$$(IV_p) \qquad (S_\rho(p, \varepsilon))^\lambda = \overline{S}_\rho(p^\lambda, \varepsilon),\ p \in S,\ \varepsilon > 0,\ \lambda \in [0,1],$$

are satisfied, then the conclusion of Th. 2 holds.

Proof. In our hypotheses the relation (11) is verified. Indeed,

$$[S_\rho((S_\rho(p, \varepsilon))^\lambda, \eta)]^\mu = [S_\rho(\overline{S}_\rho(p^\lambda, \varepsilon), \eta)]^\mu \subset (\overline{S}_\rho(p^\lambda, \varepsilon + \eta))^\mu =$$
$$= [(S_\rho(p, \varepsilon + \eta))^\lambda]^\mu \subset (S_\rho(p, \varepsilon + \eta))^{T(\lambda, \mu)}.$$

Theorem 5. *Let (S, θ, T) and (S, ρ) be two spaces as in Th. 4. If the compatibility conditions (I), (II), (III), and*

$$(S_\rho(p, \varepsilon))^\lambda = \overline{S_\rho(p^\lambda, \varepsilon)},\ p \in S,\ \varepsilon > 0,\ \lambda \in [0,1],$$

are verified, then the conclusion of Th. 2 is true.

It remains to approach the question of determining some conditions under which the space (S, F, T), generated by one of Th. 2–5, induces the initial spaces (S, θ, T) and (S, ρ). This question is the object of a subsequent paper.

REFERENCES

1. Bourbaki, N. — *Eléments de mathématique*, Livre III, *Topologie générale*, Hermann Paris, 1961.
2. Egbert, R. J. — *Products and quotients of probabilistic metric spaces*, Pacific J. Math., 24 (1968), 437–455.
3. Frank, M. J. — *Probabilistic topological spaces*, J. Math. Anal. Appl., 34 (1971), 67–81.
4. Fritsche, R. — *Topologies for probabilistic metric spaces*, Fund. Math., 72 (1971), 7–16.
5. Istrăţescu, V. — *Introducere în teoria spaţiilor metrice probabiliste cu aplicaţii*, Editura tehnică, Bucureşti, 1974.
6. Kelly, J. C. — *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc., 13 (1963), 71–89.
7. Kuratowski, K. — *Topologie*, vol. I–II, Warszawa, 1958–1961.
8. Menger, K. — *Statistical metrics*, Proc. Nat. Acad. of Sci., U.S.A., 28 (1942), 535–537.
9. Schweizer, B. — *On the uniform continuity of the probabilistic distance*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 5 (1966) 357–360.
10. Schweizer, B., Sklar, A. — *Statistical metric spaces*, Pacific J. Math., 10 (1960), 314–334.
11. Wagner, F. — *Statistical topological spaces*. Notices Amer. Math. Soc., 12 (1965), Abst. 625–145, 588.

Received 5.XI.1980

Department of Mathematics
Polytechnical Institute
6600–Iaşi
R. S. România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVIII, s. I a, 1982, f. 1

LE FIBRÉ DES TENSEURS DE TYPE (1,1) SUR UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE

PAR

V. CRUCEANU

Parmi les fibrés associés d'une manière canonique à une variété différentiable, le fibré des tenseurs de type (1,1) présente un intérêt particulier. A côté des propriétés géométriques généralles des fibrés vectoriels [1,2] et tensoriels [5], le fibré des tenseurs de type (1,1) possède des propriétés spéciales, remarquables, déterminées par sa structure de fibré en algèbres associatives et par suite en algèbres de Lie, sur le champ R des réels.

Ce travail est le premier d'un cycle consacré à l'étude de ce fibré.

1. Introduction. Soient M une variété différentiable à n dimensions, de classe C^∞, E l'ensemble des tenseurs de type (1,1) sur M et $\pi : E \to M$ la projection canonique. En associant à chaque carte locale (U, φ, R^n) sur M, les triplets $(\pi^{-1}(U), \Phi, R^n \times R^{n^2})$ et $(U, \psi, gl(n, R))$, où $\Phi(t_p) = (x^i, y^i_j)$ avec $\varphi(p) = (x^i)$, $t_p = y^i_j \dfrac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ et $\psi(t_p) = (p, y = \|y^i_j\|)$, on obtient une structure de variété différentiable de classe C^∞ sur E et une structure de fibré vectoriel (E, π, M) de classe C^∞ avec la fibre type $gl(n, R)$. En considérant l'application $\tau_p : gl(n, R) \to E_p$ donnée par

$$(1) \qquad \tau_p(y) = y^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j,$$

on en obtient pour $p \in M$ et $y', y'' \in gl(n, R)$,

$$(2) \qquad \tau_p(y' \circ y'') = \tau_p(y') \circ \tau_p(y''), \qquad \tau_p([y', y'']) = [\tau_p(y'), \tau_p(y'')].$$

Par suite, (E, π, M) est un fibré en algèbres associatives et en algèbres de Lie, localement trivial. L'ensemble $\Gamma(E)$ des sections C^∞ sur E est une algèbre associative et une algèbre de Lie sur l'anneau $\mathcal{F}(M)$ des fonctions réelles C^∞ sur M. Le triplet (K, π_1, M), où K est l'ensemble des tenseurs de type (1,1) nonsinguliers sur M et $\pi_1 = \pi_{/K}$, est un fibré en groupes de Lie, localement trivial, avec la fibre type $GL(n, R)$. (E, π, M) est le fibré en algèbres de Lie correspondant et K est une sous-variété ouverte de E.

Un changement de coordonées locales sur E, induit par un changement sur M, est donné par

$$(3) \qquad x^{i'} = x^{i'}(x^i), \quad y^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} y^i_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

La matrice jacobienne de ce changement est

$$(4)\qquad J=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^h} & 0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^h\,\partial x^p}\,\dfrac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}+\dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^p}\,\dfrac{\partial^2 x^q}{\partial x^{i'}\,\partial x^{j'}}\,\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^h}\right)y^p_q & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^h}\,\dfrac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \end{bmatrix}$$

Par suite, les coordonnées d'un vecteur A et d'un covecteur α sur E, donnés par

$$(5)\qquad A=A^i\frac{\partial}{\partial x^i}+A^i_j\frac{\partial}{\partial y^i_j}\qquad \alpha=\alpha_i dx^i+\alpha^j_i dy^i_j,$$

se transforment respectivement suivant les lois

$$(6)\qquad \begin{aligned} &A^{i'}=A^i\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i},\\ &A^{i'}_{j'}=A^i_j\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}+A^i\left(\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i\,\partial x^p}\,\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\,\frac{\partial^2 x^q}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)y^p_q\\ &\alpha_i=\alpha_{i'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}+\alpha^{j'}_{i'}\left(\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i\,\partial x^p}\,\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\,\frac{\partial^2 x^q}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)y^p_q,\qquad \alpha^j_i=\alpha^{j'}_{i'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}. \end{aligned}$$

2. Relèvement vertical (r.v.). A chaque fonction $f\in\mathcal{F}(M)$ nous associons la fonction $f^V=f\circ\pi$ sur E, qui s'appelle le *relèvement vertical* de f. On obtient une application $V:\mathcal{F}(M)\to\mathcal{F}(E)$ qui est un monomorphisme d'algèbres sur R et par suite $\mathcal{F}(M)^V=V(\mathcal{F}(M))$ est une algèbre isomorphe à $\mathcal{F}(M)$. Plus généralement, soit $\mathcal{D}^r_s(M)$ le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseurs C^∞ de type (r,s) sur M et $\mathcal{D}^*(M)$ la sous-algèbre de l'algèbre tensorielle $\mathcal{D}(M)$, définie par $\mathcal{D}^*(M)=\sum_{r,s\geq 0}\mathcal{D}^r_{r+s}(M)$. En faisant correspondre à tout champ $T\in\mathcal{D}^r_{r+s}(M)$ le champ $T^V\in\mathcal{D}^r_s(E)$ donné localement par

$$(7)\qquad \begin{aligned} &(T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_r j_{r+1}\dots j_{r+s}}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_h}}\otimes dx^{j_1}\otimes\dots\otimes dx^{j_{r+s}})^V=\\ &=T^{j_1\dots j_r}_{j_1\dots j_r j_{r+1}\dots j_{r+s}}\circ\pi\frac{\partial}{\partial y^{i_1}_{j_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial y^{i_r}_{j_r}}\otimes dx^{j_{r+1}}\otimes\dots\otimes dx^{j_{r+s}}, \end{aligned}$$

et nommé le *relèvement vertical* de T, on obtient une application $V:\mathcal{D}^*(M)\to\mathcal{D}(E)$ qui, avec l'application $V:\mathcal{F}(M)\to\mathcal{F}(E)$, constitue un dimorphisme d'algèbres.

En particulier, si ω est une 1-forme sur M, son r.v. est la 1-forme ω^V donnée par $\omega^V=\omega_i\circ\pi dx^i$. Si S est un champ de tenseurs de type (1,1) sur M son r.v. est le champ de vecteurs S^V sur E défini par

$$(8)\qquad S^V=S^i_j\circ\pi\frac{\partial}{\partial y^i_j}.$$

On a en particulier,

$$(9)\qquad (dx^i)^V=dx^i,\quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\right)^V=\frac{\partial}{\partial y^i_j}.$$

Il est utile de considérer, pour $s=1,2,\dots$, l'application $i:\mathcal{D}^1_{1+s}(M)\to\mathcal{D}^0_s(E)$ définie par

$$(10)\qquad i\left(T^i_{j j_1\dots j_s}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\otimes dx^{j_1}\otimes\dots\otimes dx^{j_s}\right)=y^j_i T^i_{j j_1\dots j_s}\circ\pi dx^{j_1}\otimes\dots\otimes dx^{j_s}.$$

En particulier, pour $S\in\mathcal{D}^1_1(M)$, on obtient $iS\in\mathcal{F}(E)$ donné par

$$(11)\qquad iS(t_p)=S^i_j(p)y^j_i,\quad \forall t_p\in E.$$

On peut considérer aussi pour $S\in\mathcal{D}^1_1(M)$ l'application $i_S:\mathcal{D}^1_s(M)\to\mathcal{D}^0_s(E)$, donnée par

$$(12)\qquad i_S\left(T^i_{j j_1\dots j_s}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\otimes dx^{j_1}\otimes\dots\otimes dx^{j_s}\right)=S^j_i T^i_{j j_1\dots j_s}\circ\pi dx^{j_1}\otimes\dots\otimes dx^{j_s}.$$

Pour $T\in\mathcal{D}^1_1(M)$ on en obtient

$$(13)\qquad i_S T=\mathrm{Tr}(S\circ T)\circ\pi.$$

Un champ de vecteurs A sur E s'appelle *champ vertical* s'il appartient à la distribution verticale i.e. $\pi'(A)=0$. Par suite, un tel champ a l'expression locale

$$(14)\qquad A(t_p)=A^i_j(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i_j}.$$

Il est aisé de voir q'on a la propriété caractéristique :

Proposition 2.1. *Un champ de vecteurs A sur E est vertical si et seulement si*

$$(15)\qquad A(f^V)=0,\qquad \forall f\in\mathcal{F}(M).$$

En mettant pour chaque $\tau\in R$ et $t_p\in E$

$$(16)\qquad h(\tau,t_p)=\exp\tau\,.\,t_p$$

on obtient une action de classe C^∞, $h:R\times E\to E$, du groupe additif R sur E, nommé le groupe des homothéties de E. Ce groupe engendre un champ de vecteurs vertical C sur E nommé le *champ canonique* et donné par

$$(17)\qquad C(t_p)=y^i_j\frac{\partial}{\partial y^i_j}.$$

En remarquant qu'un champ de vecteurs C^∞ sur E est uniquement déterminé par ses valeurs sur les fonctions de la forme iS, avec $S\in\mathcal{D}^1_1(M)$, on obtient pour C la caractérisation suivante.

Proposition 2.2. *Le champ de vecteurs C sur E est le champ canonique si et seulement si*

(18) $$C(iS) = iS, \quad \forall S \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

Un autre exemple de champ de vecteurs verticaux est donné par les r.v. des champs de tenseurs de type (1,1) sur M.

On peut établir pour ces champs la caractérisation suivante :

Proposition 2.3. *Un champ de vecteurs A sur E est le r.v. d'un champ de tenseurs $T \in \mathcal{D}_1^1(M)$, $A = T^V$, si et seulement si*

(19) $$A(iS) = \mathrm{Tr}(S \circ T) \circ \pi, \quad \forall S \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

Une autre caractérisation pour les r.v. des champs de tenseurs (1,1) sur M est donnée par la

Proposition 2.4. *Un champ de vecteurs A sur E est le r.v. d'un champ de tenseurs (1,1) sur M si et seulement si*

(20) $$L_C A = -A,$$

où L_C est la dérivée de Lie par rapport au champ canonique C sur E.

Soient maintenant A et B deux champs de vecteurs verticaux sur E, donnés dans une carte locale par

(21) $$A = A_j^i(x, y)\frac{\partial}{\partial y_j^i}, \quad B = B_j^i(x, y)\frac{\partial}{\partial y_j^i}.$$

En posant

(22) $$A \circ B = A_h^i B_j^h \frac{\partial}{\partial y_j^i},$$

il résulte de (6) et (21) que $A \circ B$ est aussi un champ de vecteurs vertical sur E. Il est facile de voir que l'application $(A, B) \to A \circ B$ détermine sur l'ensemble $V\mathcal{D}^1(E)$, des champs de vecteurs verticaux, une structure d'algèbre associative sur $\mathcal{F}(E)$. Par suite en mettant

(23) $$\{A, B\} = A \circ B - B \circ A,$$

on obtient sur $V\mathcal{D}^1(M)$ une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{F}(E)$. Pour $S, T \in \mathcal{D}_1^1(M)$ on a

(24) $$(S \circ T)^V = S^V \circ T^V, \quad [S, T]^V = \{S^V, T^V\},$$

et par suite

Proposition 2.5. *Le relèvement vertical $V : (\mathcal{F}(M), \mathcal{D}_1^1(M)) \to (\mathcal{F}(E), V\mathcal{D}^1(E))$ est un dimorphisme d'algèbres associatives et d'algèbres de Lie.*

Vu que la distribution verticale sur E est intégrable, sur $V\mathcal{D}^1(E)$ on a une autre structure d'algèbre de Lie, induite par le crochet habituel pour deux champs de vecteurs sur E. Pour $f, g \in \mathcal{F}(M)$ et $A, B \in V\mathcal{D}^1(E)$ on a $f^V A + g^V B \in V\mathcal{D}^1(E)$ et $[f^V A, B] \in V\mathcal{D}^1(E)$, i.e. $V\mathcal{D}^1(E)$ est une algèbre Lie sur $\mathcal{F}(M)^V$. En posant, pour $S \in \mathcal{D}_1^1(M)$,

(25) $$\gamma(S) = \{C, S^V\},$$

on obtient une application $\gamma : \mathcal{D}_1^1(M) \to V\mathcal{D}^1(E)$ pour laquelle on a

(26) $$\gamma([S, T]) = [\gamma(S), \gamma(T)], \quad \forall S, T \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

Il en résulte

Proposition 2.6. *Le couple d'applications $(V, \gamma) : (\mathcal{F}(M), \mathcal{D}_1^1(M)) \to (\mathcal{F}(E)^V, V\mathcal{D}^1(E))$ est un dimorphisme d'algèbres de Lie.*

Remarquons qu'en mettant pour tout $A \in V\mathcal{D}^1(E)$, $\mathrm{Tr}A(t_p) = A_i^i(t_p)$ on obtient une fonction C^∞ sur E.

Une 1-forme sur E qui est égale à zero sur la distribution verticale s'appelle *1-forme verticale*. Le r.v. d'une 1-forme sur M est un exemple de 1-forme verticale. Pour une telle 1-forme on peut établir.

Proposition 2.7. *Une 1-forme α sur E est le r.v. d'une 1-forme sur M si et seulement si*

(27) $$L_C \alpha = 0.$$

3. **Foliation canonique**. De la loi 2) il résulte qu'en mettant

(28) $$f_k(t_p) = \mathrm{Tr}(t_p)^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

on obtient n fonctions de classe C^∞, $f_k : E \to R$. Par suite, les équations

(29) $$f_k = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

avec $c_k \in R$, définissent une foliation sur E nommée la *foliation canonique*. Les champs de tenseurs de type (1,1) sur M, qui appartiennent à cette foliation ont le spèctre constant et jouent un rôle important dans la géométrie différentielle de M [3, 4, 6]. Les 1-formes différentielles exactes

(30) $$\varphi_k = k^{-1} df_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

sont des 1-formes verticales sur E qui ont les expressions locales

(31) $$\varphi_k(t_p) = (y^{k-1})_i^j dy_j^i, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

φ_k sera appellée la *1-forme canonique* de degré k-1.

De (2) et (3) il résulte que les expressions

(32) $$v_k(t_p) = (y^{k-1})_j^i \frac{\partial}{\partial y_j^i}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

définissent n champs de vecteurs verticaux sur E. v_k sera appellé le ***champ de vecteurs canonique*** de degré $k-1$. On a $v_2 = C$.

Le nombre des vecteurs (32), linéairement indépendents dans un point t_p de E, est égal au degré du polynôme minimal de t_p. On obtient pour $v_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ la caractérisation suivante

(33) $$v_k(iS)(t_p) = \mathrm{Tr}(t_p^{k-1} \circ S(p)), \quad \forall S \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

On remarque aussi, pour $h, k = 1, 2, \ldots, n$, les relations

(34) $$< \varphi_h, v_k > (t_p) = \mathrm{Tr}(t_p)^{h+k-1}, \quad [v_h, v_k] = (k-h) v_{h+k-2}.$$

3. **Relèvement complet** (r.c.). En suivant A. Ledger et K. Yano [5], à toute dérivation D de l'algèbre tensorielle $\mathcal{D}(M)$ nous associons un champ de vecteurs D^c sur E défini par

(35) $$D^c(iS) = iD(S), \quad \forall S \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

et nommé le *relèvement complet* de la dérivation D. Si dans une carte locale, $D=(D^i, D^i_j)$, alors pour le r.c. D^c on obtient dans la carte correspondante

(36) $$D^c=(D^i, y^i_h D^h_j - D^i_h y^h_j).$$

De (35) il résulte

(37) $$(D_1+D_2)^c=D_1^c+D_2^c,\ (aD)^c=aD^c,\ [D_1, D_2]^c=[D_1^c, D_2^c]$$

et par suite on a

Proposition 3.1. *Le r.c. c : $\mathrm{Der}(\mathcal{D}(M))\to\mathcal{D}^1(E)$ est un morphisme d'algèbres de Lie sur R.*

De (31) et (36) on obtient

Proposition 3.2. *Le r.c. d'une dérivation de $\mathcal{D}(M)$ est un champ de vecteurs tangents à la foliation canonique.*

On a aussi de (26) et (25) :

Proposition 3.3. *Le r.c. d'une dérivation D de $\mathcal{D}(M)$ est un champ vertical si et seulement s'il est induit par un champ de tenseurs T de type $(1, 1)$ sur M. Dans ce cas on a $D^c=\gamma(T)$.*

Remarquons les relations

(38) $$D^c(f^V)=(D(f))^V,\ [D^c, C]=0,\ [D^c, T^V]=(DT)^V,\ [D^c, \gamma(T)]=\gamma(DT)$$

pour $f\in\mathcal{F}(M)$, $D\in\mathrm{Der}\,(\mathcal{D}(M))$ et $T\in\mathcal{D}^1_1(M)$.

On appelle relèvement complet d'un champ de vecteurs X sur M le r.c. de la dérivation de Lie définie par X,

(39) $$X^c=(L_X)^c.$$

Si dans une carte locale $X=(X^i)$, alors

(40) $$X^c=\left(X^i, \frac{\partial x^i}{\partial x^h} y^h_j - y^i_h \frac{\partial x^h}{\partial x^j}\right).$$

De (35) il résulte

Proposition 3.4. *Le champ de vecteurs X^c sur E est le r.c. du champ de vecteurs X sur M si et seulement si*

(41) $$X^c(iS)=i(L_X S),\quad \forall S\in\mathcal{D}^1_1(M).$$

On en obtient

(42) $$[X_1, X_2]^c=[X_1^c, X_2^c].$$

et par suite on a

Proposition 3.5. *Le r.c c : $\mathcal{D}^1(M)\to\mathcal{D}^1(E)$ est un monomorphisme d'algèbres de Lie sur R.*

4. **Relèvement horizontal (r.h.).** Une connexion linéaire ∇ sur M détermine une loi de dérivation sur le fibré vectoriel (E, π, M) notée aussi par ∇ et définie par

(43) $$\nabla_X S=\nabla_X\circ S-S\circ\nabla_X.$$

Pour la courbure R^* de cette loi de dérivation on a

(44) $$R^*_{XY}S=[R_{XY}, S]\quad \forall X, Y\in(\mathcal{D}^1(M), S\in\mathcal{D}^1_1(M).$$

Il en résulte que la loi de dérivation ∇ est sans courbure $(R^*=0)$, ou à parallélisme absolu des fibres de (E, π, M) si et seulement s'il existe une 2-forme α sur M, telle que

(45) $$R=\alpha\otimes I.$$

où I est le champ de tenseurs de Kronecker. Si la connexion ∇ est sans torsion $(T=0)$, alors la condition (45) équivaut, pour $n>2$ à $R=0$ et pour $n=2$ à l'annulation du tenseur de Ricci de ∇, [7].

La relation (45) caractérise aussi le fait que la connexion ∇ sur M est avec parallélisme absolu des directions [7].

On appelle *relèvement horizontal* pour un champ de vecteurs X sur M, relatif, à la connexion ∇, le r.c. de la dérivation ∇_X,

(46) $$X^H=(\nabla_X)^c.$$

De l'expression locale $\nabla_X=(X^i, \Gamma^i_{hj}X^h)$ et de (36), il résulte

(47) $$X^H=(X^i, -G^i_{hj}X^h),$$

où

(48) $$G^i_{hj}=\Gamma^i_{hl}y^l_j-y^i_l\Gamma^l_{hj}.$$

De (35) et (46) il résulte.

Proposition 4.1. *Le champ de vecteurs X^H sur E est le r.h. d'un champ de vecteurs X sur M si et seulement si*

(49) $$X^H(iS)=i(\nabla_X S),\quad \nabla S\in\mathcal{D}^1_1(M).$$

Compte tenu de (41) on en obtient

(50) $$X^H=X^c+\gamma({}^t\nabla X),$$

où ${}^t\nabla$ est la connexion transposée à ∇, i.e.

$${}^t\nabla_X Y=\nabla_Y X+[X, Y]\quad \forall X, Y\in\mathcal{D}^1(M).$$

Il en résulte

Proposition 4.2. *Le r.h. du champ de vecteurs X coïncide avec son r.c. si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathcal{F}(M)$ tel que*

(51) $${}^t\nabla_Y X=\lambda Y,\quad \forall Y\in\mathcal{D}^1(M).$$

i.e. X est concourant dans la connexion ${}^t\nabla$.

De (50) on a

(52) $$[X, Y]^H=[X^H, Y^H]+\gamma(R_{XY}),\quad \forall X, Y\in\mathcal{D}^1(M).$$

On en obtient

Proposition 4.3. *Le r.h. H : $\mathcal{D}^1(M)\to\mathcal{D}^1(E)$, associé à la connexion ∇ sur M, est un monomorphisme d'algèbres de Lie sur R si et seulement si la loi de dérivation induite par ∇ sur E est sans courbure.*

Remarques aussi la relation

(53) $$[X^c, Y^H) = [X^H, Y^H] + \gamma((L_X\nabla)(Y)), \ \forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M),$$

Une 1-forme α sur E s'appelle 1-forme horizontale si on a

(54) $$\alpha(X^H) = 0, \quad \forall X \in \mathcal{D}^1(M).$$

De (47) et l'expression locale $\alpha = (\alpha_i, \alpha_i^j)$ on obtient pour une 1-forme horizontale,

(55) $$\alpha_h = -G_{hj}^i \alpha_i^j,$$

et par suite

(56) $$\alpha = \alpha_i^j \, \delta y_j^i,$$

où

(57) $$\delta y_j^i = dy_j^i + G_{hj}^i dx^h.$$

A tout champ de tenseurs $T \in \mathcal{D}_1^1(M)$ on peut associer une 1-forme horizontale α_T sur E, définie par

(58) $$\alpha_T(S^V) = \mathrm{Tr}(S \circ T) \circ \pi, \quad \alpha_T(X^H) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{D}^1(M), \ S \in \mathcal{D}_1^1(M),$$

et qui a l'expression locale

(59) $$\alpha_T = T_i^j \, \delta y_j^i.$$

On a aussi la relation utile

(60) $$\alpha_T(\gamma(S)) = \mathrm{Tr}(C \circ [S, T)^V).$$

Pour la différentielle extérieure de α_T on en obtient

$$d\alpha_T(S^V, U^V) = 0, \quad 2d\alpha_T(S^V, X^H) = -\mathrm{Tr}(\nabla_X T \circ S)^V$$

$$2d\alpha_T(X^H, Y^H) = \mathrm{Tr}(C \circ [R_{XY}, T]^V)$$

et par suite

Proposition 4.4. *La 1-forme horizontale α_T, associée au champ $T \in \mathcal{D}_1^1(M)$ par les relations (58), est fermée si et seulement si le champ T est covariant constant.*

Dans ce cas α_T est même exacte et on a $\alpha_T = d(iT)$.

On appelle *relèvement horizontal* pour un champ de tenseurs $f \in \mathcal{D}_1^1(M)$, le champ de tenseurs $f^H \in \mathcal{D}_1^1(E)$ donné par

(61) $$f^H(S^V) = [f, S]^V, \quad f^H(X^H) = [f(X)]^H, \quad \forall X \in \mathcal{D}^1(M), \quad S \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

Compte tenu de (8) et (50), on en obtient

(62) $$f^H(X^c) = [(f(X)]^H - \{f^V, \gamma({}^t\nabla X)\}, \quad \nabla X \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

Pour le champ de Kronecker I sur M on trouve comme r.h. le champ $h \in \mathcal{D}^1(E)$ donné par

(62) $$h(S^V) = 0, \quad h(X^H) = X^H, \quad \forall X \in \mathcal{D}^1(M), \ S \in \mathcal{D}^1(M),$$

i.e. le projecteur horizontal associé à la connexion ∇. En mettant alors $F = I - 2h$ on obtient la structure presque-produit associée à la connexion ∇, pour laquelle on a

(63) $$F(S^V) = S^V, \ F(X^H) = -X^H.$$

Localement F a l'expression

(64) $$F = \begin{bmatrix} -\delta_h^i & 0 \\ 2G_{hj}^i & \delta_h^i \delta_j^k \end{bmatrix}.$$

Pour le tenseur de Nijenhuis de F, on a

(65) $$N_F(S^V, T^V) = 0, \ N_F(X^H, T^V) = 0, \quad N_F(X^H, Y^H) = -4\gamma(R_{XY}).$$

Par suite il en résulte, compte tenu de (45)

Proposition 4.5. *La structure presque produit sur E, définie par la connexion ∇ sur M, est intégrable si et seulement si la loi de dérivation induite par ∇ sur le fibré (E, π, M) est sans courbure.*

A la connexion ∇ sur M on peut associer aussi le champ de tenseurs $\theta \in \mathcal{D}_2^0(E)$ défini par

(66) $$\theta(S^V, T^V) = \mathrm{Tr}(S \circ T)^V, \ \theta(S^V, X^H) = \theta(X^H, S^V) = \theta(X^H, Y^H) = 0.$$

Ce champ est symmétrique et de rang constant n^2. Il a l'expression locale

(67) $$\theta = \begin{bmatrix} G_{hq}^p G_{ip}^q & G_{ih}^k \\ G_{hi}^j & \delta_h^j \delta_i^k \end{bmatrix}$$

qui peut s'ecrire encore, en mettant $\delta y = \|\delta y_j^i\|$

(68) $$\theta = \mathrm{Tr}\,(\delta y)^2.$$

De (66) il résulte que l'équation

(69) $$\theta(A) = 0$$

détermine une distribution sur E qui coïncide avec la distribution horizontale définie par la connexion ∇.

Si $T \in \mathcal{D}_1^1(M)$, alors pour la 1-forme horizontale $\alpha_T \in \mathcal{D}_1^0(E)$, définie par (58), on a aussi

(70) $$\alpha_T = \theta(T^V).$$

Les champs F et θ sont liés par la relation

(71) $$\theta(FA, B) = \theta(A, FB) = \theta(A, B), \quad \forall A, B \in \mathcal{D}^1(E).$$

Remarquons aussi les relations

(72) $$L_C F = 0, \quad L_V \theta = 2\theta$$

où C est le champ de vecteurs canoniques.

On appelle *relèvement horizontal* d'une connexion ∇ sur M, la connexion ∇^H sur E donnée par

(73) $$\nabla_{S^V}^H T^V = 0, \ \nabla_{S^V}^H X^H = 0, \ \nabla_{X^H}^H S^V = (\nabla_X S)^V, \ \nabla_{X^H}^H Y^H = (\nabla_X Y)^H.$$

Pour la courbure $\tilde{R}$ et la torsion $\tilde{T}$ de ∇^H on a

$$\tilde{R}_{S^V T^V}=0,\quad \tilde{R}_{S^V X^H}=0,\quad \tilde{R}_{X^H Y^H}=[R_{XY}]^H \tag{74}$$

$$\tilde{T}(S^V, T^V)=0\quad \tilde{T}(S^V, X^H)=0,\quad \tilde{T}(X^H, Y^H)=[T(X, Y)]^H-\gamma(R_{XY}).$$

Par suite, on en obtient

Proposition 4.6. *Le r.h.* ∇^H *de la connexion* ∇ *est sans courbure si et seulement si* ∇ *est sans courbure.*

Proposition 4.7. *Le r.h.* ∇^H *de la connexion* ∇ *est sans torsion si et seulement si* ∇ *est sans torsion et la loi de dérivation induite par* ∇ *sur* (E, π, M) *est sans courbure.*

Par suite, ∇^H est plate en même temps que ∇. Remarquons enfin les relations :

$$\nabla^H F=0,\quad \nabla^H \theta=0. \tag{75}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki, N. — *Variétés différentielles et analytiques.* Hermann, 1967.
2. Duc, T. V. — *Sur la géométrie différentielle des fibrés vectoriels.* Kodai Math. Sem. Rep. 26(1975) 349—408.
3. Jakubowicz, A. — *On existence of a linear connection determined by a covariantly constant tensor fields of type (1,1).* Tensor N. S. 31 (1977) fasc. 3, 265—270.
4. Kobayashi, E. T. — *A remark on the existence of a G-structure.* Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 1329—1331.
5. Ledger, A. J., Yano, . — *Almost complex structures on tensor boundles.* J. of Diff. Geometry 1(1967), 355—368.
6. Lehman, J., Lejeune, J. — *Integrabilité des G-structures définies par une 1-forme 0-deformable à valeurs dans le fibré tangent.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16 (1966), fasc. 2, 329—387.
7. Norden, P. A. — *Prostranstva affinoi svijaznosti.* Moscva, 1960, 176—177.

Reçule 19.XI.1980

Faculté de Mathematiques
Université de Iassy
R. S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVIII, s. I a, 1982, f. 1

OBJETS GÉOMÉTRIQUES INVARIANTS SUR LE FIBRÉ DES TENSEURS DE TYPE (1.1)

PAR

V. CRUCEANU

1. Introduction. Soient M une variété différentiable C^∞ et (E, π, M) le fibré des tenseurs de type (1,1) sur M. C'est un fibré localement trivial, en algèbres associatives et par suite en algèbres de Lie sur le champ R des réels. Notons par $\mathcal{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles C^∞ sur M et par $\mathcal{D}^r_s(M)$ le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseurs de type (r, s) et classe C^∞ sur M. Un champ de tenseurs $S\in\mathcal{D}^1_1(M)$ détermine une application $\lambda_S : E\to E$, définie par

$$\lambda_S(t_p)=S(p)\circ t_p,\qquad \forall p\in M,\ t_p\in E, \tag{1}$$

qui sera appellé *translation à gauche*. Il détermine aussi une application $\rho_S : E\to E$ donnée par :

$$\rho_S(t_p)=t_p\circ S(p)\qquad \forall p\in M,\ t_p\in E, \tag{2}$$

qui sera nommée *translation à droite*. Nous disons qu'un objet géométrique sur la variété E est *invariant à gauche* (resp. *à droite*) s'il est invariant par toute translation à gauche (resp. à droite). En continuant l'étude du fibré des tenseurs de type (1,1) sur une variété différentiable [2, 3], nous nous occupons dans ce travail de certains objets géométriques invariants sur ce fibré.

2. Champs de vecteurs invariants. Soient $S\in\mathcal{D}^1_1(M)$ un champ de tenseurs de type (1,1) sur M, $\lambda_S : E\to E$ la translation à gauche définie par S et $\lambda'_S : TE\to TE$ la différentielle de cette translation. Un champ de vecteurs A sur E sera invariant à gauche si et seulement si

$$\lambda'_S(A_{t_p})=A_{\lambda_S(t_p)},\qquad \forall S\in\mathcal{D}^1_1(M),\quad t_p\in E. \tag{3}$$

En considérant une carte locale (U, φ, R^n) sur M, avec $\varphi(p)=(x^i)$ et la carte correspondante $(\pi^{-1}(U), \Phi, R^n\times R^{n^2})$ sur E, avec $\Phi(t_p)=(x^i, y^i_j)$, où $t_p=y^i_j\dfrac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j$, on obtient pour l'application λ_S les équations locales

$$u^i=x^i,\qquad v^i_j=S^i_h(x)y^h_j. \tag{4}$$

Il en résulte pour la condition (3) l'expression locale

$$A^i(u, v)=A^i(x, y),\quad A^i_j(u, v)=A^h_j(x, y)\frac{\partial S^i_k(x)}{\partial x^h}y^k_j+S^i_h(x)\,A^h_j(x, y). \tag{5}$$