$$\tilde{R}_{S^V T^V}=0,\quad \tilde{R}_{S^V X^H}=0,\quad \tilde{R}_{X^H Y^H}=[R_{XY}]^H \tag{74}$$

$$\tilde{T}(S^V, T^V)=0\quad \tilde{T}(S^V, X^H)=0,\quad \tilde{T}(X^H, Y^H)=[T(X, Y)]^H-\gamma(R_{XY}).$$

Par suite, on en obtient

Proposition 4.6. *Le r.h. ∇^H de la connexion ∇ est sans courbure si et seulement si ∇ est sans courbure.*

Proposition 4.7. *Le r.h. ∇^H de la connexion ∇ est sans torsion si et seulement si ∇ est sans torsion et la loi de dérivation induite par ∇ sur (E, π, M) est sans courbure.*

Par suite, ∇^H est plate en même temps que ∇. Remarquons enfin les relations :

$$\nabla^H F=0,\quad \nabla^H \theta=0. \tag{75}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki, N. — *Variétés différentielles et analytiques.* Hermann, 1967.
2. Duc, T. V. — *Sur la géométrie différentielle des fibrés vectoriels.* Kodai Math. Sem. Rep. 26(1975) 349—408.
3. Jakubowicz, A. — *On existence of a linear connection determined by a covariantly constant tensor fields of type (1,1).* Tensor N. S. 31 (1977) fasc. 3, 265—270.
4. Kobayashi, E. T. — *A remark on the existence of a G-structure.* Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 1329—1331.
5. Ledger, A. J., Yano, . — *Almost complex structures on tensor boundles.* J. of Diff. Geometry 1(1967), 355—368.
6. Lehman, J., Lejeune, J. — *Integrabilité des G-structures définies par une 1-forme 0-deformable à valeurs dans le fibré tangent.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16 (1966), fasc. 2, 329—387.
7. Norden, P. A. — *Prostranstva affinoi svijaznosti.* Moscva, 1960, 176—177.

Reçule 19.XI.1980

Faculté de Mathematiques
Université de Iassy
R. S. Romania

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVIII, s. I a, 1982, f. 1

OBJETS GÉOMÉTRIQUES INVARIANTS SUR LE FIBRÉ DES TENSEURS DE TYPE (1,1)

PAR

V. CRUCEANU

1. Introduction. Soient M une variété différentiable C^∞ et (E, π, M) le fibré des tenseurs de type (1,1) sur M. C'est un fibré localement trivial, en algèbres associatives et par suite en algèbres de Lie sur le champ R des réels. Notons par $\mathcal{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles C^∞ sur M et par $\mathcal{D}^r_s(M)$ le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseurs de type (r, s) et classe C^∞ sur M. Un champ de tenseurs $S\in\mathcal{D}^1_1(M)$ détermine une application $\lambda_S : E\to E$, définie par

$$\lambda_S(t_p)=S(p)\circ t_p,\qquad \forall p\in M,\ t_p\in E, \tag{1}$$

qui sera appellé *translation à gauche*. Il détermine aussi une application $\rho_S : E\to E$ donnée par :

$$\rho_S(t_p)=t_p\circ S(p)\qquad \forall p\in M,\ t_p\in E, \tag{2}$$

qui sera nommée *translation à droite*. Nous disons qu'un objet géométrique sur la variété E est *invariant à gauche* (resp. *à droite*) s'il est invariant par toute translation à gauche (resp. à droite). En continuant l'étude du fibré des tenseurs de type (1,1) sur une variété différentiable [2, 3], nous nous occupons dans ce travail de certains objets géométriques invariants sur ce fibré.

2. Champs de vecteurs invariants. Soient $S\in\mathcal{D}^1_1(M)$ un champ de tenseurs de type (1,1) sur M, $\lambda_S : E\to E$ la translation à gauche définie par S et $\lambda'_S : TE\to TE$ la différentielle de cette translation. Un champ de vecteurs A sur E sera invariant à gauche si et seulement si

$$\lambda'_S(A_{t_p})=A_{\lambda_S(t_p)},\qquad \forall S\in\mathcal{D}^1_1(M),\quad t_p\in E. \tag{3}$$

En considérant une carte locale (U, φ, R^n) sur M, avec $\varphi(p)=(x^i)$ et la carte correspondante $(\pi^{-1}(U), \Phi, R^n\times R^{n^2})$ sur E, avec $\Phi(t_p)=(x^i, y^i_j)$, où $t_p=y^i_j\dfrac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j$, on obtient pour l'application λ_S les équations locales

$$u^i=x^i,\qquad v^i_j=S^i_h(x)y^h_j. \tag{4}$$

Il en résulte pour la condition (3) l'expression locale

$$A^i(u, v)=A^i(x, y),\quad A^i_j(u, v)=A^h_j(x, y)\frac{\partial S^i_k(x)}{\partial x^h}y^k_j+S^i_h(x)\,A^h_j(x, y). \tag{5}$$

La condition (3) doit être satisfaite en particulier, pour les translations infinitésimales à gauche i.e. définies par les champs $S \in \mathcal{D}_1^1(M)$ de la forme

(6) $$S = I + Tt,$$

avec $T \in \mathcal{D}_1^1(M)$ et $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset R$, par suite par les champs voisins au champ I de Kronecker. Les équations (4) deviennent pour une translation infinitésimale à gauche

(7) $$u^i = x^i, \quad v_j^i = y_j^i + T_h^i(x) y_j^h t.$$

Par suite

(8) $$\delta y_j^i = v_j^i - y_j^i = T_h^i(x) y_j^h t, \quad \frac{\partial S_j^i}{\partial x^h} = \frac{\partial T_j^i}{\partial x^h} t.$$

En nous limitant aux terms du premier ordre en t on en obtient

$$A^i(u, v) = A^i(x, y) + \frac{\partial A^i}{\partial y_k^h} T_l^h y_k^l t, \quad A_j^i(u, v) = A_j^i(x, y) + \frac{\partial A_j^i}{\partial y_k^h} T_l^h y_k^l t.$$

En remplaçant puis en (5), il résulte

(9) $$\frac{\partial A^i}{\partial y_k^h} T_l^h y_k^l = 0, \quad \frac{\partial A_j^i}{\partial y_k^h} T_l^h y_k^l = A^h \frac{\partial T_l^i}{\partial x^h} y_j^l + T_h^i A_j^h.$$

Compte tenu que T_l^i et $\partial T_l^i / \partial x^h$ sont arbitraires, on a

(10) $$A^i(x, y) = 0, \quad \frac{\partial A_j^i}{\partial y_k^h}(x, y)\, y_k^l = \delta_h^i A_j^l(x, y).$$

En prennant dans (10_1) $l = h$ et en faisant la somme, il résulte

(11) $$\frac{\partial A_j^i(x, y)}{\partial y_k^h} y_k^h = A_j^i(x, y).$$

Il en résulte que les fonctions de classe C^∞, $A_j^i(x, y)$ sont homogènes du premier degré en y_j^i, donc sur R^{n^2} et par suite elles sont linéaires :

(12) $$A_j^i(x, y) = A_{j\,k}^{i\,h}(x) y_h^k,$$

où $A_{j\,k}^{i\,h}(x)$ sont C^∞ en x^i. De (10_2) il résulte

(13) $$A_{j\,h}^{i\,k}(x)\, y_k^l = \delta_h^i A_{j\,m}^{l\,k} y_k^m.$$

On obtient

(14) $$A_{j\,k}^{i\,h}(x) = \delta_k^i a_j^h(x),$$

où $a_j^h(x)$ sont C^∞ en x^i. On a en définitive,

(15) $$A^i(x, y) = 0, \quad A_j^i(x, y) = y_h^i a_j^h(x).$$

On constate qu'au changement des coordonnées locales, les $a_j^i(x)$ se transforment comme les coordonnées d'un champ de tenseurs de type (1,1) sur M.

Par suite, si A est invariant à gauche, il existe un champ $a \in \mathcal{D}_1^1(M)$ tel que, dans toute carte locale, on a (15). Réciproquement, si $a \in \mathcal{D}_1^1(M)$ et à toute carte locale, nous associons les fonctions A^i, A_j^i données par (15), on constate que ces fonctions déterminent un champ de vecteurs A sur E qui satisfait aux équations (5) et par suite est invariant à gauche. A cette occasion, nous avons constaté qu'un champ de vecteurs sur E est invariant à gauche si et seulement si il est invariant aux translations infinitésimales à gauche. Les équations (15), nous suggèrent l'idée de considérer l'application $\sigma_1 : \mathcal{D}_1^1(M) \to V\mathcal{D}^1(E)$, où $V\mathcal{D}^1(E)$ est l'algèbre Lie des champs de vecteurs verticaux sur E, donnée localement par

(16) $$\sigma_1\left(a_j^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j\right)(t_p) = y_h^i a_j^h(x) \frac{\partial}{\partial y_j^i}.$$

On peut énoncer maintenant :

Proposition 2.1. *Un champ de vecteurs A sur E est invariant à gauche si et seulement si il existe un champ de tenseurs $a \in \mathcal{D}_1^1(M)$ tel que*

(17) $$A = \sigma_1(a),$$

où l'application σ_1 est donnée par (16).

Pour l'application σ_1 on a

(18) $$\sigma_1(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0, \quad \sigma_1(fa + gb) = f^V \sigma_1(a) + g^V \sigma_1(b),$$
$$\sigma_1([a, b]) = [\sigma_1(a), \sigma_1(b)], \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(M),\ a, b \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

Donc, le couple des applications $V : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)^V$ et $\sigma_1 : \mathcal{D}_1^1(M) \to V\mathcal{D}^1(E)$, où $\mathcal{F}(M)^V$ est l'anneau des relévements verticaux des fonctions réelles C^∞ sur M, est un dimorphisme injectif [1] d'algèbres de Lie et par suite $LE = \sigma_1(\mathcal{D}_1^1(M))$, i.e. l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur E est une sous-algèbre Lie de l'algèbre $V\mathcal{D}^1(E)$ sur l'anneau $\mathcal{F}(M)^V$. Il en résulte :

Proposition 2.2. *L'ensemble LE des champs de vecteurs invariants à gauche sur le fibré (E, π, M) est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre $V\mathcal{D}^1(E)$ sur l'anneau $\mathcal{F}(M)^V$, isomorphe avec l'algèbre Lie $\mathcal{D}_1^1(M)$ sur l'anneau $\mathcal{F}(M)$.*

Un champ de vecteurs $A \in \mathcal{D}_1^1(E)$ sera invariant à droite si et seulement si

(19) $$\rho_S'(A_{t_p}) = A_{\rho_S(t_p)}, \quad \forall S \in \mathcal{D}_1^1(M), \quad t_p \in E.$$

Un calcul analogue à celui éfectué pour les champs invariants à gauche montre qu'un champ $A \in \mathcal{D}_1^1(M)$ est invariant à droite si et seulement s'il existe un champ $a \in \mathcal{D}_1^1(M)$ tel qu'on a dans toute carte locale

(20) $$A^i(x, y) = 0, \quad A_j^i(x, y) = a_h^i(x) y_j^h.$$

A l'aide de l'application $\sigma_2 : \mathcal{D}_1^1(M) \to V\mathcal{D}_1^1(E)$, donnée localement par

(21) $$\sigma_2\left(a_j^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j\right)(t_p) = a_h^i(x)\, y_j^h \frac{\partial}{\partial y_j^i},$$

on peut énoncer :

Proposition 2.3. *Un champ de vecteurs A sur E est invariant à gauche si et seulement s'il existe un champ de tenseurs $a \in \mathcal{D}_1^1(M)$ tel que*

$$A = \sigma_2(a), \tag{22}$$

où l'application σ_2 est donnée par (21).

Il est aisé d'établir pour σ_2 les propriétés :

$$\sigma_2(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0, \quad \sigma_2(fa + gb) = f^v \sigma_2(a) + g^v \sigma_2(b), \tag{23}$$
$$\sigma_2([a, b]) = [\sigma_2(a), \sigma_2(b)], \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(M), \ a, b \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

Par suite, le couple d'applications $V: \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)^V$, $\sigma_2: \mathcal{D}_1^1(M) \to V\mathcal{D}^1(E)^0$ où $V\mathcal{D}^1(E)^0$ est l'algèbre opposée à $V\mathcal{D}^1(E)$, est un dimorphisme injectif d'algèbres de Lie. On a donc.

Proposition 2.4. *L'ensemble RE des champs de vecteurs invariants à droite sur le fibré (E, π, M) est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre $V\mathcal{D}^1(E)^0$ sur l'anneau $\mathcal{F}(M)^V$, isomorphe avec l'algèbre de Lie $\mathcal{D}_1^1(M)$ sur $\mathcal{F}(M)$.*

Comme nous avons vu, un champ de vecteurs sur E est invariant à gauche si et seulement s'il est invariant à toute translation infinitésimale à gauche. Une telle translation, donnée par (7), est une transformation infinitésimale associée au groupe uniparamétrique local engendré par le champ de vecteurs invariant à droite $\sigma_2(T)$. Mais, un champ de vecteurs A est invariant par le groupe uniparamétrique local engendré par le champ de vecteurs $\sigma_2(T)$ si et seulement si la dérivée de Lie de A par rapport à $\sigma_2(T)$ est égale à zero, [4]. La même remarque peut être faite pour les champs de vecteurs invariants à droite. On a donc.

Proposition 2.5. *Un champ de vecteurs sur E est invariant à gauche (resp. à droite) si et seulement si sa dérivée de Lie par rapport à tout champ de vecteurs invariant à droite (resp. à gauche) est égale à zero.*

Pour donner une autre caractérisation aux champs de vecteurs invariants sur E considérons l'application $i: \mathcal{D}_1^1(M) \to \mathcal{F}(E)$ définie par

$$i(S)(t_p) = S_j^i(p) y_i^j, \quad \forall S \in \mathcal{D}_1^1(M). \tag{24}$$

Comme tout champ de vecteurs sur E est uniquement déterminé par ses valeurs sur les fonctions de la forme iS avec $S \in \mathcal{D}_1^1(M)$, [2] on obtient de (15) et (20) :

Proposition 2.6. *Un champ de vecteurs A sur la variété E est invariant à gauche (resp. à droite) si et seulement s'il existe un champ de tenseurs $a \in \mathcal{D}_1^1(M)$, tel que*

$$A(iS) = i(a \circ S), \ (resp. \ A(iS) = i(S \circ a)), \quad \forall S \in \mathcal{D}_1^1(M). \tag{25}$$

Remarquons que l'application $\gamma: \mathcal{D}_1^1(M) \to V\mathcal{D}^1(E)$, définie localement [2] par

$$\gamma\left(S_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j\right)(t_p) = (y_h^i S_j^h - S_h^i y_j^h) \frac{\partial}{\partial y_j^i} \tag{26}$$

s'exprime à l'aide de σ_1 et σ_2 par la relation

$$\gamma = \sigma_1 - \sigma_2. \tag{27}$$

On peut voir que le couple $V: \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(E)^V$, $\gamma: \mathcal{D}_1^1(M) \to V\mathcal{D}^1(E)$ est un dimorphisme d'algèbres de Lie, qui a comme noyau le centre de l'algèbre $\mathcal{D}_1^1(M)$ et comme image la sous-algèbre de $V\mathcal{D}^1(E)$, formée par les champs de vecteurs qui peuvent s'exprimer comme la différence d'un champ invariant à gauche et un champ invariant à droite, correspondants au même champ de tenseurs (1,1) sur M. Pour la sous-algèbre $\gamma(\mathcal{D}_1^1(M))$ on a:

Proposition 2.7. *Un champ de vecteurs A sur E appartient à la sous-algèbre $\gamma(\mathcal{D}_1^1(M))$ si et seulement s'il existe $a \in \mathcal{D}_1^1(M))$ tel que*

$$A(iS) = i[a, S], \quad \forall S \in \mathcal{D}_1^1(M). \tag{28}$$

Pour les applications σ_1, σ_2 et γ on a aussi

Proposition 2.8. *Pour tous champs de tenseurs a et S de type (1.1), champs de vecteurs X et connexion linéaire ∇ sur M, les applications σ_1, σ_2 et γ satisfont aux relations :*

$$[S^v, \sigma_1(a)] = (S \circ a)^v, \ [S^v, \sigma_2(a)] = (a \circ S)^v, \ [S^v, \gamma(a)] = [S, a]^v,$$
$$[X^H, \sigma_1(a)] = \sigma_1(\nabla_X a), \ [X^H, \sigma_2(a)] = \sigma_2(\nabla_X a), \ [X^H, \gamma(a)] = \gamma(\nabla_X a). \tag{29}$$

3. 1-formes invariantes. Une 1-forme $\alpha \in \mathcal{D}_1(E)$ sera invariante à gauche si et seulement si

$$\lambda_S^*(\alpha_{\lambda_S(t_p)}) = \alpha_{t_p} \quad \forall t_p \in E, \ S \in \mathcal{D}_1^1(M). \tag{30}$$

Compte tenu de (4), on obtient pour cette condition l'expression locale

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_k^h} y_k^l T_l^h + \frac{\partial T_l^h}{\partial x^i} y_k^l \alpha_h^k = 0, \quad \frac{\partial \alpha_i^j}{\partial y_k^h} y_k^l + \alpha_h^j \delta_i^l = 0. \tag{31}$$

La première de ces relations nous donne $\alpha_i = \alpha_i(x)$, $y_k^l \alpha_h^k = 0$. De la deuxième, il résulte que α_i^j sont homogènes de degré -1 sur R^{n^2} et comme elles sont C^∞, on a $\alpha_i^j = 0$. Par suite, si α est une 1-forme invariante à gauche, alors dans toute carte locale on a

$$\alpha_i = \alpha_i(x), \quad \alpha_i^j = 0, \tag{32}$$

i.e. α est le relèvement vertical d'une 1-forme sur M. Réciproquement, si α est le relèvement vertical d'une 1-forme sur M, alors on a (32) et par suite (30). Il en résulte :

Proposition 3.1. *Un 1-forme $\alpha \in \mathcal{D}_1(E)$ est invariante à gauche si et seulement si elle est le relèvement vertical d'une 1-forme sur M.*

Comme une 1-forme est invariante à gauche si et seulement si elle est invariante par toute translation infinitésimale à gauche et une telle translation est une transformation infinitésimale correspondente au groupe uniparamétrique engendré par un champ de vecteurs invariant à droite on a :

Proposition 3.2. *Une 1-forme $\alpha \in \mathcal{D}_1(E)$ est invariante à gauche si et seulement si sa dérivée de Lie par rapport à tout champ de vecteurs invariant à droite est égale à zero.*

On obtient des résultats analogues pour les 1-formes invariantes à droite. Comme ces 1-formes sont aussi les relèvements verticaux des

1-formes sur M, il résulte que les 1-formes invariantes à gauche et à droite coïncident sur E.

4. Champs de tenseurs (1,1) invariants. Un champ de tenseurs $F \in \mathcal{D}_1^1(E)$ est invariant à gauche si et seulement si

(33) $$\lambda'_{S.t_p} \circ F_{t_p} = F_{\lambda_{S(t_p)}} \circ \lambda'_{S.t_p}, \quad \forall t_p \in E, \ S \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

Localement cette condition devient :

a) $$F_{h.}^{i.}(x, y) = F_{h.}^{i.}(u, v) + F_{k.}^{li.}(u, v) \frac{\partial S_m^k}{\partial x^h}(x) y_l^m,$$

b) $$F_{h.}^{.l}(x, y) \frac{\partial S_m^i}{\partial x^l}(x) y_j^m + F_{hj}^{.l}(x, y) S_l^i(x) = F_{hj}^{.i}(u, v) + F_{kj}^{li}(x, y) \frac{\partial S_m^k(x)}{\partial x^h} y_l^m,$$

c) $$F_{h.}^{ki.}(x, y) = F_{l.}^{kj.}(u, v) S_h^l(x),$$

d) $$F_{h.}^{kl}(x, y) \frac{\partial S_m^i}{\partial x^l} y_j^m + F_{hj}^{kl}(x, y) S_l^i(x) = F_{lj}^{ki}(u, v) S_h^l(x).$$

Pour une translation infinitésimale à gauche (7), en nous limitant aux terms d'ordre $\leqslant 1$, on obtient

a') $$\frac{\partial F_{p.}^{.i}}{\partial y_k^h} T_l^h y_k^l + F_{k.}^{li} \frac{\partial T_m^k}{\partial x^p} y_l^m = 0,$$

b') $$F_{p.}^{.h} \frac{\partial T_m^i}{\partial x^h} y_j^m + F_{pj}^{.h} T_h^i = \frac{\partial F_{pj}^{.i}}{\partial y_k^h} T_l^h y_k^l + F_{kj}^{li} \frac{\partial T_m^k}{\partial x^p} y_l^m,$$

c') $$F_{k.}^{qi} T_p^h + \frac{\partial F_{p.}^{qi}}{\partial y_k^h} T_l^h y_k^l = 0,$$

d') $$F_{h.}^{qp} \frac{\partial T_m^i}{\partial x^h} y_i^m + F_{pj}^{qh} T_h^i = \frac{\partial F_{pj}^{qi}}{\partial y_k^h} T_l^h y_k^l + F_{kj}^{qi} T_p^k.$$

Compte tenu que T_j^i et $\frac{\partial T_j^i}{\partial x^k}$ sont arbitraires, il en résulte :

a'') $$\frac{\partial F_{p.}^{.i}}{\partial y_k^h} y_k^l = 0, \quad F_{k.}^{l.i} y_l^m = 0,$$

b'') $$F_{p.}^{.h} y_j^m \delta_k^i = F_{kj}^{li} \delta_p^h y_l^m, \quad F_{pj}^{.h} \delta_q^i = \frac{\partial F_{pj}^{.i}}{\partial y_k^q} y_k^h,$$

c'') $$\frac{\partial F_{p.}^{qi}}{\partial y_k^h} y_k^l + F_{k.}^{qi} \delta_p^l = 0,$$

d'') $$F_{p.}^{qh} y_j^m = 0, \quad F_{pj}^{ql} \delta_h^i = \frac{\partial F_{pj}^{qi}}{\partial y_k^h} y_k^l + F_{hj}^{qi} \delta_p^l.$$

De b$_2''$), c''), d$_2''$) et puis de b$_1''$) on a respectivement :

(34) $$F_{pj}^{.i} = y_h^i f_{pj}^h(x), \quad F_{p}^{qi} = 0, \quad F_{pj}^{qi} = \alpha(x) \delta_j^q \delta_p^i, \quad F_{p.}^{.i} = \alpha(x) \delta_p^i,$$

où α, $f_{pj}^h \in \mathcal{F}(M)$. Par suite, si $F \in \mathcal{D}_1^1(E)$ est invariant à gauche, alors dans toute carte locale on a

(35) $$F = \begin{bmatrix} \alpha \delta_h^i & 0 \\ y_l^i f_{hj}^l & \alpha \delta_h^i \delta_j^k \end{bmatrix},$$

où $\alpha \in \mathcal{F}(M)$ et f_{hj}^i sont les coordonnées d'un champ $f \in \mathcal{D}_2^1(M)$.

Réciproquement, si pour un champ de tenseurs $F \in \mathcal{D}_1^1(E)$, il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{F}(M)$ et un champ de tenseurs $f \in \mathcal{D}_2^1(M)$ tels que dans toute carte locale on a (35), alors les équations a), b), c), d) sont vérifiées et par suite F est invariant à gauche.

En considérant l'application $\tau_1 : \mathcal{D}_2^1(M) \to V\mathcal{D}_1^1(E)$ donnée par

(36) $$\tau_1\left(f_{hj}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^h \otimes dx^j\right)(t_p) = \left(y_l^i f_{hj}^l \frac{\partial}{\partial y_j^i} \otimes dx^h\right),$$

où $V\mathcal{D}_1^1(E)$ est l'ensemble des champs de tenseurs (1,1) verticaux sur E i.e. qui considérés comme endomorphismes de $\mathcal{D}^1(E)$, conservent les champs de vecteurs verticaux, on a :

Proposition 4.1. *Un champ de tenseurs $F \in \mathcal{D}_1^1(E)$ est invariant à gauche si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathcal{F}(M)$ et $f \in \mathcal{D}_2^1(M)$ tels que*

(37) $$F = \alpha^V I + \tau_1(f),$$

où l'application τ_1 est donnée par (36).

En considérant l'application φ: $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{D}_2^1(M) \to V\mathcal{D}_1^1(E)$ donnée par

(38) $$\varphi(\alpha, s) = \alpha^V I + \tau_1(s),$$

on a

$$\varphi(\alpha, s) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \ s = 0$$

$$\varphi(f(\alpha, s) + g(\beta, t)) = f^V \varphi(\alpha, s) + g^V \varphi(\beta, t), \quad \forall \alpha, \beta, f, g \in F(M), \ s, t \in \mathcal{D}_2^1(M).$$

Par suite, il en résulte :

Proposition 4.2. *L'ensemble $L\mathcal{D}_1^1(E)$ des champs de tenseurs de type (1,1) sur E, invariants à gauche, est un sous-module du module $V\mathcal{D}_1^1(E)$ sur $\mathcal{F}(M)^V$, isomorphe avec le module $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{D}_2^1(M)$ sur $\mathcal{F}(M)$.*

Un champ de tenseurs $F \in \mathcal{D}_1^1(E)$ sera invariant à droite si et seulement si

(39) $$\rho'_{S.t_p} \circ F_{t_p} = F_{\rho_{S(t_p)}} \circ \rho'_{S.t_p}, \quad \forall t_p \in E, \ S \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

On constate qu'un champ $F \in \mathcal{D}_1^1(E)$ est invariant à droite si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathcal{F}(M)$ et $f \in \mathcal{D}_2^1(M)$ tels que

(40) $$F = \begin{vmatrix} \alpha \delta_k^i & 0 \\ f_{hl}^i y_j^l & \alpha \delta_h^i \delta_j^k \end{vmatrix},$$

En considérant l'application $\tau_2 : \mathcal{D}_2^1(M) \to V\mathcal{D}_1^1(E)$ donnée par

$$\tau_2\left(f_{hj}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^h \otimes dx^j\right)(t_p) = \left(f_{hj}^i y_j^l \frac{\partial}{\partial y_j^i} \otimes dx^h\right), \tag{41}$$

on a

Proposition 4.3. *Un champ de tenseurs $F \in \mathcal{D}_1^1(E)$ est invariant à droite si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathcal{F}(M)$ et $f \in \mathcal{D}_2^1(M)$ tels que*

$$F = \alpha^V I + \tau_2(f), \tag{42}$$

où τ_2 est donnée par (41).

On obtient aussi

Proposition 4.4. *L'ensemble $R\mathcal{D}_1^1(E)$ des champs de tenseurs de type (1,1) sur E, invariants à droite, est un sous-module du module $V\mathcal{D}_1^1(E)$ sur $\mathcal{F}(M)^V$, isomorphe avec le module $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{D}_2^1(M)$ sur $\mathcal{F}(M)$.*

Un raisonnement analogue à celui fait pour les champs de vecteurs invariants nous donne :

Proposition 4.5. *Un champ de tenseurs de type (1,1) sur E est invariant à gauche (resp. à droite) si et seulement si sa dérivée de Lie par rapport à tout champ de vecteurs invariant à droite (resp. à gauche) est égale à zero.*

Enfin, comme un champ de tenseurs (1,1) sur E est uniquement déterminé par ses valeurs sur les champ de vecteurs de la forme S^V avec $S \in \mathcal{D}_1^1(M)$ et X^H avec $X \in \mathcal{D}^1(M)$ et X^H le relèvement horizontal, calculé par rapport à une connexion quelconque sur M [2], on peut donner pour les champs de tenseurs de type (1,1) invariants sur E, la caractérisation suivante :

Proposition 4.6. *Un champ de tenseurs de type (1,1) sur E est invariant à gauche (resp. à droite) si et seulement s'il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{F}(M)$, un champ de tenseurs $f \in \mathcal{D}_2^1(M)$ et une connexion linéaire ∇ sur M tels que pour tous $S \in \mathcal{D}_1^1(M)$ et $X \in \mathcal{D}^1(M)$ on a*

$$F(S^V) = \alpha^V S^V, \quad F(X^H) = \alpha^V X^H + \tau_1(i_X f), \tag{43}$$

$$(\text{resp. } F(S^V) = \alpha^V S^V, \quad F(X^H) = \alpha^V X^H + \tau_2(i_X f)),$$

où τ_1, τ_2 sont les applications définies respectivement par (36) et (41) et $i_X f$ le champ de tenseurs de type (1,1) sur M, donné par

$$(i_X f)(Y) = f(X, Y).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki, N. — *Eléments de mathématique. Algèbre.* Chap. 2, Hermann, Paris, 1962, p. 51–52.
2. Cruceanu, V. — *Le fibré des tenseurs de type (1,1) sur une variété différentiable.* An. şt. Univ. Iaşi, T. XXVIII (1982), s. I a, f. 1, p. 45–54.
3. Cruceanu, V. — *Structures remarquables sur le fibré des tenseurs de type (1,1).* Matematica (Cluj), 23 (1981).
4. Kobayashi, S. and Nomizu, K. — *Foundations of differential geometry.* Vol. I, Interscience, 1963.

Received 5.I.1981

Faculté de Mathématiques
Université de Iaşi
6600 – Iaşi
R. S. România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXVIII, s. I a, 1982, f. 1

TANGENT AND FRAME BUNDLES OF ORDER TWO

BY

C. T. J. DODSON and M. S. RADIVOIOVICI

I. The Tangent Bundle of Order two. Given a smooth n-manifold M with atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$, we construct a bundle $T^{(2)}M$ from equivalence classes of curves in M which agree up to their acceleration. We adopt a coordinate-free approach to achieve essentially the same space that was constructed locally by Yano and Ishihara [3] (cf. also [2]).

Definition. $(\forall x \in M)$ $C_x = \{$*smooth* $f: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \mid f(0) = x$, *some* $\varepsilon > 0\}$ *and* $(\forall f, h \in C_x)$ $f \sim_x h \Leftrightarrow \dot{f}(0) = \dot{h}(0)$,

$$f \approx_x h \Leftrightarrow \dot{f}(0) = \dot{h}(0) \text{ and } \ddot{f}(0) = \ddot{h}(0)$$

where $\dot{f}$ and $\ddot{f}$ are the tangent velocity and acceleration vector fields along the curve f :

$$\dot{f} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM : t \to D_t f(1)$$

$$\ddot{f} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TTM : t \to D_t \dot{f}(1).$$

Remark. For each $x \in M$, $\sim_x$ and $\approx_x$ are equivalence relations. Moreover, $C_x/\sim_x$ is set-theoretically equivalent to T_xM. It can readily be given the same vector space structure and so we have $\bigcup_{x \in M} C_x/\sim_x$ a natural vector bundle with fibre $\mathbf{R}^n$ over M. Precisely, T is a functor from Man' to Vbun (cf. [1]).

We can begin in a similar way to use $\approx_x$:

$$T_x^{(2)}M = C_x/\approx_x, \quad T^{(2)}M = \bigcup_{x \in M} T_x^{(2)}M.$$

Then we have a fibre bundle $(T^{(2)}M, \Pi_T^{(2)}, M)$ with

$$\Pi_T^{(2)} : T^{(2)}M \to M : [f]_{\approx_x} \to x$$

continuous in the coinduced topology. In fact a $3n$-manifold structure is readily coinduced through the atlases :

$$(TU, D\varphi_\alpha)_{\alpha \in A} \text{ for } TM,$$

$$(TTU_\alpha, DD\varphi_\alpha)_{\alpha \in A} \text{ for } TTM.$$

It is clearly possible to coinduce a vector space structure on $T_x^{(2)}M$ by requiring that $DD\varphi_\alpha|_x$ yields an isomorphism. But in general that structure will not linearly agree with a structure similarly coinduced via