § 2, notations, definitions and some results which will be used in the succeding development are presented. Section 3 contains a number of models involving linear impulsive control problems with quadratic cost functional. The setup of the problem is described in detail in § 4 and the adequate optimality theorem is given in § 5. Section 6 deals with the synthesis of optimal control for the considered problem, introducing a suitable „Riccati equation" formulation for the feedback law. The next section is concerned with the respective operator equation. Finally, § 8 presents the linear hereditary systems case to which the general results are immediately applicable.

§2. **Preliminaries.** In order to establish the setting for the sequel, certain pertinent notations, definitions and results are presented in this section.