ANALELE STIINTIFICE ALE UNIVERSITATII "AL.I.CUZA" IASI
Tomul XXXIX, s.I.a, Matematica, 1993, f1

STRATÉGIES ENTROPIQUE-OPTIMALES UTILES

PAR

ION PURCARU

1. Introduction. On considére un certain jeu à n partenaires (P_i), $i = \overline{1,n}$ et on suppose qu'à un moment donné le joueur P_i peut choisir un coup $d_i^{k_i}$ à la probabilité $p(d_i^{k_i})$, $k_i = \overline{1,m_i}$, $i = \overline{1,n}$. L'ensemble des coups dont il dispose ainsi que leurs probabilités représentent la stratégie du joueur P_i et elle peut - être écrite comme une variable aléatoire D_i dont les valeurs sont $d_i^{k_i}$ et leurs probabilités sont $p(d_i^{k_i})$ ci-dessus données. Par conséquent, un coup effectué à un moment donné, successivement, par tous les n partenaires peut - être représenté par le vecteur aléatoire $(d_j^{k_j})$ à la probabilité $p((d_j^{k_j}))$, $j = \overline{1,n}$.

Dénotons maintenant par $u_i((d_j^{k_j})_{j=1}^n) > 0$ l'utilité individuelle du joueur P_i et par $c_i((d_j^{k_j})_{j=1}^n)$ le gain individuel du joueur P_i corréspondantes au coup vectoriel considéré par

$$u_i(d_i^{k_i}) = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n} \sum_{k_s=1}^{m_s} u_i(d_1^{k_1},\dots,d_n^{k_n}) \cdot \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p(d_j^{k_j}) \tag{1}$$

l'utilité moyenne du coup $d_i^{k_i}$;

$$c_i(d_i^{k_i}) = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n} \sum_{k_s=1}^{m_s} c_i(d_1^{k_1},\dots,d_n^{k_n}) \cdot \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p(d_j^{k_j}) \tag{2}$$

le gain moyen du joueur P_i obtenu par le choix du coup $d_i^{k_i}$;

$$v_i(d_i^{k_i}) = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n} \sum_{k_s=1}^{m_s} u_i(d_1^{k_1},\dots,d_n^{k_n}) c_i(d_1^{k_1},\dots,d_n^{k_n}) \cdot \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p(d_j^{k_j}) \tag{3}$$

le gain moyen utile du joueur P_i obtenu par le choix du coup $d_i^{k_i}$;

$$U(P_i) = \sum_{k_i=1}^{m_i} u_i(d_i^{k_i})p(d_i^{k_i}) \tag{4}$$

l'utilité moyenne totale du joueur P_i;

$$C(P_i) = \sum_{k_i=1}^{m_i} c_i(d_i^{k_i})p(d_i^{k_i}) \tag{5}$$

le gain moyen total du joueur P_i;

$$V(P_i; u_i) = \sum_{k_i=1}^{m_i} v_i(d_i^{k_i})p(d_i^{k_i}) \tag{6}$$

le gain moyen utile total du joueur P_i;

$$G(P_i; u_i) = -\sum_{k_i=1}^{m_i} u_i(d_i^{k_i})p(d_i^{k_i}) \ln\ p(d_i^{k_i}) \tag{7}$$

la quantité moyenne d'information utile (ou l'entropie pondéré) de P_i et par

$$B(P_i) = U(P_i) + G(P_i; u_i) \tag{8}$$

le bénéfice total moyen utile mixte du joueur P_i obtenu par le choix de la stratégie D_i, $i = \overline{1,n}$.

Remarque. On observe que si $u_i((d_j^{k_j})_{j=1}^n) = 1$, $k_j = \overline{1,m_j}$, $j = \overline{1,n}$, alors on a l'entropie de Shannon en (7) et (8) tandis que les expressions (5) et (6) coïncident.

2. Stratégies entropique-optimales utiles. On dit stratégies entropique-optimales utiles puisque pour les trouver on utilise l'entropie pondérée, soit comme fonction à maximiser sous des contraintes données, soit comme contrainte pour maximiser le gain total moyen d'un joueur.

Théorème 1. *La stratégie qui maximise le bénéfice total moyen utile mixte (8) du joueur P_i sous les contraintes*

$$\text{(9)} \qquad a)\ \sum_{k_i=1}^{m_i} p(d_i^{k_i}) = 1; \qquad b)\ V(P_i; u_i) = V_0 \ \ (fixé)$$

sera donnée par

$$p(d_i^{k_i}) = \exp\left(\frac{\alpha_i + u_i(d_i^{k_i}) + \beta_i v_i(d_i^{k_i})}{u_i(d_i^{k_i})}\right), \quad k_i = \overline{1,m_i} \tag{10}$$

où (α_i, β_i) est la solution unique du systéme obtenu par le remplacement de (10) en (9).

Preuve. En considérant la fonction de Lagrange

$$L(p, \alpha_i, \beta_i) = B(P_i) + \alpha_i \sum_{k_i=1}^{m_i} p(d_i^{k_i}) + \beta_i V(P_i; u_i)$$

dont l'expression peut être mise sous la forme

$$L(p, \alpha_i, \beta_i) = \sum_{k_i=1}^{m_i} p(d_i^{k_i}) \ln\left[(p(d_i^{k_i}))^{-u_i(d_i^{k_i})} \cdot \exp(u_i(d_i^{k_i}) + \alpha_i + \beta_i v_i(d_i^{k_i}))\right]$$

et sachant que $\ln\ x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$ avec égalité si et seulement si $x = 1$, on trouve la relation (10) et puis le système dont la solution unique (α_i, β_i) nous interesse et l'affirmation du théorème est vérifiée.

Remarque 1. Si la contrainte b) de (9) sera fixée sur l'expression (5) on peut donner un résultat analogue avec celui du théorème, cas dans lequel on remplace $v_i(d_i^{k_i})$ par $c_i(d_i^{k_i})$ en (10).

Remarque 2. Si $u_i(d_i^{k_i}) = 1$, $k_i = \overline{1,m_i}$, et si la contrainte b) n'existe pas, alors le joueur P_i va adopter une stratégie uniforme, c'est-à-dire,

$$p(d_i^{k_i}) = \frac{1}{m_i}, \quad k_i = \overline{1,m_i} \tag{11}$$

Théorème 2. *La stratégie qui maximise le gain moyen utile (6) du joueur P_i sous les contraintes*

$$\text{(12)} \qquad a)\ \sum_{k_i=1}^{m_i} p(d_i^{k_i}) = 1; \qquad b)\ B(P_i) = B_0 \ \ (fixé)$$

sera donnée par

$$p(d_i^{k_i}) = \exp\left(\frac{\alpha_i + \beta_i u_i(d_i^{k_i}) + v_i(d_i^{k_i})}{\beta_i u_i(d_i^{k_i})}\right), \quad k_i = \overline{1,m_i} \tag{13}$$

où (α_i, β_i) est la solution unique du systéme obtenu en remplacant (13) en (12).

Preuve. Cette fois on considére la fonction de Lagrange

$$L(p, \alpha_i, \beta_i) = C(P_i) + \alpha_i \sum_{k_i=1}^{m_i} p(d_i^{k_i}) + \beta_i B(P_i)$$

et en procédant comme pour le Théorème 1 on trouve (13) et l'affirmation du théorème sera vérifiée.

Remarque 1. Si la contrainte b) de (12) sera donnée sur l'expression (7) on va trouver un résultat analogue aux relations (13), c'est-à-dire

$$p(d_i^{k_i}) = \exp\left(\frac{\alpha_i + v_i(d_i^{k_i})}{\beta_i u_i(d_i^{k_i})}\right), \quad k_i = \overline{1, m_i}. \tag{14}$$

Remarque 2. Si $u_i(d_i^{k_i}) = 1$, $k_i = \overline{1, m_i}$, alors on va trouver

$$p(d_i^{k_i}) = \exp\left\{\frac{\alpha_i + \beta_i + v_i(d_i^{k_i})}{\beta_i}\right\}, \quad k_i = \overline{1, m_i}.$$

Remarque 3. Si on maximise le gain moyen (5) sous les contraintes (12) on va obtenir de même les relations (13) en remplacant $v_i(d_i^{k_i})$ par $c_i(d_i^{k_i})$.

Théorème 3. *La stratégie qui maximise la quantité moyenne d'information utile (7) sous les contraintes*

$$a) \sum_{k_i=1}^{m_i} p(d_i^{k_i}) = 1; \; b) \; U(P_i) = U_0; \quad c) \; V(P_i, u_i) = V_0 \tag{15}$$

sera donnée par

$$p(d_i^{k_i}) = \exp\left(\frac{\alpha_i + \beta_i u_i(d_i^{k_i}) + \gamma_i v_i(d_i^{k_i})}{u_i(d_i^{k_i})}\right), \quad k_i = \overline{1, m_i} \tag{16}$$

où $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ est la solution unique du système obtenu par l'introduction de (16) en (15).

Preuve. On considére la fonction de Lagrange

$$L(p, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = G(p, u_i) + \alpha_i \sum_{k_i=1}^{m_i} p(d_i^{k_i}) + \beta_i U(P_i) + \gamma_i V(P_i, u_i)$$

et en procédant comme ci-dessus on trouve (16) et l'affirmation du théorème sera vérifiée.

Remarque. Comme ci-dessus on peut obtenir également des cas particuliers du Théorème 3. On observe aussi que partout si on considére que $u_i(d_i^{k_i}) = 1$, $k_i = \overline{1, m_i}$, alors on utilise l'entropie de Shannon. De même, lorsqu'on utilise des autres contraintes ou des fonctions à optimiser pour le joueur P_i on peut trouver des autres stratégies optimales.

BIBLIOGRAPHIE

1. G u i a ş u, S. - *Information theory with application*, McGraw-Hill, New York (1977).
2. P u r c a r u, I. - *Informaţie şi corelaţie*. Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti (1988).

Received: 26.X.1992

Académie d'Etudes Economiques
Département de Mathématiques
Bucarest
ROUMANIE