of [2] follows. As to Theorem 3.3 of [2] we notice that $\mathcal{P}$ is Hausdorff, since F is Hausdorff. Hence $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A$ is $\mathcal{P}$-closed $\Rightarrow A$ is $\mathcal{C}$-closed (since $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$) $\Rightarrow (A, \mathcal{C}_A)$ is T_4, since $(Z, \mathcal{C})$ is $T_4 \Rightarrow (A, \tau_A)$ is T_4, by Theorem 3. This proves Theorem 3.3 of [2].

Now if F, is compact then F^E is compact and hence $(Z, \mathcal{P})$ is compact (see [1]). That is, $Z \in \mathcal{A}$ and hence $\tau = \mathcal{C}$ on Z by Theorem 3 and this establishes Theorem 3.4 of [2]. Here we remark that the condition „F is compact" of Theorem 3. 4 [2] could have been replaced by „$\overline{Z(x)}$ is compact in F, for all $x \in E$".

Again, the hypotheses of Theorem 3.5 of [2] imply that $\mathcal{C}$ is a topology of joint continuity and those of Theorem 3.6 of [2] are sufficient for $\mathcal{C}$ to be jointly continuous on compacta (see [1]). Now since $\mathcal{C} \subset \tau$ both the theorems trivially follow. Now, we know that if Z is an evenly continuous family of functions on a topological space E to a topological space F then both the topologies $\mathcal{P}$ and $\mathcal{C}$ on Z are jointly continuous and also if Z is an equicontinuous family then $(Z, \mathcal{P})$ is jointly continuous [1]. Now since $\mathcal{C}$, $\mathcal{P} \subset \tau$ we obtain Theorems 3.7 and 3.8 of [2] at once.

In § 4. of [2] topology of uniform convergence is discussed. Here a family Z of functions on a topological space E to a uniform space $(F, \mathcal{V})$ has been taken and $\tau(\mathcal{U})$ has been taken to denote the topology of uniform convergence where $\mathcal{U}$ is the uniformity of uniform convergence. τ has been used to stand for the mixed topology on Z, constructed from $\tau(\mathcal{U})$ and $\mathcal{P}$ for the bitopological space $(Z, \tau(\mathcal{U}), \mathcal{P})$ exactly in the same way as done in Definition 1. Now, proceeding similarly as in Theorems 2 and 3 we have $\tau(\mathcal{U}) \subset \tau$ and the topologies $\tau(\mathcal{U})$ and τ coincide on every $\mathcal{P}$-compact subset.

Now we know that if each member of Z is continuous then $\tau(\mathcal{U})$ is jointly, continuous (see [1]). Since $\tau(\mathcal{U}) \subset \tau$ we obtain Theorem 4.1 of [2]. Finally, from the hypotheses of Theorem 4.2 of [2] we immediately have $\tau(\mathcal{U})/\mathcal{R}) = \mathcal{C}$ (see [1]). Since the topologies τ and $\tau(\mathcal{U}/\mathcal{R})$ are identical on every $\mathcal{P}$-compact subset A of Z, we have at once $\tau_A = \mathcal{C}_A$ which is Theorem 4.2 of [2]. We further note here that from the conditions assumed in Theorem 4.2 of [2] it is evident that τ is jointly continuous on compacta if E is Hausdorff or regular. In fact, here $\tau(\mathcal{U}/\mathcal{R}) = \mathcal{C}$ and the members of Z are continuous on compact subsets, of E. Hence $\mathcal{C}$ is jointly continuous on compacta [1]. Since $\mathcal{C} = \tau(\mathcal{U}/\mathcal{R}) \subset \tau$, τ is also jointly continuous on compacta.

ACKNOWLEDGEMENT

I must thank Dr. S. Ganguly of Calcutta University for his kind help in the preparation of this paper.

REFERENCES

1. Kelley J.L. — *General Topology*, New York (1955)
2. Sinha D. — *Mixed topology for a function space*, An. st. Univ. Iaşi, Tomul XXVII, s. I a, 1981, f. 1, p. 43—47

Received 16. II. 1983

Department of Mathematics,
Charu Chandra College, 22, Lake Road,
Calcutta — 700 029
India

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXX, s. I a, 1984, f. — 1

SYSTEMES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ANALYTIQUES DANS DES ESPACES DE BANACH

PAR

ION ONCIULESCU

Dans [4, 5] A. Haimovici a étudié l'existence d'une intégrale analytique pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles ayant la forme

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x} &= f_i\left(x, y, z, u_p, v_q, \frac{\partial u_p}{\partial y}, \frac{\partial u_p}{\partial z}, \frac{\partial v_q}{\partial x}, \frac{\partial v_q}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial v_j}{\partial y} &= g_j\left(x, y, z, u_p, v_q, \frac{\partial u_p}{\partial y}, \frac{\partial u_p}{\partial z}, \frac{\partial v_q}{\partial x}, \frac{\partial v_q}{\partial z}\right), \\ u_i(0, y, z) &= 0, \ v_j(x, 0, z) = 0, \ i, p = \overline{1, h}, \ j, q = \overline{1, k}, \end{aligned}$$

où les fonctions f_i et g_j sont analytiques de tous leurs arguments dans un voisinage de $(0, \ldots, 0) \in K^{3(h+k+1)}$.

En partant des résultats obtenus dans ces travaux, nous étudions un système qui généralise dans des espaces de Banach, le système (a). A ce but on utilise la dérivée de Fréchet et la notion de fonction analytique introduite à l'aide des polynômes homogènes dont nous rappelons la définition brièvement dans 1.

1. **Fonctions analytiques dans des espaces de Banach. Définition 1.** *Soit $X_1, \ldots, X_k$ des espaces linéaires normés et Y un espace de Banach sur le même corps Γ (R ou C). Une fonction $P_{i_1 \ldots i_k}(x_1, \ldots, x_k)$ définie sur $X_1 \times \ldots \times X_k$ à valeurs dans Y, est par définition un polynôme homogène de degré i_1 en $x_1, \ldots, i_k$, en x_k s'il existe une fonction $i_1 + \ldots + i_k$-linéaire, $h(x_1^1, \ldots, x_{i_1}^1, \ldots, \ldots, x_1^k, \ldots, x_{i_k}^k)$, définie sur $X_1^{i_1} \times \ldots \times X_k^{i_k}$ et à valeurs dans Y, symétrique dans les variables $(x_1^1, \ldots, x_{i_1}^1)$; ... ; $(x_1^k, \ldots, x_{i_k}^k)$ respectivement de manière que*

$$P_{i_1 \ldots i_k}(x_1, \ldots, x_k) = h(x_1, \ldots, x_1 ; \ldots ; x_k, \ldots, x_k).$$

La fonction h est appelée la „forme polaire" du polynôme.

Nous allons noter par „0" les zéros des espaces qui vont apparaître par la suite.

Proposition. *La forme polaire d'un polynôme homogène $P_{i_1 \ldots i_k}$ est unique. Si le polynôme $P_{i_1 \ldots i_k}$ est continu en $0 \in X_1 \times \ldots \times X_k$, alors la forme polaire h est continue en $0 \in X_1^{i_1} \times \ldots \times X_k^{i_k}$* [1, 6].

On notera par la même lettre le polynôme homogène et sa forme polaire. Dans les évaluations que nous allons faire sur les polynômes homogènes on utilisera la norme de leurs formes polaires.

Définition 2. *Soit* $B_i \subset X_i$ $(i=\overline{1,k})$, $B_i=\{x,\ x\in X_i,\ \|x\|<r_i\}$. *Une fonction* $f(x_1,\dots,x_k)$, *définie sur* $B_1\times\dots\times B_k$ *et à valeurs dans* Y *est par définition analytique sur* B *si l'on a*

$f(x_1,\dots,x_k)=\sum_{i_1,\dots,i_k=\overline{0,\infty}} P_{i_1\dots i_k}(x_1,\dots,x_k)$ *sur* B, *où* $P_{i_1\dots i_k}$ *sont des polynômes homogènes continus définis sur* $X_1\times\dots\times X_k$ *et* $\sum_{i_1,\dots,i_k=\overline{0,\infty}} \|P_{i_1\dots i_k}\|\,\lambda_1^{i_1}\dots\lambda_k^{i_k}<\infty$ *pour* $\lambda_i\in\Gamma$, $|\lambda_i|<r_i$, $i=\overline{1,k}$.

Remarques : a) Si $f(x_1,\dots,x_k)$ est analytique sur B, alors alors f peut être dérivé au sens de Fréchet d'un nombre arbitraire de fois par rapport à chaque variable et on a :

$$P_{i_1\dots i_k}(x_1,\dots,x_k)=\frac{1}{i_1!\dots i_k!}D^{i_1+\dots+i_k}_{x_1,\dots,x_k}f(0,x_1,\dots,x_1;\ x_k\dots x_k).$$

b) Soient $z_i(x_1,\dots,x_k)$ $(i=\overline{1,p})$, des fonctions analytiques, définies sur $B=B_1\times\dots\times B_k(B_j=\{x,\ x\in X_j,\ \|x_j\|<r_j\})$ et à valeurs dans les espaces de Banach $Z_1,\dots,Z_p$, respectivement, et $z_i(0)=0$ $(i=\overline{1,p})$.

Si la fonction $f(z_1,\dots,z_p)$ est définie et analytique sur un voisinage de l'origine de $Z_1\times\dots\times Z_p$, à valeurs dans Y, alors il existe la fonction $g(x_1,\dots,x_k)=f(\dots,z_i(x_1,\dots,x_k),\dots)$ sur un voisinage de l'origine de $X_1\times\dots\times X_k$ et g est une fonction analytique au sens de la définition 2.

2. **Un Système d'Équations aux Dérivées Partielles qui Généralise les Systèmes de A. Haimovici dans des Espaces de Banach.** Soit X, Y, Z, des espaces normés et U, V des espaces de Banach sur le corps $\Gamma(R$ ou $C)$. On considère les fonctions $f(x,y,z,u,v,\dots,u^1_{i_1},\dots,u^2_{i_2},\dots,v^1_{j_1},\dots,v^2_{j_2},\dots)$ et $g(x,y,z,u,v,\dots,u^1_{i_1},\dots,u^2_{i_2},\dots,v^1_{j_1},\dots,v^2_{j_2},\dots)$ définies sur $B\subset X\times Y\times Z\times U\times V\times U^{p_1}\times U^{p_2}\times V^{q_1}\times V^{q_2}$, $B=\{(x,y,\dots,v^2_{q_2}),\ \|x\|,\dots,\|v^2_{q_2}\|<r\}$ et à valeurs dans $L(X,U)$ et $L(Y,V)$ respectivement. Alors le système aux inconnues $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x)=f\Big(x,y,z,u,v,\dots,\frac{\partial u}{\partial y}(y_{0i_1}),\dots,\frac{\partial u}{\partial z}(z^1_{0i_2}),\dots,\frac{\partial v}{\partial x}(x_{0j_1}),\dots,\frac{\partial v}{\partial z}(z^2_{0j_2}),\dots\Big)(\Delta x)\\ &\frac{\partial v}{\partial y}(\Delta y)=g\Big(x,y,z,u,v,\dots,\frac{\partial u}{\partial y}(y_{0i_1}),\dots,\frac{\partial u}{\partial z}(z^1_{0i_2}),\dots,\frac{\partial v}{\partial x}(x_{0j_1}),\dots,\frac{\partial v}{\partial z}(z^2_{0i_2}),\dots\Big)(\Delta y)\end{aligned}$$

avec les conditions

$$(2)\qquad u(0,y,z)=0,\ v(x,0,z)=0,$$

où les dérivées sont prises au sens de Fréchet, Δx, Δy sont des variables, $\Delta x\in X$, $\Delta y\in Y$ et $x_{0j_1}\in X$, $y_{0i_1}\in Y$, $z^1_{0j_1}$, $z^2_{0j_2}\in Z$ sont fixées, généralise le système (a).

Nous allons démontrer que, sous certaines conditions, ce système admet une seule solution analytique au sens de la définition 2.

3. **Un Théorème d'Unicité pour les Systèmes Analytiques (1).** Considérons le système (1) introduit en 2 et supposons que :

(I) Les fonctions f et g sont analytiques sur B,

$$(II)\qquad \begin{aligned} &\sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\left\|\frac{\partial f(0)}{\partial u^1_{i_1}}\right\|\,\|y_{0i_1}\|+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\left\|\frac{\partial f(0)}{\partial v^1_{j_1}}\right\|\,\|x_{0j_1}\|<1,\\ &\sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\left\|\frac{\partial g(0)}{\partial u^1_{i_1}}\right\|\,\|y_{0i_1}\|+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\left\|\frac{\partial g(0)}{\partial v^1_{j_1}}\right\|\,\|x_{0j_1}\|<1.\end{aligned}$$

Alors on peut démontrer le

Théorème 1. *Les conditions* (I), (II) *étant remplies, s'il existe une intégrale analytique du système* (1), (2) *dans un voisinage de* $0\in X\times Y\times Z$, *alors cette intégrale est unique.*

Démonstration. En faisant le changement de variable $z=\lambda z'$, par un choix convenable de $\lambda\in\Gamma$, on peut remplacer les conditions (II) par les conditions

$$(II')\qquad \begin{aligned} &\sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\left\|\frac{\partial f(0)}{\partial u^1_{i_1}}\right\|\,\|y_{0i_1}\|+\sum_{i_2=\overline{1,p_2}}\left\|\frac{\partial f(0)}{\partial u^2_{i_2}}\right\|\,\|z^1_{0i_2}\|+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\left\|\frac{\partial f(0)}{\partial v^1_{j_1}}\right\|\,\|x_{0j_1}\|+\\ &+\sum_{j_2=\overline{1,q_2}}\left\|\frac{\partial f(0)}{\partial v^2_{j_2}}\right\|\,\|z^2_{0j_2}\|<1,\\ &\sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\left\|\frac{\partial g(0)}{\partial u^1_{i_1}}\right\|\,\|y_{0i_1}\|+\sum_{i_2=\overline{1,p_2}}\left\|\frac{\partial g(0)}{\partial u^2_{i_2}}\right\|\,\|z^1_{0i_2}\|+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\left\|\frac{\partial g(0)}{\partial v^1_{j_1}}\right\|\,\|x_{0j_1}\|+\\ &+\sum_{j_2=\overline{1,q_2}}\left\|\frac{\partial g(0)}{\partial v^2_{j_2}}\right\|\,\|z^2_{0j_2}\|<1.\end{aligned}$$

Nous allons supposer que f et g satisfont aux conditions (I), (II').

Soit maintenant u, v une solution analytique du système (1), (2). À cause de conditions (2) on doit avoir :

$$(3)\qquad \begin{aligned} u(x,y,z)&=\sum_{\alpha=\overline{1,\infty},\beta,\gamma=\overline{0,\infty}}\frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}u_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z),\\ v(x,y,z)&=\sum_{\beta=\overline{1,\infty},\alpha,\gamma=\overline{0,\infty}}\frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}v_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z),\end{aligned}$$

où $u_{\alpha\beta\gamma}$, $v_{\alpha\beta\gamma}$ sont des polynômes homogènes continus de degré α en $x\in X$, β en $y\in Y$ et γ en $z\in Z$.

Si on note

$$F(x,y,z)(\Delta x)=f\Big(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z),\frac{\partial u}{\partial y}(y_{0i_1}),\frac{\partial u}{\partial z}(z^1_{0i_2}),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_{0j_1}),\ \frac{\partial v}{\partial z}(z^2_{0j_2})\Big)(\Delta x),$$

$$G(x, y, z)(\Delta y) = g\Big(x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial y}(y_{0i_1}), \frac{\partial u}{\partial z}(z^1_{0i_2}),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_{0j_1}), \frac{\partial v}{\partial z}(z^2_{0j_2})\Big)(\Delta y) \quad (i_1 = \overline{1, p_1},\ i_2 = \overline{1, p_2},\ j_1 = \overline{1, q_1},\ j_2 = \overline{1, q_2})$$

alors F et G sont des fonctions analytiques dans un voisinage de $0 \in X \times Y \times Z$. Les fonctions u et v, analytiques, ayant la forme (3) constituent une solution du système (1), (2), si et seulement si on a

$$(4)\qquad \begin{aligned} u_{\alpha\beta\gamma}(x^{\alpha-1}, \Delta x, y^{\beta-1}, z^\gamma) &= \frac{\partial^{\alpha-1+\beta+\gamma} F(0)}{\partial x^{\alpha-1}\partial y^\beta \partial z^\gamma}(\Delta x, x^{\alpha-1}, y^\beta, z^\gamma) \\ v_{\alpha\beta\gamma}(x^\alpha, y^{\beta-1}, \Delta y, z^\gamma) &= \frac{\partial^{\alpha+\beta-1+\gamma} G(0)}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta-1}\partial z^\gamma}(\Delta y, x^\alpha, y^{\beta-1}, z^\gamma). \end{aligned}$$

Si $\alpha+\beta+\gamma=n$, le relations (4) déterminent pour $u_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha \geqslant 1)$ et v_{ijk} $(i+j+k=n,$ $j \geqslant 1)$ le système

$$(5)\qquad \begin{aligned} u_{\alpha\beta\gamma}(x^{\alpha-1}, \Delta x, y^\beta, z^\gamma) &= A_{\alpha\beta\gamma}(\Delta x, x^{\alpha-1}, y^\beta, z^\gamma) + \\ &+ \sum_{i_1=\overline{1,p_1}} \frac{\partial f(0)}{\partial u^1_{i_1}}(\Delta x, u_{\alpha-1\beta+1\gamma}(x^{\alpha-1}, y^\beta, y_{0i_1}, z^\gamma)) + \\ &+ \sum_{i_2=\overline{1,p_2}} \frac{\partial f(0)}{\partial u^2_{i_2}}(\Delta x, u_{\alpha-1\beta\gamma+1}(x^{\alpha-1}, y^\beta, z^\gamma, z^1_{0i_2})) + \\ &+ \sum_{j_1=\overline{1,q_1}} \frac{\partial f(0)}{\partial v^1_{j_1}}(\Delta x, v_{\alpha\beta\gamma}(x^{\alpha-1}, x_{0j_1}, y^\beta, z^\gamma)) + \\ &+ \sum_{j_2=\overline{1,q_2}} \frac{\partial f(0)}{\partial v^2_{j_2}}(\Delta x, v_{\alpha-1\beta\gamma+1}(x^{\alpha-1}, y^\beta, z^\gamma, z^2_{0j_2})), (u_{0\beta\gamma}=0), \\ v_{ijk}(x^i, y^{j-1}, \Delta y, z^k) &= B_{ijk}(x^i, \Delta y, y^{j-1}, z^k) + \\ &+ \sum_{i_1=\overline{1,p_1}} \frac{\partial g(0)}{\partial u^1_{i_1}}(\Delta y, u_{ijk}(x^i, y^{j-1}, y_{0i_1}, z^k)) + \\ &+ \sum_{i_2=\overline{1,p_2}} \frac{\partial g(0)}{\partial u^2_{i_2}}(\Delta y, u_{ij-1k+1}(x^i, y^{j-1}, z^k, z^1_{0i_2})) + \\ &+ \sum_{j_1=\overline{1,q_1}} \frac{\partial g(0)}{\partial v^1_{j_1}}(\Delta y, v_{i-1j-1k+1}(x^i, x_{0j_1}, y^{j-1}, z^k)) + \\ &+ \sum_{j_2=\overline{1,q_2}} \frac{\partial g(0)}{\partial v^2_{j_2}}(\Delta y, v_{ij-1k+1}(x^i, y^{j-1}, z^k, z^1_{0j_2})), (u_{i0k}=0). \end{aligned}$$

$A_{\alpha\beta\gamma}$, B_{ijk} sont des fonctions $\alpha+\beta+\gamma$ -linéaires, $i+j+k$ -linéaires, respectivement. Elles sont des sommes dont les termes sont les dérivées de f respectivement g, jusqu'à l'ordre $n-1$, dans l'origine, calculées en u_{ijk}, v_{ijk}, avec $i+j+k \leqslant n-1$.

Notons par $E_{\alpha\beta\gamma}(X, Y, Z; U)$, $F_{\alpha\beta\gamma}(X, Y, Z; V)$ les espaces de Banach des polynômes homogènes continus de degré α en x, β en y, γ en z à valeurs

dans les espaces de Banach U et V, respectivement et considérons l'espace de Banach $W_n = \prod_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=n \\ \beta,\gamma=\overline{0,n},\ \alpha=\overline{1,n}}} E_{\alpha\beta\gamma} \times \prod_{\substack{i+j+k=n \\ i,k=\overline{0,n},\ j=\overline{1,n}}} F_{ijk}$ avec la norme maximum.

Soit $T_n : W_n \to W_n$,

$$(6)\qquad \begin{aligned} w = (\ldots, a_{\alpha\beta\gamma}, \ldots, b_{ijk}, \ldots) &\to T_n w = \\ = (\ldots, \sum_{i_1=\overline{1,p_1}} &\frac{\partial f(0)}{\partial u^1_{i_1}}(x, a_{\alpha-1\beta+1\gamma}(x^{\alpha-1}, y^\beta, y_{0i_1}, z^\gamma)) + \\ + \sum_{i_2=\overline{1,p_2}} &\frac{\partial f(0)}{\partial u^2_{i_2}}(x, a_{\alpha-1\beta\gamma+1}(x^{\alpha-1}, y^\beta, z^\gamma, z^1_{0i_2})) + \\ + \sum_{j_1=\overline{1,q_1}} &\frac{\partial f(0)}{\partial v^1_{j_1}}(x, b_{\alpha\beta\gamma}(x^{\alpha-1}, x_{0j_1}, y^\beta, z^\gamma)) + \\ + \sum_{j_2=\overline{1,q_2}} &\frac{\partial f(0)}{\partial v^2_{j_2}}(x, b_{\alpha-1\beta\gamma+1}(x^{\alpha-1}, y^\beta, z^\gamma, z^2_{0j_2})), \ldots, \\ \ldots, \sum_{i_1=\overline{1,p_1}} &\frac{\partial g(0)}{\partial u^1_{i_1}}(y, a_{ijk}(x^i, y^{j-1}, y_{0i_1}, z^k)) + \\ + \sum_{i_2=\overline{1,p_2}} &\frac{g(0)}{\partial u^2_{i_2}}(y, a_{ij-1k+1}(x^i, y^{j-1}, z^k, z^1_{0i_2})) + \\ + \sum_{j_1=\overline{1,q_1}} &\frac{\partial g(0)}{\partial v^1_{j_1}}(y, b_{i+1j-1k}(x^i, x_{0j_1}, y^{j-1}, z^k)) + \\ + \sum_{j_2=\overline{1,q_2}} &\frac{\partial g(0)}{\partial v^2_{j_2}}(y, b_{ij-1k+1}(x^i, y^{j-1}, z^k, z^2_{0j_2})), \ldots) \end{aligned}$$

où $a_{0jk}=0$, $b_{i0k}=0$. Parcequ'on a (H'), on trouve : $\|T_n\|<1$.

Si dans (5) on remplace $\Delta x = x$, $\Delta y = y$, on obtient que $(\ldots, u_{\alpha\beta\gamma}, \ldots, v_{ijk}, \ldots)$ $\alpha+\beta+\gamma=i+j+k=n$, constituent une solution de l'équation

$$(6)\qquad w = T_n w + w_0$$

où $w_0 = (\ldots, A_{\alpha\beta\gamma}(x, x^{\alpha-1}, y^\beta, z^\gamma), \ldots, B_{ijk}(x^i, y, y^{j-1}, z^k), \ldots)$. Parcequ'on a $\|T_n\| < 1$, l'équation (6) admet une solution unique dans W_n, donc $u_{\alpha\beta\gamma}$, v_{ijk} $(\alpha+\beta+\gamma=i+j+k=n)$ sont uniquement déterminés. Le théorème est complètement démontré.

Remarque. Dans le cas général, avec les polynômes $u_{\alpha\beta\gamma}$, v_{ijk} qui se déterminent par les équations (6) ne se constitue une solution formelle pour le système (1), parce que ces polynômes ne vérifient pas toujours les systèmes (5), Δx, Δy des expressions de f et g n'étant pas des éléments permutables dans les dérivées des fonctions f et g.

Dans 3. nous allons étudier des systèmes ayant la forme (1) qui admettent des solutions analytiques.

3. Systèmes d'Équations ayant la Forme (1) avec des Solutions Analytiques. Soient les espaces linéaires normés X, Y, Z, et les espaces de Banach U, V, sur le corps de scalaires Γ. Considérons le système

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x)=f_0\left(x, y, z, u, v, \frac{\partial u}{\partial y}(y_{0i_1}), \frac{\partial u}{\partial z}(z^1_{0i_2}), \frac{\partial v}{\partial x}(x_{0j_1}), \frac{\partial v}{\partial z}(z^2_{0j_2})\right)a(\Delta x),$$

$$(1') \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(\Delta y)=g_0\left(x, y, z, u, v, \frac{\partial u}{\partial y}(y_{0i_1}), \frac{\partial u}{\partial z}(z^1_{0i_2}), \frac{\partial v}{\partial x}(x_{0j_1}), \frac{\partial v}{\partial z}(z^2_{0j_2})\right)b(\Delta y),$$

$$i_1=\overline{1, p_1},\ i_2=\overline{1, p_2},\ j_1=\overline{1, q_1},\ j_2=\overline{1, q_2},$$

où :

(I) $a(x)$, $b(y)$, sont des fonctionelles linéaires continues, définies sur X, respectivement Y,

(I_1) $\qquad f_0(x, y, z, u, v, u^1_{i_1}, u^2_{i_2}, v^1_{j_1}, v^2_{j_2}),\ g_0(x, y, z, u, v, u^1_{i_1}, u^2_{i_2}, v^1_{j_1}, v^2_{j_2})$

sont des fonctions analytiques, définies sur le domain

$$B=\{(x, y, z, u, \ldots, v^2_{q_2}): \|x\|, \ldots, \|v^2_{q_2}\|<r\}\subset X\times Y\times Z\times U\times V\times U^{p_1}\times U^{p_2}\times V^{q_1}\times V^{q_2},$$

à valeurs dans U, respectivement V, ayant la forme

$$(7) \qquad \begin{aligned} f_0(x, \ldots, v^2_{q_2}) &= \Sigma\,(a(x))^i(b(y))^j P_{ijkmni^1_1\ldots j^2_{q_2}}(z, u, v, u^1_1, \ldots, v^2_{q_2}) \\ g_0(x, \ldots, v^2_{q_2}) &= \Sigma\,(a(x))^i(b(y))^j Q_{ijkmni^1_1\ldots j^2_{q_2}}(z, u, v, u^1_1, \ldots, v^2_{q_2}) \end{aligned}$$

où $P_{i\ldots j^2_{q_2}}$, $Q_{i\ldots j^2_{q_2}}$ sont des polynômes de degré k en $z, \ldots, j^2_{q_2}$ en $v^2_{q_2}$, à valeurs dans U, respectivement V.

Remarques. 1. Le système (1) est dans la classe des systèmes (1), avec $f=f_0a(\Delta x)$, $g=g_0b(\Delta y)$.

2. A cause de la condition (I_1), le système (1') satisfait à la condition (I), imposée aux systèmes (1).

3. Dans ce cas, les conditions (II) sont satisfaites si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(II_1) \qquad \begin{aligned} &\|a\|\left(\sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\left\|\frac{\partial f_0(0)}{\partial u^1_{i_1}}\right\|\|y_{0i_1}\|+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\left\|\frac{\partial f_0(0)}{\partial v^1_{j_1}}\right\|\|x_{0j_1}\|\right)<1, \\ &\|b\|\left(\sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\left\|\frac{\partial g_0(0)}{\partial u^1_{i_1}}\right\|\|y_{0i_1}\|+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\left\|\frac{\partial g_0(0)}{\partial v^1_{j_1}}\right\|\|x_{0j_1}\|\right)<1. \end{aligned}$$

4. Le système (5), si $u_{\alpha\beta\gamma}(x, y, z)=(a(x))^\alpha(b(y))^\beta u^0_{\alpha\beta\gamma}(z^\gamma)$, $v_{ijk}(x, y, z)=(a(x))^i(b(y))^j v^0_{ijk}(z^k)$ ($u^0_{\alpha\beta\gamma}$, v^0_{ijk}, des polynômes homogènes continus de degré γ respectivement k en z), $f=f_0\,a(\Delta x)$, $g=g_0b(\Delta y)$, devient :

$$(5') \qquad \begin{aligned} u^0_{\alpha\beta\gamma}(z^\gamma) &= A^0_{\alpha\beta\gamma}(z^\gamma)+\sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\frac{\partial f_0(0)}{\partial u^1_{i_1}}(u^0_{\alpha-1\,\beta+1\,\gamma}(z^\gamma))b(y_{0i_1})+\sum_{i_2=\overline{1,p_1}}\frac{\partial f_0(0)}{\partial u^2_{i_2}}(u^0_{\alpha-1\beta\gamma+1}(z^\gamma, z^1_{0i_2}))+ \\ &+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\frac{\partial f_0(0)}{\partial v^1_{j_1}}(v^0_{\alpha\beta\gamma}(z^\gamma))a(x_{0j_1})+\sum_{j_2=\overline{1,q_2}}\frac{\partial f_0(0)}{\partial v^2_{i_2}}(v^0_{\alpha-1\beta\gamma+1}(z^\gamma, z^2_{0j_2})), \\ v^0_{ijk}(z^k) &= B^0_{ijk}(z^k)+\sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\frac{\partial g_0(0)}{\partial u^1_{i_1}}(u^0_{ijk}(z^k))b(y_{0i_1})+\sum_{i_2=\overline{1,p_2}}\frac{\partial g_0(0)}{\partial u^2_{i_2}}(u^0_{ij-1k+1}(z^k, z^1_{0i_2}))+ \\ &+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\frac{\partial g_0(0)}{\partial v^1_{j_1}}(v^0_{i+1j-1k}(z^k))a(x_{0j_1})+\sum_{j_2=\overline{1,q_2}}\frac{\partial g_0(0)}{\partial v^2_{j_2}}(v^0_{ij-1k+1}(z^k, z^2_{0j_2})), \\ &\alpha+\beta+\gamma=i+j+k=n,\ \alpha\geqslant 1,\quad j\geqslant 1, \end{aligned}$$

où $A^0_{\alpha\beta\gamma}$, B^0_{ijk} sont des polynômes de degré γ respectivement k en z. Ils sont des sommes de dérivées, jusqu'à l'ordre $n-1$, des fonctions f_0, respectivement g_0, dans l'origine des espaces où elles sont définies, calculées en $u^0_{\alpha\beta\gamma}$ v^0_{ijk}, avec $\alpha+\beta+\gamma\leqslant n-1$, $i+j+k\leqslant n-1$. Pour obtenir une solution formelle pour le système (1') il doit assurer l'existence des solutions pour les systèmes (5'). De cette manière nous arrivons au

Théorème 2. *Si les fonctions f_0, g_0 sont analytiques sur le domain B, ayant la forme (7) et satisfont aux conditions*

$$(C') \qquad \begin{aligned} &\sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\left\|\frac{\partial f_0(0)}{\partial u^1_{i_1}}\right\|\|b(y_{0i_1})\|+\sum_{i_2=\overline{1,p_2}}\left\|\frac{\partial f_0(0)}{\partial u^2_{i_2}}\right\|\|z^1_{0i_2}\|+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\left\|\frac{\partial f_0(0)}{\partial v^1_{j_1}}\right\|\|a(y_{0j_1})\|+ \\ &+\sum_{j_2=\overline{1,q_2}}\left\|\frac{\partial f_0(0)}{\partial v^2_{j_2}}\right\|\|z^2_{0j_2}\|<1,\ \sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\left\|\frac{\partial g_0(0)}{\partial u^1_{i_1}}\right\|\|b(y_{0i_1})\|+\sum_{i_2=\overline{1,p_2}}\left\|\frac{\partial g_0(0)}{\partial u^2_{i_2}}\right\|\|z^1_{0i_2}\|+ \\ &+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\left\|\frac{\partial g_0(0)}{\partial v^1_{j_1}}\right\|\|a(x_{0j_1})\|+\sum_{j_2=\overline{1,q_2}}\left\|\frac{\partial g_0(0)}{\partial v^2_{j_2}}\right\|\|z^2_{0j_2}\|<1 \end{aligned}$$

alors le système (1') avec les conditions (2) admet une solution analytique unique $(u(x, y, z), v(x, y, z))$,

$$(3') \qquad \begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{\alpha=1,\infty\beta,\gamma=\overline{0,\infty}}\frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\mu!}(a(x))^\alpha(b(y))^\beta u^0_{\alpha\beta\gamma}(z^\gamma), \\ v(x, y, z) &= \sum_{\alpha=1,\infty,\alpha,\gamma=\overline{0,\infty}}\frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\mu!}(a(x))^\alpha(b(y))^\beta v^0_{\alpha\beta\gamma}(z^\gamma), \end{aligned}$$

où $u^0_{\alpha\beta\gamma}$, $v^0_{\alpha\beta\gamma}$ sont des polynômes homogènes continus de degré γ en z. Si f_0, g_0 satisfont aussi aux conditions (II_1), alors la solution (3') est unique dans la classe des fonctions analytiques au sens de la définition 2.

Démonstration. Si $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ ayant la forme (3') constituent une solution analytique pour le système (1'), alors $u^0_{\alpha\beta\gamma}(z^\gamma)$, $v^0_{ijk}(z^k)$ ($\alpha+\beta+\gamma=i+j+k=n$, $\alpha\leqslant 1$, $j\leqslant 1$, $n\leqslant 1$) vérifient les systèmes (5'). Nous allons montrer que ces systèmes admettent des solutions uniques.

Considérons l'espace $W_n=\prod_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=n\\ \alpha\geqslant 1}}E_\gamma\times\prod_{\substack{i+j+k=n\\ j\geqslant 1}}F_k$, où E_γ est l'espace de Banach des polynômes homogènes continus de degré γ en z, à valeurs dans U et F_k est l'espace de Banach des polynômes homogènes continus de degré k en z, à valeurs dans V. Alors le système (5') s'écrit sous la forme

$$(8) \qquad w=T_nw+w_0,$$

où $T_n: W_n\to W_n$, $T_nw=T_n(\ldots, u_{\alpha\beta\gamma}, \ldots, b_{ijk}, \ldots)=(\ldots, c_{\alpha\beta\gamma}, \ldots, d_{ijk}, \ldots)$, avec

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta\gamma}(z^\gamma) &= \sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\frac{\partial f_0(0)}{\partial u^1_{i_1}}(a_{\alpha-1\beta+1\gamma}(z^\gamma))b(y_{0i_1})+\sum_{i_2=\overline{1,q_2}}\frac{\partial f_0(0)}{\partial u^2_{i_2}}(a_{\alpha-1\beta\gamma+1}(z^\gamma, z^1_{0i_2}))+ \\ &+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\frac{\partial f_0(0)}{\partial v^1_{j_1}}(b_{\alpha\beta\gamma}(z^\gamma))a(x_{0j_1})+\sum_{j_2=\overline{1,q_2}}\frac{\partial f_0(0)}{\partial v^2_{j_2}}(b_{\alpha-1\beta\gamma+1}z^\gamma, (z^2_{0j_2})), \end{aligned}$$

$$d_{ijk}(z^k)=\sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\frac{\partial g_0(0)}{\partial u^1_{i_1}}(a_{ijk}(z^k))(b_{y_{0i_1}})+\sum_{i_2=\overline{1,p_2}}\frac{\partial g_0(0)}{\partial v^2_{i_2}}(a_{ij-1k+1}(z^\gamma, z^1_{0i_2}))+$$

$$+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\frac{\partial g_0(0)}{\partial v^1_{j_1}}(b_{i+1j-1k}(z^k))a(x_{0j_1})+\sum_{j_2=\overline{1,q_2}}\frac{\partial g_0(0)}{\partial v^2_{j_2}}(b_{ij-1k+1}(z^k, z^2_{0j_2})).$$

Si dans H_n on utilise la norme maximum, à cause des conditions (C') on trouve $\|T_n\|<1$. De cette manière, il résulte que le système (5′) a une solution unique, et que pour le système (1′) on peut déterminer une solution formelle ayant la forme (3′).

On prouve l'existence de la solution formelle (3′) par une méthode de majoration. À ce but nous considérons le système d'équations scalaires

$$(1^*)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial u^*}{\partial x^*}&=f_0\left(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*, \frac{\partial u^*}{\partial y^*}|b(y_{0i_1})|, \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\|z^1_{0i_1}\|, \frac{\partial y^*}{\partial x^*}|a(x_{0j_1})|, \frac{\partial v^*}{\partial z^*}\|z^2_{0j_2}\|\right)\\ \frac{\partial v^*}{\partial y^*}&=g_0\left(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*, \frac{\partial u^*}{\partial y^*}|b(y_{0i_1})|, \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\|z^1_{0i_1}\|, \frac{\partial v^*}{\partial x^*}|a(x_{0j_1})|, \frac{\partial v^*}{\partial z^*}\|z^2_{0j}\|\right)\end{aligned}$$

avec les conditions

$$(2^*)\qquad u^*(0, y^*, z^*)=0,\quad v^*(x^*, 0, z^*)=0,$$

où f_0^*, g_0^*, sont des fonctions définies, en partant de (7), sur $B^*\subset R^{5+p_1+p_2+q_1+q_2}$, $B^*=\{(x^*,\dots, v^{*2}_{q_2})\ ;\ |x|,\dots,|v^{*2}_{q_2}|<r\}$, par

$$f_0^*=\Sigma\|P_{ijlmni^1_1\dots j^2_{q_2}}\|(x^*)^i(y^*)^j(z^*)^k(u^*)^m(v^*)^n(u^{*1}_1)^{i^1_1}\dots(v^{*2}_{q_2})^{j^2_{q_2}}$$

$$g_0^*=\Sigma\|Q_{ijlmni^1_1\dots j^2_{q_2}}\|(x^*)^i(y^*)^j(z^*)^k(u^*)^m(v^*)^n(u^{*1}_1)^{i^1_1}\dots(v^{*2}_{q_2})^{j^2_{q_2}}.$$

À cause de la condition (I_1), f_0^*, g_0^* sont analytiques sur B^*. Parce qu'on a (C'), le système(1*) a une solution analytique unique

$$(3^*)\qquad \begin{aligned}u^*(x^*, y^*, z^*)&=\sum_{\alpha=\overline{1,\infty},\beta,\gamma=\overline{0,\infty}}\frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}(x^*)^\alpha(y^*)^\beta(z^*)^\gamma u^*_{\alpha\beta\gamma},\\ v^*(x^*, y^*, z^*)&=\sum_{\beta=\overline{1,\infty},\alpha,\gamma=\overline{0,\infty}}\frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}(x^*)^\alpha(y^*)^\beta(z^*)^\gamma v^*_{\alpha\beta\gamma}\end{aligned}$$

dans un voisinage de $0\in R^n$[2, 5].

En utilisant les conditions (C') on trouve que $\|u^0_{\alpha\beta\gamma}\|\leqslant u^*_{\alpha\beta\gamma}$, $\|v^0_{\alpha\beta\gamma}\|\leqslant v^*_{\alpha\beta\gamma}$, donc la solution (3*) est une majorante pour la solution (3′) obtenue à l'aide des systèmes (5′).

Si f_0, g_0 satisfont et les conditions (II_1) alors on peut appliquer le théorème 1. De cette manière on obtient que la solution (3′) est unique dans la classe des fonctions analytiques au sens de la définition 2. Le théorème est complètement démontré.

Remarques 1. Les conditions (C') s'obtiennent par les conditions

$$\sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\left\|\frac{\partial f_0(0)}{\partial u^1_{i_1}}\right\||b(y_{0i_1})|+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\left\|\frac{\partial f_0(0)}{\partial v^1_{j_1}}\right\||a(x_{0j_1})|<1,$$

$$\sum_{i_1=\overline{1,p_1}}\left\|\frac{\partial g_0(0)}{\partial u^1_{i_1}}\right\||b(y_{0i_1})|+\sum_{j_1=\overline{1,q_1}}\left\|\frac{\partial g_0(0)}{\partial v^1_{i_1}}\right\||a(x_{0j_1})|<1,$$

si on fait le changement de variable $z=\lambda z'$, où $\lambda\in\Gamma$ est choisi convenablement.

2. Si $\|a\|=\|b\|$, alors les conditions (II_1) impliquent les conditions (C). De cette manière il résulte.

Théorème 3. *Le système* (1′), *où* f_0, g_0 *satisfont aux conditions* (I_1), (II_1) *et* $\|a\|=\|b\|$, *admet une solution analytique au sens la définition* 2, *unique, et cette solution est de la forme* (3′).

Des résultats analogues peuvent être obtenus pour des systèmes d'équations qui généralisent de la même manière les systèmes de Lednev étudiés en [2].

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartan H. — *Calcul Différentiel-Formes Différentielles*, Herman Paris, 1967
2. Ciumaşu D. — *Le problème généralisé de Cauchy dans un anneau de séries formelles et dans une algèbre de séries convergentes*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., tome XVIII, nr. 10, 1973, 1 535—1 545
3. Garding L. — *Une variante de la méthode de majoration de Cauchy*, Acta Math., 1965, 114, 143—158
4. Haimovici A. — *Sur un système qui généralise le système de Cauchy-Kowalewsky*, An. şt. Univ. Iaşi, 1962, 33—56
5. Haimovici A. — *Sur la résolution de certaines systèmes d'équations aux dérivées partielles qui généralisent les systèmes de Cauchy-Kowalewsky*, Publ. Math., Debrecen, 1962, 9, 197—212
6. Michal A.D. — *Le Calcul Différentiel dans les Espaces de Banach*, vol. I, Gauthier — Villars, 1958
7. Onciulescu I. — *Analytical Systems of Partial Fréchet Derivatives on Fixed Directions, in Banach Spaces*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S.R. (submitted)

Reçu le 1. III. 1983

Institut Polytechnique de Iaşi
Département de Mathématiques
6600 Iaşi, R.S. Roumanie