ANALELE STIINTIFICE ALE UNIVERSITATII "AL.I.CUZA" IASI
Tomul XL, s.I.a, Matematică, 1994, f1.

LES CARACTÈRES MULTIPLICATIFS ET LA DIAGONALISATION DE LA TRANSFORMATION FOURIER SUR $L^2(\mathbf{Z}_p)$

PAR

I. BENKÖ et M. RĂDUICĂ

A. En [1], L. Auslander affirme: "I became interested in the study of finite Fourier transform because I needed to know the eigenvalues of the finite Fourier transform. This arose in the study of multiplicity of the regular representation of a solvmanifold".

En [2] on obtient pour la transformation Fourier finie une représentation matricielle quasi - diagonale avec des blocs d'ordre 1 et 2, de laquelle (en comparent la trace et le déterminant) il resulte la somme célèbre de Gauss

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{k=0}^{p-1} exp\,(2\pi i k^2/p) = \begin{cases} 1, & p \equiv 1\ (mod 4) \\ i, & p \equiv 3\ (mod 4) \quad (p - prime) \end{cases}$$

Le fondement de cette démarche est l'observation de I. Schur que le carré (dans l'acceptation de la composition) de la transformation Fourier discrète diffère de l'application identique par le changement du signe de l'argument. Ayant comme point de départ cette constatation, dans la note présente nous obtenons la forme canonique diagonale de la transformation Fourier sur $L^2(\mathbf{Z}_p)$, qui nous fournit aussi la solution du problème des multiplicités des valeurs propres.

B. Dans ce qui suit, soit

(1) $$L^2(\mathbf{Z}_p) := \{f : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{C}\}$$

avec la structure standard de $\mathbf{C}$ - espace vectoriel doué avec le produit scalaire

(2) $$< f, g >:= \sum_{\hat{x}\in\mathbf{Z}_p} f(\hat{x})\overline{g(\hat{x})}, \quad f, g \in L^2(\mathbf{Z}_p).$$

Nous désignons par F_p– la transformation Fourier de dimension p, c'est à dire l'endomorphisme

$$
\begin{aligned}
F_p : L^2(\mathbf{Z}_p) &\to L^2(\mathbf{Z}_p) \\
f &\mapsto F_p f : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{C} \\
\hat{x} &\mapsto \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{y \in \mathbf{Z}_p} exp\,(2\pi i x y/p) f(\hat{y})
\end{aligned} \tag{3}
$$

(la définition étant correcte).

Le résultat de Schur mentionné dans l'introduction c'est

$$
{}^2F_p f(\hat{x}) = f(-\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbf{Z}_p, f \in L^2(\mathbf{Z}_p) \tag{4}
$$

(avec ${}^2F_p := F_p \circ F_p$) d'où on obtient que l'ensemble des valeurs propres distinctes de F_p est $S_p(F_p) = \{1, i, -1, -i\}$.

Soit $L(\lambda) \leq L^2(\mathbf{Z}_p)$ - le sous - espace propre associé à $\lambda \in S_p(F_p)$; $L_0 := \{f \in L^2(\mathbf{Z}_p) | f(\hat{x}) = f(-\hat{x}), \hat{x} \in \mathbf{Z}_p\}$ et $L_1 := \{f \in L^2(\mathbf{Z}_p) | f(\hat{x}) = -f(-\hat{x}), \hat{x} \in \mathbf{Z}_p\}$ étant l'ensembles des fonctions paires, resp. impaires.

Evidemment, $L_0, L_1 \leq L^2(\mathbf{Z}_p)$ et $L^2(\mathbf{Z}_p) = L_0 \oplus L_1$.

Une autre conséquence de (4) c'est

$$
L(\lambda) \leq \begin{cases} L_0, \lambda \in \{1, -1\} \\ L_1, \lambda \in \{i, -i\} \end{cases} \tag{5}
$$

Plus précisement, nous avons

$$
L(\lambda) = \begin{cases} (F_p + \lambda I)(L_0)\ , \ \lambda \in \{1, -1\} \\ (iF_p - I)(L_1)\ , \ \lambda = i \\ (iF_p + I)(L_1)\ , \ \lambda = -i. \end{cases} \tag{6}
$$

où $I = 1_{L^2(\mathbf{Z}_p)}$.

C. Des maintenant il est essentiel le fait que p est un nombre prime. Soit $\mathbf{Z}_p^\times := \mathbf{Z}_p - \{\hat{0}\}$ - le groupe multiplicatif (cyclique) du champ $\mathbf{Z}_p$ et $\hat{a} \in \mathbf{Z}_p^\times$ - un générateur du group, c'est à dire,

$$
\mathbf{Z}_p^\times = (\hat{a}) = \{\hat{a}^k | k = \overline{0, p-2}\}.
$$

Si $\mathbf{C}_1^\times := \{z \in \mathbf{C} | |z| = 1\}$ est organisé comme un groupe multiplicatif, soit

$$
\hat{\mathbf{Z}}_p^\times := \{\chi : \mathbf{Z}_p^\times \to \mathbf{C}_1^\times | \chi - \text{morphisme de groupes}\}
$$

doué avec l'opération. ponctuellment définie.

$\hat{\mathbf{Z}}_p^\times$ est aussi un groupe cyclique - le groupe des caractères (multiplicatifs) de $\mathbf{Z}_p^\times$ engendré par

$$
\chi_1 : \mathbf{Z}_p^\times \to \mathbf{C}_1^\times\ ,\ \chi_1(\hat{a}^l) = exp\,(2\pi i l/(p-1)). \tag{7}
$$

Nous notons par $\chi_k := \chi_1^k, k = \overline{0, p-2}$ et nous donnons l'extension de $\hat{\mathbf{Z}}_p^\times$ a $\mathbf{Z}_p$ par la condition $\chi_k(\hat{0}) = 0$ (pour chaque caractère).

En considérant la fonction

$$
\chi_{-1} : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{C}\ ,\ \hat{x} \mapsto \begin{cases} 1\ ,\ \hat{x} = \hat{0} \\ 0\ ,\ \hat{x} \neq \hat{0} \end{cases} \tag{8}
$$

et les relations d'orthogonalité par rapport à (2) pour les élémets de $\hat{\mathbf{Z}}_p^\times$, nous obtenons que $\mathbb{B} = (\chi_k)_{k=\overline{-1, p-2}}$ est une base orthogonale en $L^2(\mathbf{Z}_p)$.

Le comportament de F_p sur les éléments de $\mathbb{B}$ est caractérisé par les relations:

$$
\begin{aligned}
F_p \chi_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{p}}(\chi_{-1} + \chi_0) \\
F_p \chi_0 &= \frac{1}{\sqrt{p}}((p-1)\chi_{-1} - \chi_0) \\
F_p \chi_k &= c_k \overline{\chi_k} = c_k \chi_{p-1-k}\ ,\ k = \overline{1, p-2}
\end{aligned} \tag{9}
$$

où $c_k = F_p \chi_k(\hat{1})$.

De (4) nou avons $c_k \cdot c_{p-1-k} = (-1)^k$ et, en conséquence, il a lieu

$$
\begin{aligned}
(F_p \pm I)\chi_{p-1-k} &= \pm c_{p-1-k}(F_p \pm I)\chi_k, k = 2l, l \in \mathbb{N}^* \\
(iF_p \pm I)\chi_{p-1-k} &= \pm i c_{p-1-k}(iF_p \pm I)\chi_k, k = 2l-1, l \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Les résultats suivants mènent au but final du travail:

(i) Pour $0 < k \neq \frac{p-1}{2}, k = 2l, l \in \mathbb{N}^*$ les vecteurs $(F_p \pm I)\chi_k$ sont linéairement indépendants et les sous - espaces engendrés par ces vecteurs sont indépendants.

(ii) Pour $0 < k \neq \frac{p-1}{2}, k = 2l-1, l \in \mathbb{N}^*$ nous avons un énonce similaire a (i) relativement au $(iF_p \pm I)\chi_k$.

(iii) Pour $k = \frac{p-1}{2} = 2l, l \in \mathbb{N}^*, (F_p \pm I)\chi_k$ est colinéaire avec χ_k et pour $k = \frac{p-1}{2} = 2l-1, l \in \mathbb{N}^*, (iF_p \pm I)\chi_k$ est colinéaire avec χ_k.

(iv) $(F_p \pm I)\chi_{-1}$ ainsi que $(F_p \pm I)\chi_0$ engendrent le même espace ainsi que $\{\chi_1, \chi_0\}$.

Finalement, de (6), à cause de la parité des vecteurs $\chi_{-1}, \chi_0, \chi_2, \ldots, \chi_{p-3}$, respectivement de l'imparité des vecteurs $\chi_1, \chi_3, \ldots, \chi_{p-2}$ et de (i) - (iv) il résulte:

Théorème. *Les vecteurs* $(F_p \pm I)\chi_{2l}, l = \{0, 1, \ldots, [\frac{p-1}{4}]\}$ *et les vecteurs* $(iF_p \pm I)\chi_{2l+1}, l \in \{0, 1, \ldots, [\frac{p-3}{4}]\}$ *avec* $\chi_{\frac{p-1}{2}}$ *forment une base (de vecteurs propres pour* F_p*) dans* $L^2(\mathbf{Z}_p)$. *Par rapport à cette base, la repésentation matricielle de* F_p *est diagonale, les ordres de multiplicité des valeurs propres étant*

	1	-1	i	$-i$
$p \equiv 1 (mod\ 4)$	$\frac{p+3}{4}$	$\frac{p-1}{4}$	$\frac{p-1}{4}$	$\frac{p-1}{4}$
$p \equiv 3 (mod\ 4)$	$\frac{p+1}{4}$	$\frac{p+1}{4}$	$\frac{p+1}{4}$	$\frac{p-3}{4}$

BIBLIOGRAPHIE

1. A u s l a n d e r, L., T o l i m i e r i, R. – *Is Computing with the Finite Fourier Transform Pure or Applied Mathematics ?*, Bulletin of the American Math. Society (New Series), Vol. No. 6 (1979), 847 - 897.
2. A u s l a n d e r, L., T o l i m i e r i, R. – *Ring Structure and the Fourier Transform*, Math. Intelligencer, Vol. 7, No. 3 (1985), 49 - 53.

Received:2.IV.1993

University of Braşov
Braşov
ROMANIA

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XL, s.I.a, Matemtică, 1994, f.1.

ON SOME INEQUALITIES OF THE WEYL TYPE

BY

B.G. PACHPATTE

1. Introduction. One of the most interesting and fundamental mathematical discoveries of H e r m a n n W e y l [8] (see, also [4, p. 165]) is the following inequality:

$$\int_0^\infty f^2 dx \leq 2 \left(\int_0^\infty x^2 f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty f'^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

where f is a continuously differentiable function on $(0, \infty)$ and the integrals on the right side exist. This inequality is remarkable in terms of its simplicity, the large number of results to which it leads, and the variety of applications which can be related to it. In the past few years some useful generalizations and extensions of the inequality (1) are established by the various investigators, see [2,3,6,7]. In view of the importance of this inequality in the literature, it is natural to expect that the inequalities of the type (1) would also be equally important in certain new applications. The aim of the present paper is to establish some new integral inequalities involving functions and their derivatives which claim their origin to the Weyl's inequality given in (1). The analysis used in the proofs is elementary and our results provide new estimates on these types of inequalities.

2. Statement of results. In this section we state our results to be proved in this paper. In what follows, we assume that all the integrals appearing below exist on the respective domains of their definitions.

Our main result is given in the following theorem.

Theorem 1. *Let* $\alpha \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ *be real constants and* f *be a real-valued continuously differentiable function defined on* $(0, b)$ *for fixed real number* $b > 0$. *Then*

$$\int_0^b t^\alpha |f(t)|^{p+q} dt \leq \tag{2}$$