min λ

Subject to $(x, \lambda) \in \operatorname{epi} a$, $x \in P$, $Ax \in y+Q$.

But this problem is linear and its constraints $(\operatorname{epi} a) \cap (P \times R)$ and Q are obviously convex closed cones in $X \times R$ and Y respectively.

REFERENCES

1. Barbu V. and Precupanu T. — *Convexity and Optimization in Banach Spaces.* Publishing House of Romanian Academy and Sijthoff Noordhoof. 1978
2. Choquet, G. — *Ensembles et cônes faiblement complets.* C.R. Acad. Sci. Paris t. 254 (1962), p. 1908—1910
3. Dedieu, J.P. — *Critères de fermeture pour l'image d'un fermé non convexe par une multi-application.* C.R. Acad. Sci. Paris 287 (1978), p. 941—943
4. Dedieu, J.P. — *Cône asymptote d'un ensemble non convexe. Application à l'optimisaton.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 285 (1977), p. 501—503
5. Dieter, U. — *Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen. I: Dualitätstheorie.* Z. Warsscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete 5 (1966), p. 89—117
6. Dieudonné, J. — *Sur la séparation des ensembles convexes.* Math. Ann. 163 (1966), p. 1—3
7. Fan, Ky — *Asymptotic cones and duality of linear relations.* J. Approx. Theory 2 (1969). p. 152—159
8. Krabs, W. — *Zur Dualitätstheorie bei linear Optimierungsproblem in halbgeordneten Vectorräumen.* Math. Z. 121 (1971), p. 320—328
9. Krabs, W. — *Optimization and approximation.* John Wiley & Sons, 1979
10. Kretschmer, K. — *Programmes in paired spaces.* Canad. J. Math. 16 (1961), p. 221—238
11. Levine P. and Pomerol, J. Ch. — *C-closed mappings and Kuhn-Tucker vectors in convex programming.* CORE DP., no. 7620, Univ. Catholique de Louvain, 1976
12. Levine P. and Pomerol J. Ch. — *Sufficient conditions for Kuhn-Tucker vectors in convex programming.* SIAM J. Control and Optimization 17 (1979), p. 689—699
13. Nakamura T. and Yamasaky, M. — *Sufficient conditions for duality theorems in infinite linear programming problems.* Hiroshima Math. J. 9 (1979), p. 323—334
14. Nozawa R. — *Programming with constraints of convex processes.* Hiroshima Math. J. 11 (1981), p. 369—378
15. Ponstein J. — *Approach to the Theory of Optimization.* Cambridge Univ. Press, 1980
16. Precupanu T. — *On the stability in Fenchel-Rockafellar duality.* An. şt. Univ. Iaşi, Iaşi, 28 (1982), fasc. 2, p. 21—24
17. Precupanu T. — *Closedness conditions for the optimality of a family of non-convex optimization problems* (to appear in „Math. Operations forsch. statist. Ser. Optimization")
18. Raffin, C. — *Sur les programmes convexes définis dans des espaces vectoriels topologiques.* Ann. Inst. Fourier 20 (1970), p. 457—494
19. Rockafellar, R.T. — *Duality and stability in extremum problems involving convex functions.* Pacific J. Math. 21 (1967), p. 167—187
20. Yamasachi, M. — *Duality theorems in mathematical programming and their aplications.* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A—I Math., 30 (1968). p. 331—356
21. Zălinescu, C. — *A generalization of Farcas lemma and applications to convex programming.* J. Math. Anal. Appl. 66 (1978), p. 651—698

Received 30. V. 1983

Faculty of Mathematics
University of Iaşi
6600 Iaşi, R.S. România

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXX, s. I a, 1984 — 1

COHOMOLOGIE A VALEURS DANS UN FAISCEAU CELLULAIRE SIMPLE

PAR

CRISTIAN NICOLAE COSTINESCU

Les faisceaux cellulaires simples apparaissent dans la calcul des K_G-groupes de certains G-espaces ; ils ont été introduits dans [2], mais la notion générale a été ensuite dégagée dans [4].

Le but de cette note est de donner la cohomologie d'un simplexe euclidien quelconque, à valeurs dans un faisceau cellulaire simple.

1. Nous rappelons d'abord quelques définitions et résultats de [3]. On note ci-après par $X=[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ le simplexe euclidien de dimension n (engendré par $x_0, x_1, \ldots, x_n$) et par $\mathcal{F}$ un faisceau de base X, à valeurs dans la catégorie Ab.

Définition 1.1. *Le faisceau $\mathcal{F}$ est dit cellulaire simple si, pour toute face ouverte Y de X, le faisceau induit par $\mathcal{F}$ dans Y est simple (i.e. $\mathcal{F}_{|Y}=G_Y \in \operatorname{Ob}(Ab)$).*

Dans ce travail, on designe par $G_{i_0 \ldots i_q}$ le faisceau induit par $\mathcal{F}$ dans la q-ème face ouverte $X_{i_0 \ldots i_q}=[x_{i_0}, \ldots, x_{i_q}]$, pour toutes les suites strictement croissantes $i_0 < \ldots < i_q$ d'entiers $\geqslant 0$ et $\leqslant n$.

Proposition 2.1. *Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cellulaire simple de base X et Y, Y', Y'' trois faces ouvertes de X.*

a) *Si $Y \cap \overline{Y'} \neq \emptyset$ alors il existe un homomorphisme $f^{Y}_{Y'} : G_Y \to G_{Y'}$.*

b) *Si $Y' \cap \overline{Y''} \neq \emptyset$ et $Y \cap \overline{Y'} \cap \overline{Y''} \neq \emptyset$ alors on a $f^{Y'}_{Y''} \circ f^{Y}_{Y'} = f^{Y}_{Y''}$.*

Il est clair que la condition $Y \cap \overline{Y'} \neq \emptyset$ se traduit par le fait que Y est une face de Y'. Alors, pour $q < r$, on convient de noter les homomorphismes de la proposition 1.2 par :

$$f^{i_0 \ldots i_q}_{i_0 \ldots i_r} : G_{i_0 \ldots i_q} \to G_{i_0 \ldots i_r}$$

où $0 \leqslant i_0 < \ldots < i_q < \ldots < i_r < \ldots \leqslant n$.

2. Soit $\dot{X}^q$ la réunion des q-èmes faces fermées et $\hat{X}^q$ la réunion des q-èmes faces ouvertes de X ; alors on a : $\dot{X}^0=\{x_0, \ldots, x_n\}$, $\dot{X}^{n-1}=\operatorname{Fr} X$ (la frontière de X) et $\dot{X}^q - \dot{X}^{q-1} = \hat{X}^q$ pour tout $q=1, 2, \ldots, n^{-1}$.

En utilisant la formule :

$$H^n_c(\mathbf{R}^m; G) = \begin{cases} G & \text{si } m=n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \tag{1}$$

(où H_c sont les groupes de cohomologie à supports compacts) et la suite exacte Mayer-Vietoris ([1], p. 65), on obtient :

$$(2)\qquad H^0(\dot{X}_0^n;\mathcal{F})\cong\bigoplus_{i=0}^{n}G_i,\ H_c^q(\dot{X}^q;\mathcal{F})\cong\bigoplus_{0\leq i_0<\ldots<i_q\leq n}G_{i_0\ldots i_q}\ \text{pour } q=1,2,\ldots,n-1,$$

$$H_c^n(X\setminus \mathrm{Fr}X;\mathcal{F})\cong G_{01\ldots n},$$

Considérons maintenant $F=\mathrm{Fr}X$ et la suite exacte de cohomologie associée à un sous-espace fermé :

$$0\to H_c^0(X\setminus F;\mathcal{F})\to H^0(X;\mathcal{F})\to H^0(F;\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}H_c^1(X\setminus F;\mathcal{F})\to\ldots\to$$
$$\to H_c^{n-1}(X\setminus F;\mathcal{F})\to H^{n-1}(X;\mathcal{F})\to H^{n-1}(F;\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}H_c^n(X\setminus F;\mathcal{F})\to H^n(X;\mathcal{F})\to 0.$$

En vertu de (1) et (2), la suite exacte antérieure se traduit dans les homomorphismes bijectifs :

$$(3)\qquad H^q(X;\mathcal{F})\cong H^q(\mathrm{Fr}X;\mathcal{F})\ \text{pour tout } q\neq n-1,\ n,$$

et dans la suite exacte :

$$(4)\qquad 0\to H^{n-1}(X;\mathcal{F})\to H^{n-1}(\mathrm{Fr}X;\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}G_{01\ldots n}\to H^n(X;\mathcal{F})\to 0.$$

Or, puisque les $\dot{X}^{q-1}$ sont fermés dans $\dot{X}^q$ (pour $q=1,2,\ldots,n-1$), en utilisant de nouveau la suite de cohomologie associée à un sous-espace fermé, on a aussi les homomorphismes bijectifs :

(5) $H^k(\dot{X}^q;\mathcal{F})\cong H^k(\dot{X}^{q-1};\mathcal{F})$ pour tout $k\neq q-1,\ q$ dans le premier membre ($q=1,2,\ldots,n-1$) et les suites exactes :

$$(6)\qquad 0\to H^q(\dot{X}^{q-1};\mathcal{F})\to H^q(\dot{X}^q;\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}\bigoplus G_{i_0\ldots i_q}\to H^{q+1}(\dot{X}^{q-1};\mathcal{F})\to 0$$

pour $q=0,1,\ldots,n-2$.

En vertu de (2), pour $q=0$ la suite (6) devient :

$$(7)\qquad 0\to H^0(\dot{X}^1;\mathcal{F})\to\bigoplus_{i=0}^{n}G_i\xrightarrow{\delta^0}\bigoplus_{0\leq i_0<i_1\leq n}G_{i_0i_1}\to H^1(X^1;\mathcal{F})\to 0.$$

Nous calculons l'opérateur δ en cohomologie de Čech parce que la famille des supports Φ est la famille c des compacts de X et alors on a les équivalences : $\check{H}_\Phi^n(X;\mathcal{F})\xrightarrow{\sim}H_\Phi^n(X;\mathcal{F})$ pour tout n. Mais il est facile de calculer l'opérateur δ en cohomologie de Čech (voir exemple [5], p. 232). Dans (7) on a :

$$\delta^0((g_i)_i)=(f_{i_0i_1}^{i_1}(g_{i_1})-f_{i_0i_1}^{i_0}(g_{i_0}))_{0\leq i_0<i_1\leq n}.$$

Alors il s'ensuit de (7), en appliquant (3) et (5),

$$(8)\qquad H^0(X;\mathcal{F})\cong H^0(\mathrm{Fr}X;\mathcal{F})\cong\ldots\cong H^0(\dot{X}^1;\mathcal{F})\cong\operatorname{Ker}\delta^0=\{(g_i)\in\bigoplus_{i=0}^{n}G_i\mid f_{i_0}^{i_1}(g_{i_1})=f_{i_0}^{i_0}(g_{i_0})\}$$

(Par suite $H^0(X;\mathcal{F})=\bigcap_{0\leq i_0<i_1\leq n}G_{i_0}\times_{G_{i_0i_1}}G_{i_1}$

où on designe par $G\times_H G'$ le produit fibré de G et G' au-dessus de H)

$$(9)\qquad H^1(\dot{X}^1;\mathcal{F})\cong\bigoplus_{0\leq i_0<i_1\leq n}\frac{G_{i_0i_1}}{G_0^1+G_1^1},$$

(où on convient de noter $\operatorname{Im} f_{i_0\ldots i_q}^{i_0\ldots\hat{i}_p\ldots i_q}$ par G_p^q et la notation $i_0\ldots\hat{i}_p\ldots i_q$ indique que de la suite $i_0\ldots i_p\ldots i_q$ on a enlevé le terme d'indice p) et $H^q(X^1;\mathcal{F})=0$ pour tout $p>1$.

Pour $q=1$ et en utilisant (2) et (9), la suite (6) devient :

$$(10)\qquad 0\to H^1(\dot{X}^2;\mathcal{F})\to\bigoplus\frac{G_{i_0i_1}}{G_0^1+G_1^1}\xrightarrow{\delta^1}\bigoplus G_{i_0i_1i_2}\to H^2(\dot{X}^2;\mathcal{F})\to 0,$$

et l'opérateur δ est donné en degré 1 par la formule :

$$\delta^1((\tilde{g}_{i_0i_1}))=(f_{i_0i_1i_2}^{i_0i_1}(g_{i_0i_1})-f_{i_0i_1i_2}^{i_0i_2}(g_{i_0i_2})+f_{i_0i_1i_2}^{i_1i_2}(g_{i_1i_2}))$$

où $0\leq i_0<i_1<i_2\leq n$ et $g_{i_0\ldots i_q}$ est l'image de $g_{i_0\ldots i_q}\in G_{i_0\ldots i_q}$ dans $\dfrac{G_{i_0\ldots i_q}}{G_0^q+\ldots+G_q^q}$.

En vertu de (3) et (5) on obtient de (10) les formules suivantes :

$$(11)\qquad \begin{aligned}&H^1(X;\mathcal{F})\cong H^1(\mathrm{Fr}X;\mathcal{F})\cong\ldots\cong H^1(\dot{X}^2;\mathcal{F})\cong\operatorname{Ker}\delta^1=\\&=\left\{(\tilde{g}_{i_0i_1})\in\bigoplus\frac{G_{i_0i_1}}{G_0^1+G_1^1}\,\middle|\,f_{i_0i_1i_2}^{i_0i_1}(g_{i_0i_1})-f_{i_0i_1i_2}^{i_0i_2}(g_{i_0i_2})+f_{i_0i_1i_2}^{i_1i_2}(g_{i_1i_2})\right\}=0\end{aligned}$$

$$(12)\qquad H^2(\dot{X}^2;\mathcal{F})\cong\bigoplus_{0\leq i_0<i_1<i_2\leq n}\frac{G_{i_0i_1i_2}}{G_0^2+G_1^2+G_2^2};$$

et $H^p(\dot{X}^2;\mathcal{F})=0$ pour tout $p>2$.

D'une manière toute à fait analogue on obtient pour $q=2,3,\ldots,n-2$ les formules suivantes :

$$(13)\qquad \begin{aligned}H^q(X;\mathcal{F})\cong\Bigg\{(\tilde{g}_{i_0\ldots i_q})\in\bigoplus_{0\leq i_0<\ldots<i_q\leq n}\frac{G_{i_0\ldots i_q}}{G_0^q+\ldots+G_q^q}\,\Bigg|\\ \sum_{p=0}^{q+1}(-1)^p f_{i_0\ldots\hat{i}_p\ldots i_{q+1}}^{i_0\ldots\hat{i}_p\ldots i_{q+1}}(g_{i_0\ldots\hat{i}_p\ldots i_{q+1}})\Bigg\}=0;\end{aligned}$$

$$(14)\qquad H^{q-1}(\dot{X}^{q+1},\mathcal{F})\cong\bigoplus_{0\leq i_0<\ldots<i_{q+1}\leq n}\frac{G_{i_0\ldots i_{q+1}}}{G_0^{q+1}+\ldots+G_{q+1}^{q+1}};$$

En appliquant (14) pour $q=n-2$, la suite exacte (4) devient :

$$(15)\qquad 0\to H^{n-1}(X;\mathcal{F})\to\bigoplus\frac{G_{i_0\ldots i_{n-1}}}{G_0^{n-1}+\ldots+G_{n-1}^{n-1}}\xrightarrow{\delta^{n-1}}G_{01\ldots n}\to H^n(X;\mathcal{F})\to 0$$

et l'opérateur δ est donné par la relation :

$$\delta^{n-1}((g_{i_0\ldots i_{n-1}}))=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p f_{01\ldots\hat{p}\ldots n}^{0\ldots\hat{p}\ldots n}(g_{0\ldots\hat{p}\ldots n}).$$

On en déduit que :

$$H^{n-1}(X;\mathcal{F}) \cong \left\{ (\tilde{g}_{i_0\cdots i_{n-1}}) \;\middle|\; \sum_{p=0}^{n} (-1)^p f^{0\cdots\hat{p}\cdots n}_{01\cdots n}(g_{0\cdots\hat{p}\cdots n}) = 0 \right\} \tag{16}$$

$$H^n(X;\mathcal{F}) \cong \operatorname{Im} \delta^{n-1} = \frac{G_{01\cdots n}}{G_0^n + \ldots + G_n^n} \tag{17}$$

Les considérations précédentes démontrent le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Les groupes de cohomologie d'un simplexe euclidien X de dimension n, à valeurs dans un faisceau cellulaire simple $\mathcal{F}$, sont donnés par les formules :*

$$H^q(X;\mathcal{F}) = \left\{ (\tilde{g}_{i_0\cdots i_q}) \in \bigoplus_{0\leq i_0<\cdots<i_q\leq n} \frac{G_{i_0\cdots i_q}}{G_0^q + \ldots + G_q^q} \;\middle|\; \sum_{p=0}^{q+1} (-1)^p f^{i_0\cdots\hat{i}_p\cdots i_{q+1}}_{i_0\cdots\cdots i_{q+1}} (g_{i_0\cdots\hat{i}_p\cdots i_{q+1}}) = 0 \right\} \tag{18}$$

pour $q=0,1,\ldots,n$ et ils sont nuls pour tout $q>n$.

Remarque 2.2. Si les homomorphismes $f^{i_0\cdots\hat{i}_p\cdots i_q}_{i_0\cdots i_q}$ sont injectifs (situation que l'on rencontre dans [2] et [3]), les formules (18) deviennent beaucoup plus simples : $H^0(X;\mathcal{F}) = \bigcap_{i=0}^{n} G_i$;

$$H^q(X;\mathcal{F}) = \frac{G_{01\cdots n}}{G_{12\cdots n} + G_{02\cdots n} + \ldots + G_{01\cdots n-1}},$$

et dans $H^q(X;\mathcal{F})$ (pour $q=1,2,\ldots,n-1$) parmi les C_{n+1}^{q+2} relations de la forme : $\sum_{p=0}^{q+1}(-1)^p g_{i_0\cdots\hat{i}_p\cdots i_{q+1}} = 0$ seulement C_n^{q+1} relations sont indépendantes ; il suit que parmi les C_{n+1}^{q+1} facteurs de $H^q(X;\mathcal{F})$ on considère uniquement $C_n^q (= (C_{n+1}^{q+1} - C_n^{q+1})$ facteurs qui remplissent les C_n^{q+1} relations indépendantes.

Pour les simplexes euclidiens de dimension 1, 2, et 3 on retrouve les résultats obtenus dans [3].

BIBLIOGRAPHIE

1. Bredon G. — *Sheaf theory*, Mc. Graw-Hill Book Company 1967
2. Costinescu C.N. — *Sirul spectral Atiyah-Hirzebruch în K_0-teorie și aplicații*, St. cerc. mat., 27,4 (1975) 425—442
3. Costinescu C.N. — *Contribuții în topologia algebrică. Sirul spectral Atiyah-Hirzebruch și K-teorie*, Thèse de doctorat, 1982, Bucureşti
4. Dogaru O. — *Fascicule celular simple*, St. cerc. mat., 27,5 (1975), 535—545
5. Godement R. — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958
6. Miron R., Pop I. — *Topologie algebrică*, Ed. Acad. R.S.R. Bucureşti, 1974
7. Spanier E. — *Algebraic topology*, Mc. Graw-Hill New York 1966

Recu le 29. I 1983

Departement de Mathématiques
Institut de Constructions
Bucarest

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXX, s. I a, 1984, f. 1

SEMI-INVARIANT SUBMANIFOLDS OF $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-MANIFOLDS

BY

DOMINGO CHINEA

In [2] D. E. Blair, G. D. Ludden and K. Yano gave conditions for a semiinvariant submanifold of a complex manifold to be normal, and in [3] we studied the case of semi-invariant submanifolds of a quasi Kaehlerian manifold.

The purpose of this paper is to study semi-invariant submanifolds of manifolds in the classes, W_4, $W_1 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_4$ and $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, [5]. First of all we recall in §1 the definition and properties of a semiinvariant submanifold of an almost complex manifold and give some relations among different elements associated to the structures defined in the manifold and in the submanifold. In §2 we study different types of almost contact metric structures which are induced in a semi-invariant submanifold by the different types of almost Hermitian structures above. For that, we use the Gray-Hervella's classification of almost Hermitian manifolds [5] and the classification obtained by J. A. Oubiña [7] for almost contact structures.

I wish to express my hearty thanks to L. A. Cordero and J. A. Oubiña for several comments useful in the preparation of this paper.

1. Preliminaries. A $(2r+1)$-dimensional real differentiable manifold M of classe C^∞ is said to have a (φ, ξ, η)-structure or an almost contact structure if it admits a field φ of endomorphisms of the tangent spaces, ia vector field ξ, and a 1-form η satisfying

$$\eta(\xi) = 1, \qquad (1.1) \qquad\qquad \varphi^2 = -I + \eta \oplus \xi, \qquad (1.2)$$

where I denotes the identity transformation [8]. Then $\varphi \cdot \xi = 0$ and $\eta \cdot \varphi = 0$; moreover, the endomorphisms φ has rank $2r$, [1].

If a manifold M with a (φ, ξ, η)-structure admits a Riemannian metric g such that

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\,\eta(Y), \tag{1.3}$$

where $X, Y \in \chi M$, then M is said to have a (φ, ξ, η, g)-structure or an almost contact metric structure and g is called a compatible metric [8]. An immediate consequence is $\eta(X) = g(X, \xi)$. The 2-form Φ on M defined by

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y) \tag{1.4}$$

s called the fundamental 2-form of the almost contact metric structure.