being a homotopy inverse of $\tilde{i}$. By theorem 1 p has the WRLP w.r.t. $\tilde{i}$. Hence, in diagram (***), there exists a map $H' : X \times I \to E$ such that $p \circ H' = G$ and a fiberhomotopy $K : H' \circ \tilde{i} \underset{p}{\simeq} F$.

Define $H : X \times I \to E$ by

$$H(x, s) = \begin{cases} K(x, 0, 1-3s) & \text{for } s \in [0, 1/3] \\ H'(x, 3s-1) & \text{for } s \in [1/3, 1/2] \\ H'(x, s) & \text{for } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

An easy verification, using the semi-constancy of G, shows that $p \circ H = G$. Moreover $H(x, 0) = F(x, 0)$ and

$$H(a, s) = \begin{cases} K(a, 0, 1-3s) & \text{for } s \in [0, 1/3],\ a \in A \\ K(a, 3s-1, 0) & \text{for } s \in [1/3, 1/2],\ a \in A \\ K(a, s, 0) & \text{for } s \in [1/2, 1],\ a \in A. \end{cases}$$

Define $L : (X \times O \cup A \times I) \times I \to E$ by
$L(x, 0, t) = K(x, 0, 1) = F(x, 0)$ for $x \in X$, $t \in I$ and

$$L(a, s, t) = \begin{cases} K(a, 0, 1-3s+6st) & \text{for } a \in A,\ s \in [0, 1/3],\ t \in [0, 1/2] \\ K(a, 3s-1, 2t) & \text{for } a \in A,\ s \in [1/3, 1/2],\ t \in [0, 1/2] \\ K(a, s, 2t) & \text{for } a \in A,\ s \in [1/2, 1],\ t \in [0, 1/2] \\ K(a, 0, 1) & \text{for } a \in A,\ s \in [0, 1/3(2-2t)],\ t \in [1/2, 1] \\ K\left(a, \dfrac{3s+2t-2}{4t-1}, 1\right) & \text{for } a \in A,\ s \in [1/3(2-2t), 1/2],\ t \in [1/2, 1] \\ K(a, s, 1) & \text{for } a \in A,\ s \in [1/2, 1] \text{ and } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

(Continuity verifications are left to the reader).

One verifies easily (using again the semi-constancy of G) that $L : H \circ \tilde{i} \underset{p}{\simeq} F$, rel $X \times O$. Hence p has the WLHEP w.r.t. i.

"$\Rightarrow$": The WLHEP of p w.r.t. $i : \varnothing \to X$, combined with theorem [1] (6.12), ensures that $p \in \mathbf{G}$.

Remark. If we drop the semi-constancy of G in the definition of the WLHEP, we obtain a characterization of the class of (Hurewicz) fibrations. This can be proved using the RLP of A. Strøm [3].

REFERENCES

1. Diek, Tom T., Kamps, K. H. und Puppe, D. — *Homotopietheorie*, Lecture Notes in Math. 157, Springer-Verlag, Berlin 1970.
2. Kieboom, R. W. — *Regular fibrations revisited*, Arch. Math. 45 (1985), 68 — 73.
3. Strøm, A. — *The homotopy category is a homotopy category*, Arch. Math. 23 (1972), 435 — 441.
4. Strøm, A. — *Note on cofibrations*, Math. Scand. 19 (1966), 11 — 14.

Received 16 IV 1986

Dept. of Mathematics
Vrije Universiteit Brussel
Pleinlaan 2, F 10
B — 1050 Brussel
Belgium

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXIII, s. I a, Matematică, 1987, f. 1

COURBES DANS DES ESPACES LAGRANGE GÉNÉRALISÉS

PAR

ELENA MACOVEI

H. Rund ([4] chap. V) a développée la théorie des courbes dans un espace de Finsler $F^n = (M, L)$ et il a observé que les formules de Frenet sont de la même forme que dans le cas Riemannien, mais il n'y a pas de théorème fondamental pour elles.

Cette Note contient la détermination d'un repère invariant et du système complet d'invariants, les équations fondamentales et un théorème fondamental pour des courbes dans l'espace de Lagrange généralisé.

Le problème étudié appartient à la géométrie des espaces de Lagrange [3], des espaces de Finsler [4] et à la théorie des configurations Myller dans ces espaces.

1. Soit $M^n = (M, g_{ij}(x, y))$ un espace de Lagrange généralisé où M est une variété differentiable réelle n-dimensionnelle et $g_{ij}(x, y)$ est un champ de tenseurs Lagrange du type (0,2) symétrique, non dégénéré et défini positif. En M^n il y a une seule connexion Lagrange métrique $F\Gamma = (N, F, C)$ [3], théorème 3.2) qui a les propriétés suivantes :

(1)
1. la connexion nonlinéaire N est fixée apriori dans TM,
2. les h- et v-dérrivées covariantes de g_{ij} par rapport à $F\Gamma$ sont nulles,
3. les torsions T^i_{jk} et S^i_{jk} de $F\Gamma$ sont identiquement nulles.

Si $(\bar{C})$ est une courbe donnée sur la variété M par $x^i = x^i(t)$, $t \in (a, b)$ alors, on peut considérer une courbe (C) de TM^n ayant les équations

$$x^i = x^i(t), \quad y^i = y^i(t), \quad t \in (a, b), \tag{2}$$

qui a la propriété d'être projétée sur la courbe $(\bar{C})$ de M. Dans ces équations $y(y^i(t))$ est l'élément support de l'espace M^n.

Le carré de l'élément d'arc de la courbe (C) est défini par :

$$ds^2(t) = g_{ij}(x(t), y(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} dt^2$$

et la longueur de la courbe (C) est donnée par :

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(x(t), y(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt, \quad (t_0, t_1) \subseteq (a, b). \tag{3}$$

Considérons la longueur de l'arc s comme paramètre sur la courbe (C). Par conséquant, on peut admettre pour la courbe (C) la représentation suivante :

$$x^i = x^i(s), \qquad y^i = y^i(s) \qquad s \in (s_1, s_2) \subseteq R. \tag{4}$$

Notons par $\xi_1^i(s) = dx^i/ds$ le champ des vecteurs tangents à la courbe (C). De la définition de l'arc, par (3) et des propriétés du champ de tenseurs $g_{ij}(x(s), y(s))$ il résulte que $\xi_1^i(s)$ est un champ de vecteurs unitaires sur (C). On a :

$$g_{ij}(x(s), y(s))\xi_1^i(s)\xi_1^j(s) = 1, \quad s \in (s_1, s_2), \tag{5}$$

et la dérivée covariante, par rapport à $F\Gamma$ de cette relation est :

$$g_{ij}(x(s), y(s))\, \xi_1^i(s)\, \frac{D\xi_1^j(s)}{ds} = 0. \tag{6}$$

La relation (6) montre que le vecteur $D\xi_1^j/ds$ est orthogonal à $\xi_1^i(s)$ dans les points de la courbe (C). De même, on observe que $D\xi_1^i(s)/ds$ a un caractère géométrique sur la courbe (C). Nous allons définir, en général par récurrence, les champs des vecteurs :

$$\xi_p^i(s) = \frac{D\xi_{p-1}^i(s)}{ds}, \quad p = 2, \ldots, n-1; \quad s \in (s_1, s_2). \tag{7}$$

On voit aisément que l'espace linéaire $[\xi_1^i, \ldots, \xi_p^i]$ $(p = 2, \ldots, n-1)$ a un caractère géométrique sur la courbe (C).

Si l'on suppose que $\xi_1^i(s), \ldots, \xi_{n-1}^i(s)$ sont linéairement indépendants dans les points de la courbe (C), alors il existe un $\xi_n^i(s)$ perpendiculaire sur l'espace linéaire $[\xi_1^i, \ldots, \xi_{n-1}^i]$. La famille $(\xi_1^{in}, \ldots, \xi_{n-1}^i, \xi_n^i)$ est formée par n champs de vecteurs linéairement indépendants dans les points de la courbe (C).

On peut construire une base orthonormée dans chaque point de la courbe (C) du système de vecteurs linéairement indépendants $(\xi_1^i, \ldots, \xi_n^i)$ et notamment, en prenant :

$$\alpha_1^i(x(s), y(s)) = \xi_1^i(s), \tag{8}$$

$$\alpha_p^i(x(s), y(s)) = \frac{1}{\sqrt{D_{p-1} D_p}} \begin{vmatrix} <1, 1> \ldots <1, p-1> & \xi_1^i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ <p, 1> \ldots <p, p-1> & \xi_p^i \end{vmatrix},$$

$$(p = 2, \ldots, n)$$

où

$$D_0 = 1, \quad D_p = \begin{vmatrix} <1, 1> \ldots <1, p> \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ <p, 1> \ldots <p, p> \end{vmatrix},$$

$$<p, q> = g_{ij}(x(s), y(s))\, \xi_p^i(s)\, \xi_p^j(s) \qquad (p, q = 2, \ldots, n). \tag{9}$$

On a la :

Proposition. *La famille des champs de vecteurs* $(\alpha_p^i(s))$ *définis par* (8) *et* (9) *possède les propriétés suivantes :*

1. *Le système de vecteurs* $(\alpha_1^i(s), \ldots, \alpha_n^i(s))$ *est une famille orthonormée dans les points de la courbe* (C).

2. *Le système de vecteurs* $(\alpha_1^i(s), \ldots, \alpha_n^i(s))$ *détermine un repère orthonormé invariant sur la courbe* (C).

Démonstration. Des formules de définition (8) on déduit, que pour $\forall p, q$ avec $p, q = 1, 2, \ldots, n$ on a :

$$\alpha_p^i(s) = a^1(s)\, \xi_1^i(s) + \ldots + a^p(s)\, \xi_p^i(s), \qquad s \in (s_1, s_2)$$

$$\alpha_q^i(s) = b^1(s)\, \xi_1^i(s) + \ldots + b^q(s)\, \xi_q^i(s), \tag{10}$$

et alors : $<\alpha_p^i, \alpha_q^j> = g_{ij}\alpha_p^i\alpha_q^j = g_{ij}\left(\sum_{\lambda=1}^{p} a^\lambda \xi_\lambda^i\right)\left(\sum_{\mu=1}^{q} b^\mu \xi_\mu^j\right) = \sum_{\lambda=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{q} a^\lambda b^\mu <\lambda, \mu>.$

Si $q < p$ alors $<\alpha_p^i, \alpha_q^j> = \sum_{\mu=1}^{q} b^\mu\left(\sum_{\lambda=1}^{p} a^\lambda <\lambda, \mu>\right) = 0$, parce que, par consruction on a dans ce cas $<\lambda, \mu> = 0$. De même, si $p < q$ on a : $<\alpha_p^i, \alpha_q^j> = \sum_{\lambda=1}^{p} a^\lambda\left(\sum_{\mu=1}^{q} b^\mu <\lambda, \mu>\right) = 0$. Dans le cas $p = q$ on montre, par calcul direct, en utilisant les formules (8) et (9), qu'on obtient $<\alpha_p^i, \alpha_q^j> = 1$. Il suit que $(\alpha_1^i(s), \ldots, \alpha_n^i(s))$ est une famille orthonormée dans les points de la courbe (C).

Les vecteurs de la famille $(\alpha_p^i(s))$ $(p = 1, \ldots, n)$ ont un caractère géométrique dans les points de la courbe (C), car dans nos conditions, le procédé utilisé dans la normalisation des vecteurs du système $(\alpha_p^i(s))$ a un caractère géométrique. La famille $(\alpha_p^i(s))$ détermine alors un repère orthonormé invariant sur la courbe (C).

La dérivation covariante par rapport à la connexion Lagrange métrique $F\Gamma$ appliquée aux vecteurs de la famille orthonormée $(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$ dans les points de la courbe (C) nous aide de trouver les formules de Frénet pour la courbe (C) de M^n.

Pour $\alpha_1^i(s) = \xi_1^i(s)$ de (5) il résulte que $g_{ij}\alpha_1^i D\alpha_1^j/ds = 0$, donc $D\alpha_1^i/ds$ est orthogonal à α_1^i dans les points de la courbe (C). D'autre part $D\alpha_1^i/ds = D\xi_1^i/ds = \xi_2^i$ et de (8) pour $p = 2$, l'on a $\xi_2^i = \sqrt{D_1 D_2}\,\alpha_1^i = [\sqrt{D_0 D_2}/D_1]\, \alpha_2^i (D_0 = D_1 = 1)$. En notant $\varkappa_1(s) = [\sqrt{D_0 D_2}/D_1] \geq 0$ on obtient la formule :

$$\frac{D\alpha_1^i}{ds} = \varkappa_1 \alpha_2^i, \quad \varkappa_1 = \frac{D_0 D_2}{D_1}. \tag{11}$$

Si $\varkappa_1(s) \neq 0$, $\forall s \in (s_1, s_2)$ on applique la dérivée covariante au vecteur α_2^i qui a les propriétés : $g_{ij}\alpha_1^i\alpha_2^j = 0$, $g_{ij}\alpha_2^i\alpha_2^j = 1$. De ces relations par la dérivée covariante par rapport à $F\Gamma$ et en utilisant (11) il résulte que :

$$g_{ij}\alpha_1^i \frac{D\alpha_2^j}{ds} = -g_{ij}\frac{D\alpha_1^i}{ds}\alpha_2^j = -\varkappa_1, \quad g_{ij}\frac{D\alpha_2^i}{ds}\alpha_2^j = 0,$$

qui exprime le fait que le vecteur $\mu_2^i = D\alpha_2^i/ds + \varkappa_1\alpha_1^i$ est normal à la famille (α_1^i, α_2^i) dans les points de la courbe (C). En notant $\mu_2^i = \varkappa_2(s)\,\alpha_3^i(s)$, où α_3^i est, par construction, un vecteur unitaire et normal à la famille (α_1^i, α_2^i), on obtient la formule :

$$\frac{D\alpha_2^i}{ds} = -\varkappa_1\alpha_1^i + \varkappa_2\alpha_3^i;\ \varkappa_2 = \frac{\sqrt{D_1 D_3}}{D_2} \geqslant 0 \tag{12}$$

où l'expression de $\varkappa_2(s)$ est déduite par cal ul direct.

Par induction, on montre que :

$$\frac{D\alpha_p^i}{ds} = -\varkappa_{p-1}\alpha_{p-1}^i + \varkappa_p\alpha_{p+1}^i,$$

$$\varkappa_p = \frac{\sqrt{D_{p-1}D_{p+1}}}{D_p}\ (\varkappa_0 = 0,\ \varkappa_n = 0), \tag{13}$$

où $\varkappa_1 > 0, \ldots, \varkappa_{n-2} > 0$ et $\varkappa_{n-1}$ a le signe précisé par la convention que la n-uple orthonormée $(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$ soit positivement orientée.

La famille $(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$ définit un repère orthonormé invariant et positivement orienté associé à la courbe (C) qui est le repère de Frenet. Les formules (13) sont les formules de Frenet pour la courbe (C) de l'espace de Lagrange généralisé M^n, et les invariants $\varkappa_p(s)$ $(p = 1, \ldots, n)$ sont les courbures $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-2}$ et la torsion $\varkappa_{n-1}$ de la courbe (C).

Les équations fondamentales de la courbe (C) de l'espace Lagrange généralisé $M^n = (M, g_{ij}(x, y))$ sont :

$$\frac{dx^i}{ds} = \alpha_1^i\,(x(s),\ y(s)),$$

$$\frac{D\alpha_p^i(s)}{ds} = -\varkappa_{p-1}\alpha_{p-1}^i + \varkappa_p\alpha_{p+1}^i,\ (p = 1, \ldots, n), \tag{14}$$

où

$$\varkappa_p = \frac{\sqrt{D_{p-1}D_{p+1}}}{D_p}\ (D_0 = 1,\ D_1 = 1)\ (p = 1, \ldots, n), \tag{15}$$

$$\varkappa_0 = 0,\ \varkappa_n = 0,\ \varkappa_1 > 0, \ldots, \varkappa_{n-2} > 0.$$

On obtient le :

Théorème 1. *On peut associer d'une manière unique un repère orthonormé invariant positivement orienté* $\mathcal{R} = ((x^i(s),\ y^i(s))\ ;\ \alpha_1^i(s), \ldots, \alpha_n^i(s))$ *et un système d'invariants* $(\varkappa_1(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s))$ *qui vérifient les équations* (14) *et les conditions* (15), *à toute courbe* (C) *de l'espace Lagrange généralisé* $M^n = (M, g_{ij}(x, y))$ *où est donnée la connexion Lagrange métrique* $F\Gamma$.

2. Un théorème réciproque, qui est fondamental pour l'existence de la courbe (C) de $M^n = (M, g_{ij}(x, y))$ est obtenu lorsqu'on donne l'élément de support $y(y^i(s))$ et les invariants $\varkappa_p(s)$ $(p = 1, \ldots, n-1)$.

Théorème 2. (Théorème fondamental). *Soit* $M^n = (M, g_{ij}(x, y))$ *un espace Lagrange généralisé où l'on fixe une connexion Lagrange métrique* $F\Gamma = (N, F, C)$. *Si l'on donne :*

1. *les fonctions* $y^i(s) \in C^1((s_1, s_2))$,

2. *les fonctions* $\varkappa_p(s) \in C^0((s_1, s_2))$ *et* $\varkappa_1 > 0, \ldots, \varkappa_{n-2} > 0$ $(p = 1, \ldots, n\ ;\ \varkappa_n = 0)$,

3. $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i$ *dans le point* $(x_0^i,\ y_0^i = y^i(s_0))$ *avec* $s_0 \in (s_1, s_2)$ *tel que* $\mathcal{R}_0 = ((x_0^i, y_0^i)\ ;\ \alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$ *soit un repère orthonormé orienté positivement, alors il existe, au moins, un voisinage ouvert* $V \in \mathcal{O}(s_0)$, *un seul arc de courbe* (C) *dans* M^n *donné par* $x^i = x^i(s)$, $y^i = y^i(s)$, $s \in V$ *et une seule famille orthonormée de repères* $(\alpha_1^i(s), \ldots, \alpha_n^i(s))$ *sur* (C) *avec la propriété que* (C) *a comme invariants les fonctions données* $\varkappa_1(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s)$ *et sont satisfaites les conditions initiales suivantes :*

$$x^i(s_0) = x_0^i,\ \alpha_1^i(s_0) = \alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i(s_0) = \alpha_n^i. \tag{16}$$

Démonstration. Pour tout champ de vecteurs $X(X^i(x, y))$ de $M^n = (M, g_{ij}(x, y))$ la différentielle covariante par rapport à la connexion Lagrange métrique $F\Gamma$ et donnée par :

$$DX^i = X^i{}_{|k}\,dx^k + X^i{}_{|k}\,\delta y^k = dX^i + \Gamma_{jk}^i X^j\,dx^k + C_{jk}^i X^j dy^k \tag{17}$$

et nous allons utiliser cette formule pour exprimer les dérivées covariantes $D\alpha_p^i/ds$ de (14). De la relation (14) l'on déduit un système de la forme :

$$\frac{dx^i}{ds} = \alpha_1^i,$$

$$\frac{d\alpha_p^i}{ds} = -\varkappa_{p-1}\alpha_p^i + \varkappa_p\alpha_{p+1}^i - \Gamma_{jk}^i\alpha_p^j\frac{dx^k}{ds} - C_{jk}^i\alpha_p^j\frac{dy^k}{ds}, \tag{18}$$

$$p = 1, \ldots, n\ ;\ \varkappa_0 = 0,\ \varkappa_n = 0.$$

Dans les hypothèses du théorème 2, le système d'équations (18) est un système linéaire d'équations différentielles ordinaires et normal, par rapport aux inconnues : $x^i(s)$, $\alpha_p^i(s)$. On peut appliquer à ce système le théorème d'existence et d'unicité de la solution pour des systèmes d'équations différentielles ordinaires, linéaires et normales. Selon ce théorème, il y a une seule solution $(x^i(s),\ \alpha_p^i(s))$ où $s \in V \subseteq (s_1, s_2)$ avec la propriété que pour $s = s_0$ les conditions initiales (16) sont vérifiées. Dans l'espace Lagrange généralisé $M^n = (M, g_{ij})$ il existe alors un seul arc de courbe (C) sur V donné par la solution $x^i = x^i(s)$ et les fonctions $y^i = y^i(s)$. On démontre maintenant, par le procédé classique connu, que la solution $(\alpha_p^i(s))$ $(p = 1, \ldots, n)$ détermine le repère invariant orthonormée de la courbe (C) et que (C) admet comme invariants les fonctions données $\varkappa_1(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s)$. Le théorème 2 est complétement démonstré.

Remarques 1. Si $g_{ij}(x(s),\ y(s))$ est 0-homogène par rapport à $y^i(s)$ alors les considérations du théorème 2 peuvent être modifiées en ajoutant au système (14) et les équations :

$$\frac{\delta y^i}{ds} = b^i(s)\,\alpha_1^i + b^2(s)\,\alpha_2^i + \ldots + b^n(s)\,\alpha_n^i. \tag{19}$$

2. Pour des valeurs particulières des invariants $\varkappa_p$ $(p = 1, \ldots, n)$ on peut obtenir des classes de courbes particulières de l'espace Lagrange généralisé, $M^n = (M, g_{ij}(x, y))$.

3. Si $g_{ij}(x, y)=(1/2)\,[\partial^2 L/\partial y^i \partial y^j]^2$, où $L^n=(M, L)$ est un espace Lagrange alors nous avons la théorie des courbes de L^n. En particulier, lorsque $L(x, y)$ est un lagrangien homogène, nous obtenons la théorie des courbes dans les espaces Finsler F^n([4]).

4. Le théorème fondamental démonstré pour le cas de l'espace Lagrange généralisé $M^n=(M, g_{ij}(x, y))$ n'a pas été démonstré jusqu'ici ni dans le cas classique (M, L) ([3]), ni pour les espaces classiques Finsler ([4]).

BIBLIOGRAPHIE

1. Miron, R. — *Introduction of the theory of Finsler spaces*, The Proc. of the National Seminar of Finsler Spaces, Brașov, February, 1980).
2. Miron, R. — *A nonstandard theory of hypersurfaces in Finsler spaces*, An. și. Univ. „Al. I. Cuza" Iași s. I. a, tom XXX, (5) (1984), 35 — 53.
3. Miron, R. — *A Lagrangian theory of relativity*, Seminarul de Geometrie și Topologie, Univ. din Timișoara, Facultatea de Științe ale Naturii, 1985.
4. Rund, H. — *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.

Reçu le 15 III 1986

Faculté de Mathématique
Université d'Iași
6 600 — IAȘI, România

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XXXIII, s. I a, Matematică, 1987, f. 1

THE INTRINSIC GAUSS AND CODAZZI EQUATIONS FOR THE CARTAN CONNECTION AND THEIR APPLICATIONS

BY

MASAKI FUKUI

Recently, M. Matsumoto developed a systematic theory of Finsler hypersurfaces in [10]. His theory is based on a Finsler connection on the ambient space and the induced connection. And R. Miron found a new method which is based on an intrinsic Finsler connection in a hypersurface and its lifted connection in the ambient space [11]. In the present paper we will set up the direct relation between the Cartan connection in the ambient space and the intrinsic Cartan connection in a hypersurface, especially Grauss and Codazzi equations.

The other purpose of the present paper is a generalization of a concept „totally umbilic" in the Riemannian geometry. And we will examine what properties can be inherited to a „totally umbilic" hypersurface. We need intrinsic Grauss and Codazzi equations because many geometrical properties of a Finsler space are expressed by the Cartan connection. The author wishes to express his sincere gratitude to Professor M. Matsumoto for his valuable suggestions and encouragement.

§ 1. **The intrinsic Gauss and Codazzi equations.** Let $F^n=(M^n, L(x, y))$ be an n-dimensional Finsler space, where M^n is an underlying manifold and L is a fundamental function. We put

$$l_i=\dot\partial_i L,\ g_{ij}=\dot\partial_i\dot\partial_j L^2/2,\ h_{ij}=g_{ij}-l_i l_j,\ C_{ijk}=\dot\partial_k g_{ij}/2, \tag{1.1}$$

where $\dot\partial_i=\partial/\partial y^i$ and indices $i, j, \ldots$ run over the range $1, 2, \ldots, n$. Let a hypersurface M^{n-1} of M^n be given by $x^i=x^i(u^\alpha)$. We put

$$B^i_\alpha=\partial x^i/\partial u^\alpha,\quad B^i_{\alpha\beta}=\partial_\beta B^i_\alpha,\quad B^{ij\ldots}_{\alpha\beta\ldots}=B^i_\alpha B^j_\beta\ldots, \tag{1.2}$$

where Greek indices $\alpha, \beta, \ldots$ run over the range $1, 2, \ldots, n-1$. In the hypersurface theory, the supporting element y^i is assumed to be tangent to M^{n-1}, so that we may write

$$y^i(u, v)=B^i_\alpha(u)v^\alpha. \tag{1.3}$$

Then the function $L(u, v)=L(x(u), y(u, v))$ gives rise to a fundamental function of M^{n-1} and we get a Finsler hypersurface $F^{n-1}=(M^{n-1}, L(u, v))$, where $L(u, v)$ may be written as merely $L(u, v)$ in the sequel. We have easily

$$l_\alpha=l_i B^i_\alpha,\quad g_{\alpha\beta}=g_{ij}B^{ij}_{\alpha\beta},\quad h_{\alpha\beta}=h_{ij}B^{ij}_{\alpha\beta},\quad C_{\alpha\beta\gamma}=C_{ijk}B^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}. \tag{1.4}$$