Theorem 2.4. *Let M be a semi-invariant submanifold of a Sasakian manifold $\tilde{M}$. Then, the distribution $D\oplus\{\xi\}$ is involutive if and only if we have*

$$h(X, FY)=h(FX, Y) \text{ for all } X, Y\in\Gamma(D). \tag{2.18}$$

Proof. From (1.21) we obtain $h(X, FY)=Ch(X, Y)+FQ\nabla_X Y$, for all $X, Y\in\Gamma(D)$. Since h is a symmetrical morphism of vector bundles, it follows $h(X, FY)-h(Y, FX)=FQ([X, Y])$. In this way, $[X, Y]\in\Gamma(D\oplus\{\xi\})$ if and only if (2.18) is satisfied. Taking into account lemma 2.4, the proof is complete.

Finally, we establish a result on totally umbilical semi-invariant submanifolds. It is known that M is a totally umbilical submanifold if its second fundamental form satisfies

$$h(X, Y)=g(X, Y)H \tag{2.19}$$

for all $X, Y\in\Gamma(TM)$, where H is the mean curvature vector of M. Then, from (1.30) and (2.19), it follows

Theorem 2.5. *Let M be a totally umbilical semi-invariant submanifold of a Sasakian manifold $\tilde{M}$. Then, $\tilde{M}$ is an invariant submanifold.*

Corollary 2.2. *There does not exist totally umbilical proper semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold.*

REFERENCES

1. Bejancu A., — *CR submanifolds of a Kaehler manifold* I, Proc. Amer.Math. Soc., 69 (1978), 135—142.
2. Blair D. — *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Mathematics, 509 (1976), Springer—Verlag.
3. Ludden G. D., Okumura M. Yano K. — *Anti invariant submanifolds of almost contact metric manifolds*, Math. Ann., 225 (1977), 253—261.
4. Kon M. — *Invariant submanifolds in Sasakian manifolds*, Math. Ann., 219, (1976), 277—290.
5. Yano K. — *On a structure defined by a tensor field of type* (1,1), *satisfying* $f^3+f=0$, Tensor 14 (1963), 99—109.
6. Yano K. Kon M. — *Anti-invariant submanifolds of Sasakian space forms*, J. Korean. Math. Soc., 13 (1976), 1—14.
7. Yano K. and Kon M. — *On some minimal submanifolds of an odd dimensional sphere whit flat normal connection*, to appear.

Department of Mathematics
Polytechnical Institute of Iaşi
Iaşi, R. S. România

Received 17.III.1980

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVII, s. I a, 1981, f. 1

CHAMPS PRESQUE SPÉCIAUX DANS L'ALGÈBRE DE DÉFORMATION

PAR

LIVIU NICOLESCU

Dans cette article on introduit les champs presque spéciaux dans l'algèbre de déformation de deux connexions linéaires sur une variété différentiable. Ensuite on met en évidence les courbes presque spéciales de l'algèbre de déformation et on étudie les courbes presque spéciales d'une hypersurface dans l'espace euclidein E^{n+1}. Dans le dernier chapitre on étudie les courbes presque spéciales des l'espaces de Riemann conformément euclidiens.

§0. Introduction. Soit M une variété différentiable à n dimensions. On note par $\mathcal{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles de classe C^∞ sur M et par $\mathfrak{X}(M)$-le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de vecteurs.

Supposons que la variété M est munie d'un couple de connexions linéaires $(\nabla, \bar{\nabla})$. Si l'on définit le produit de deux champs de vecteurs $X, Y\in\mathfrak{X}(M)$ par la formule :

$$X\cdot Y=\bar{\nabla}_X Y-\nabla_X Y. \tag{0.1}$$

alors le $\mathcal{F}(M)$-module $\mathfrak{X}(M)$ devient une $\mathcal{F}(M)$-algèbre. Cette algèbre s'appelle l'algèbre de déformation du couple de connexions $(\nabla, \bar{\nabla})$ et sera notée par $\mathfrak{A}(M, \nabla, \bar{\nabla})$ [8].

§1. Des champs presque spéciaux. Considérons deux connexions linéaires $\nabla, \bar{\nabla}$ sur la variété M et soit $A=\bar{\nabla}-\nabla$ le champ tensoriel de déformation [2].

Définition 1.1. *Un élément $X\in\mathfrak{X}(M)$ s'appelle champ presque spécial dans l'algèbre de déformation $\mathfrak{A}(M, \nabla, \bar{\nabla})$ s'il existe une fonction $f_X\in\mathcal{F}(M)$ telle que :*

$$A(Z, X)=f_X Z, \quad (\forall)\, Z\in\mathfrak{X}(M). \tag{1.1}$$

Remarque 1.2. Si $f_X=0$, alors (1.1) montre que X est un champ spécial dans l'algèbre $\mathfrak{A}(M, \nabla, \bar{\nabla})$ [3].

Proposition 1.3. *L'ensemble $S'(M)$ des champs presque spéciaux dans l'algèbre $\mathfrak{A}(M, \nabla, \bar{\nabla})$ est un $\mathcal{F}(M)$-sousmodule du module $\mathcal{X}(M)$.*

Démonstration. Si $X_1, X_2\in S'(M)$, alors $X_1+X_2\in S'(M)$ et $hX_1\in S'(M)$, $(\forall)h\in\mathcal{F}(M)$.

Proposition 1.4. *Tout champ spécial de l'algèbre* $\mathfrak{A}(M, \nabla, \overline{\nabla})$ *est un champ propre (ou caractéristique)* [1], [5], [7] *dans l'algèbre* $\mathfrak{A}(M, \nabla, \overline{\nabla})$.

Démonstration. Soit $X \in S'(M)$, donc on a (1.1) pour tout $Z \in \mathfrak{X}(M)$. En particulier, pour $Z = X$ de (1.1) on a :

$$A(X, X) = f_X X, \tag{1.2}$$

ce qui montre que X est un champ propre dans l'algèbre $\mathfrak{A}(M, \nabla, \overline{\nabla})$, sa valeur propre étant la fonction f_X.

Proposition 1.5. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Tout élément de l'algèbre* $\mathfrak{A}(M, \nabla, \overline{\nabla})$ *est un champ presque spécial.*

(ii) *Il existe une 1-forme* ω *sur* M *tel que :*

$$A(X, Z) = \omega(X) Z, \quad (\forall) X, Z \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.3}$$

(iii) *Les connexions* ∇ *et* $\overline{\nabla}$ *possèdent le même transport parallèle des directions.*

Démonstration (i)$\Rightarrow$(ii) De (1.1) on a :

$$A(Z, X) = f_X Z, \quad (\forall) X, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.4}$$

En utilisant (1.4), il résulte :

$$f_{X_1+X_2} = f_{X_1} + f_{X_2}, \quad f_{hX} = h f_X, \quad (\forall) h \in \mathcal{F}(M), \quad (\forall) X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M),$$

donc $f_X = \omega(X)$ où ω est une 1-forme sur M.

(ii)$\Rightarrow$(i) Evidmment.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii) Voir [2].

Corollaire 1.6. *Supposons que l'algèbre* $\mathfrak{A}(M, \nabla, \overline{\nabla})$ *est commutative. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Tout élément de l'Algèbre* $\mathfrak{A}(M, \nabla, \overline{\nabla})$ *est un champ presque spécial.*

(ii) $\nabla = \overline{\nabla}$.

Definition 1.7. *Soit* $X \in S'(M)$. *Si* $X_p \neq 0$, $(\forall) p \in M$, *alors* X *s'appelle champ de directions presque spéciales. Les trajectoires des champs de directions presque spéciales sont appelées courbes presque spéciales.*

Proposition 1.8. *Soit* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *tel que* $X_p \neq 0$, $(\forall)\, p \in M$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est un champ de directions presque spéciales dans l'algèbre* $\mathfrak{A}(M, \nabla, \overline{\nabla})$.

(ii) *Pour tout* $Z \in \mathfrak{X}(M)$ *on a la relation*

$$A(Z, X) \otimes Z - Z \otimes A(Z, X) = 0. \tag{1.5}$$

Démonstration Evidémment.

Remarque 1.9. Soient A^i_{jk}, *resp.* X^i, *les composantes de* A, *resp* X, *dans un système de coordonnées locales. Alors la relation* (1.5) *s'écrit :*

$$(A^i_{jk} \delta^s_r - A^s_{rk} \delta^i_j) X^k = 0. \tag{1.5'}$$

[illegible] d'équations des c[illegible]

[illegible]

[illegible]

(viii) *Tout élément de l'algèbre* $\mathfrak{A}(M, \nabla(I), \nabla(II))$ *est un champ caractéristique.*

(ix) *Pour tout* $p \in M$, *il existe une courbe 2-nilpotente contenant le point* p *et tangente à une direction donnée.*

(x) *Pour tout* $p \in M$ *il existe une courbe caractéristique contenant le point* p *et tangente à une direction donnée.*

(xi) *Pour tout* $p \in M$ *il existe une courbe spéciale contenant le point* p *et tangente à une direction donnée.*

(xii) *Pour tout* $p \in M$ *il existe une courbe presque spéciale contenant le point* p *et tangente à une direction donnée.*

(xiii) M *est une sphère.*

Démonstration. On utilise [6] (Théorème D), [3] (Proposition 2.2), [4] (Proposition 2.1) et le Corollaire 1.6.

Remarque 2.2. En utilisant les formules (2.1) *on obtient des résultats analogues pour l'algèbre* $\mathfrak{A}(M, \nabla(II), \nabla(III))$ *et pour l'algèbre* $\mathfrak{A}(M, \nabla(III), \nabla(I))$

Remarque 2.3. Si $\nabla(I)_i b_{jk} = \alpha_i b_{jk}$, *où* α_i *sont les composantes d'une 1-forme sur la hypersurface* M, *alors les courbes presque spéciales de* M *sont indéterminés.*

§3. Les courbes presque spéciales des espaces de Riemann M conformément euclidiens. Soit M un espace de Riemann conformément euclidien, dont sa métrique s'écrit [9] :

$$ds^2 = e^{2u(x^1,\dots,x^n)}[(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2]. \tag{3.1}$$

Soient Γ^i_{jk} les composantes d'une connexion linéaire sur M, qui satisfait aux conditions :

$$g_{ij,k} = 0, \quad \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} = \delta^i_k u_j - \delta^i_j u_k, \tag{3.2}$$

où $g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}$, $u_j = \partial u/\partial x^j$ et $g_{ij,k}$ sont les dérivées covariantes du tenseur métrique g_{ij} par rapport à la connexion de composantes Γ^i_{jk}. De (3.2) on obtient :

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + \delta^i_k u_j - g_{jk} g^{ih} u_h, \tag{3.3}$$

où $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ sont les symboles de Christoffel de deuxième espèce de la métrique (3.1).

Les courbes presque spéciales de l'algèbre $\mathfrak{A}(M), \left\{ {i \atop jk} \right\}, \Gamma^i_{jk})$ s'appellent courbes presque spéciales de l'espace conformément euclidien M. Les équations différentielles des courbes presque spéciales de l'espace M sont :

$$\left(u_j \frac{dx^i}{dt} - u_i \frac{dx^j}{dt}\right)\delta^r_s = \left(u_r \frac{dx^s}{dt} - u_s \frac{dx^r}{dt}\right)\delta^i_j. \tag{3.4}$$

Proposition 3.1. *Les géodésiques d'un espace de Riemann conformément euclidien, qui sont des courbes presque spéciales, sont des droites.*

Démonstration. Les géodésiques de l'espace de Riemann de la métrique (3.1) ont les équations :

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2\frac{du}{dt}\frac{dx^i}{dt} = ce^{-2u} u_i, \tag{3.5}$$

où c est une constante. Alors, d'après (3.4) les équations (3.5) deviennent :

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \alpha\frac{dx^i}{dt} = 0, \tag{3.6}$$

où α est une fonction de t. Les équations (3.6) montrent que les géodésiques qui sont des courbes presque spéciales sont des droites (dans les variables $x^1,\dots,x^n$).

Proposition 3.2. *Si un espace de Riemann conformément euclidien admet comme courbes presque spéciales des droites qui forment un faisceau, alors sa métrique s'écrit :*

$$ds^2 = e^{2F((x^1)^2+\dots+(x^n)^2)}[(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2], \tag{3.7}$$

où F est une fonction arbitraire.

Démonstration. On suppose que les équations (3.4) admettent la solution $x^i = a^i t + b^i$, où $a^1,\dots,a^n$ sont des paramètres et $b^1,\dots,b^n$ sont des constantes. On peut considérer $b^1 = \dots = b^n = 0$, c'est-à-dire, que le faisceau de droites ait le centre à l'origine, ce qui est toujours possible par une translation. En écrivant l'équation du faisceau sous la forme $x^i = dx^i/dt\, t$, il résulte de (3.4) :

$$x^i u_j - x^j u_i = 0. \tag{3.8}$$

La solution générale des équations (3.8) est $u(x^1,\dots,x^n) = F((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)$ où F est une fonction arbitraire.

Remarque 3.3. Si dans la métrique (3.7) on prend

$$F((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2) = \ln \frac{1}{1 + \frac{K}{4}[(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2]},$$

où K est une constante, alors on obtient la métrique d'un espace de Riemann a courbure constante sous la forme de Riemann :

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2}{\left\{1 + \frac{K}{4}[(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2]\right\}^2}.$$

Il résulte que : *Tout espace de Riemann à courbure constante, rapporté à un système de coordonnés dans lequel la métrique a la forme de Riemann, a les courbes presque spéciales formées d'un faisceau de droites.*

Proposition 3.4. *Si un espace de Riemann conformément euclidien admet comme courbes presque spéciales des droites parallèles à la direction* $(a^1,\dots,a^n)$, *alors sa métrique s'écrit :*

$$ds^2 = e^{h(a_1x^1+\dots+a_nx^n)}[(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2], \tag{3.9}$$

h *étant une fonction arbitraire.*

Démonstration. On suppose que les équations (3.4) admettent la solution $x^i = a^i t + b^i$, où $a^1,\dots,a^n$ sont des constantes et $b^1,\dots,b^n$ sont des paramètres. Alors les équations (3.4) deviennent $a^i u_j - a^j u_i = 0$, et admettent la solution générale :

$$u(x^1,\ldots,x^n)=h(a_1x^1+\ldots+a_nx^n),$$

où h est une fonction arbitraire.

Remarque 3.5. 3.5.1. Evidemment, la condition (3.9) est nécessaire et suffisante pour que l'espace M conformément euclidien admette comme courbes presque spéciales des droites parallèles.

3.5.2. La condition nécessaire et suffisante afin qu'un espace de Riemann M conformément euclidien admette comme courbes presque spéciale: des droites parallèles est que sa métrique puisse être réduite, par une transformation linéaire, à la forme canonique:

$$ds^2=e^{2f(x^1)}\,[(dx^1)^2+\ldots+(dx^n)^2], \tag{3.9}$$

où f est une fonction arbitraire. La métrique (3.9') est l'une des formes données par Schapiro pour la métrique d'un espace de Riemann n—2 fois projectif ([9] p. 39).

3.5.3. Si dans (3.9') on a $f(x^1)=a_1x^1$, où a_1 est une constante non nulle, alors:

$$ds^2=e^{2a_1x^1}\,[(dx^1)^2+\ldots+(dx^n)^2],$$

est la métrique de Vagner des espaces à connexion constante [9]. Il résulte que: *Tout espace de Riemann M, conformément euclidien qui est un espace de Vagner a comme courbes presque spéciales des droites parallèles.*

3.5.4. Si dans (3.9') on prend $f(x^1)=(1/2)ln[1/[-K(x^1)^2]]$, où K est une constante négative, alors on obtient la forme canonique de Beltrami

$$ds^2=\frac{(dx^1)^2+\ldots+(dx^n)^2}{-K(x^1)^2}.$$

Il résulte que: *Tout espace de Riemann M à courbure constante négative, rapporté à un système de coordonnées dans lequel la métrique a la forme de Beltrami, a les courbes presque spéciales formées de droites parallèles.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Anastasiei M. et Nicolescu L. — *Directions caractéristiques associées à une variété de Banach.* An. şt. Univ. Iaşi, Tomul *XXV*, S 1 a, f. 2 (1979), 349—354.
2. Gheorghiev Gh., Miron R., Papuc D. — *Geometrie analitică şi diferenţială II* vol., EDP, Bucureşti, (1969).
3. Nicolescu L. — *Champ spéciaux dans l'algèbre de déformation* (à paraitre).
4. Nicolescu L. — *Des courbes nilpotents* (à paraitre).
5. Nicolescu L., Martin M. — *Sur l'algèbre assosciée à un champ tensoriel du type* (1,2) Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. Tomus 31 (1—2) (1978), 27—35.
6. Simon U. — *On the inner geometry of the second fundamental form.* Michigan J. Math. 19 (1972), 129—132.
7. Teodorscu I. — *Curbele caracteristice ale unei suprafeţe.* Şt. cerc. Mat. 22, 10 (1970), 1 513—1 520.
8. Vaisman I. — *Sur quelques formules du calcul de Ricci global.* Comm. Math. 41 (1966—67), 73—87.
9. Vrănceanu G. — *Lecţii de geometrie diferenţială II* vol. EDP Bucureşti (1962).

Faculté de Mathématiques
Université de Bucharest
R. S. Romania

Reçu le 17.IV.1980

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVII, s. I a, 1981, f. 1

DEFORMABLE SOLIDS WITH MICROSTRUCTURE HAVING A SYMMETRIC STRESS TENSOR

BY

C. I. BORŞ

In the last years, various models for bodies with microstructure were elaborated and some boundary problems were solved. Among the papers existing in the scientific literature, concerning this subject we quote [1], [4], [5], [6], [8], [10], [12], [15], [17]. Other results and references to this problem can be found in [9], [11], [14], [15], [16], [18].

Generally, till now, only models with microstructure having an asymmetric stress tensor were considered. But, the asymmetry of the stress tensor is not a consequence of the presence of microstructure in the body, it is rather a constitutive supposition. Then, we may imagine bodies with microstructure having a symmetric stress tensor and, because such a model seems to have remarkable properties, we intend to construct, in the following, a model for a deformable body with microstructure, which has a symmetric stress tensor for all processes of deformation.

First, a more general model will be built and afterwards a model with symmetric stress tensor will be derived.

We refer the motion of the body to fixed rectangular Cartesian axes.

Let V be the region occupied by the body and P an arbitrary part of V; $P\subset V$.

For a body with microstructure we take the usual definition. Then, for such a body there exists a vector field φ, called the microrotations field and a tensor $J_{ik}=J_{ki}$ ($J_{ik}\,\xi_i\,\xi_k>0$, $\xi_i\neq 0$), called the microinertia tensor, defined on V, such that, the angular momentum $\mathbf{K}(P)$ and the kinetic energy $E(P)$ of the mass contained in the region $P\subset V$ are given by

$$\mathbf{K}(P)=\int_P \rho(x)[\mathbf{r}\times\mathbf{v}+J_{ik}\,\dot{\varphi}_k\mathbf{e}_i]dX, \qquad E(P)=\frac{1}{2}\int_P \rho(x)[\mathbf{v}^2+J_{ik}\,\dot{\varphi}_i\,\dot{\varphi}_k]dX,$$

where $\rho(x)$ is the density of the medium, $\mathbf{r}$ is the position of the point $x\in P$ with respect to the coordinate system, $\mathbf{v}$ is the velocity of this point, $\varphi=\varphi_k\mathbf{e}_k$, $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_k\mathbf{e}_k=\frac{d\varphi}{dt}$. $\mathbf{e}_k$ are the orthogonal unit vectors parallel to the coordinate axes and dX is the volume element.