ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul XLIV, s.I.a, Matematică, 1998, f1

QUELQUES CONSÉQUENCES D'UN THÉORÈME DE BIEHLER

BY

ALAIN PIÉTRUS

Résumé. Nous donnons quelques résultats dans la théorie des polynômes hyperboliques et étudions l'hyperbolicité de certaines combinaisons linéaires de polynômes hyperboliques.

Mots–clés: Polynômes hyperboliques, théorème de Biehler, chemins gardant l'hyperbolicité.

1. Introduction. Un polynôme réel est hyperbolique si toutes ses racines sont réelles. On désigne par H_n l'ensemble des polynômes hyperboliques de degré n. La structure géométrique de H_n a été étudiée par A r n o l d dans [2]. Les estimations du volume de H_n pour plusieurs mesures de probabilité sont données par D e d i e u dans [6]. Notons aussi que cet article est la suite d'un précédent [9], dans lequel nous avions déjà annoncé certains résultats.

Précisons aussi que les polynômes hyperboliques occupent une place particulière en analyse, de bons exemples sont les polynômes orthogonaux sur des intervalles.

Lorsque P est un polynôme, on note $Z(P)$, l'ensemble de ses zéros.

Lorsque A est un polynôme de $\mathbb{C}[x]$, on peut toujours écrire $A(x) = A^1(x) + iA^2(x)$ où A^1 et A^2 sont des éléments de $\mathbb{R}[x]$ et on utilise $Re(A)$ et $Im(A)$ afin de désigner respectivement A^1 et A^2. Si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont les racines de A, pour $1 \leq i \leq n$, on note A_i, le polynôme défini par $A_i(x) = \dfrac{A(x)}{x - x_i}$.

Le point de départ de cette étude est un résultat du à B i e h l e r [3] (1879):

Théorème 0. *Soit $A \in \mathbb{C}[x]$ de racines $z_1, z_2, ..., z_n$. On écrit $A(x) = U_n(x) + iV_n(x)$ où $U_n, V_n \in \mathbb{R}[x]$. Si $Sign(Im(z_1)) = Sign(Im(z_2)) = \cdots = Sign(Im(z_n))$ alors: l'équation $U_n = 0$ de degré n a toutes ses racines réelles et inégales. De plus les racines de V_n au nombre de $n-1$ séparent celles de U_n et sont toutes réelles.*

A l'aide de ce résultat, nous allons pouvoir traiter quelques problèmes et déduire d'autres résultats dans la théorie analytique des polynômes.

Le premier théorème traite du problème suivant:

Soit $P \in H_p$ et $A \in \mathbb{C}[x]$, on se propose de trouver les conditions sur les racines de A pour qu'il existe un polynôme $B \in \mathbb{C}[x]$ tel que le polynôme $AP+B$ soit hyperbolique avec comme ensemble de racines $Z(P) \cup Z(Re(A))$. On peut remarquer qu'on peut toujours trouver B pour que le polynôme en question soit réel, mais il est davantage plus compliqué de le trouver pour que $AP + B$ soit hyperbolique.

Le second théorème donne des résultats de perturbation qui n'affectent pas le caractère hyperbolique sur une certaine classe de polynômes hyperboliques.

Le troisième théorème donne quelques inégalités que vérifient les dérivées à l'origine d'un polynôme lorsque les racines de ce dernier satisfont une certaine condition de signe.

Le quatrième théorème traite du problème suivant: on se propose de trouver des conditions que doivent remplir deux polynômes A et B de $\mathbb{C}[x]$ pour que le polynôme $AQ + BQ'$ ait ses parties réelle et imaginaire hyperboliques lorsque Q est un polynôme assujetti à la seule condition d'avoir tous ses zéros dans (π) où (π) est le demi–plan ouvert situé au dessus de l'axe réel et défini par $Im(z) > 0$.

En ajoutant une condition supplémentaire, on donne des conditions necessaires et suffisantes pour le problème précédent.

Le cinquième théorème traite du problème suivant: on se propose de trouver des conditions que doivent remplir deux polynômes U_p et V_p pour que: pour tout $\theta \in [0, 1]$, le polynôme $\theta V_p P + \dfrac{(1-\theta)}{n} U_p P'$ soit hyperbolique, lorsque P est un polynôme unitaire de degré n assujetti à la seule condition d'avoir toutes les racines réelles et distinctes.

2. Principaux résultats.

Théorème 1. *Soient $A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ avec*

$a_{n-1} \neq 0$ et $P \in H_p$. Si les racines $x_1, x_2, ..., x_n$ de A satisfont à la condition

$$Sign(Im(x_1)) = Sign(Im(x_2)) = \cdots = Sign(Im(x_n)) \neq 0$$

alors, il existe un unique polynôme $B \in \mathbb{C}[x]$ de degré égal à $n + p - 1$ dont toutes les racines sont réelles et tel que le polynôme Q défini par: $Q = AP + B$ soit un élément de H_{n+p} avec comme ensemble de racines $Z(P) \cup Z(Re(A))$. De plus Q possède au moins n racines distinctes.

Théorème 2. *Soient $A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ avec $a_{n-1} \neq 0$ tel que ses racines $x_1, x_2, ..., x_n$ de A satisfont à la condition*

$$Sign(Im(x_1)) = Sign(Im(x_2)) = \cdots = Sign(Im(x_n)) = s \neq 0$$

Pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ tel que $Sign(Im(x_n) + \varepsilon_2) = s$, les polynômes:

$$Re(A) + \varepsilon_1 Re(A_n) + \varepsilon_2 Im(A_n) \text{ et } Im(A) + \varepsilon_1 Im(A_n) - \varepsilon_2 Re(A_n)$$

sont hyperboliques. De plus, les racines du premier sont toutes distinctes et sont strictement séparées par celles du second qui sont également toutes distinctes.

Les théorèmes 1 et 2 se démontrent facilement à l'aide d'un résultat de B i e h l e r [3]. Remarquons qu'avec une condition de signe sur les parties imaginaires des racines de A, on obtient que les polynômes $Re(A)$, $Im(A)$, $Re(A_n)$, $Im(A_n)$ sont hyperboliques. De plus, si par une certaine perturbation le signe de la partie imaginaire d'une racine de $A(x)$ ne change pas, on obtient alors des résultats de perturbations qui gardent l'hyperbolicité.

Ici, on a perturbé la dernière racine, mais il est clair qu'on obtiendrait un résultat similaire en perturbant n'importe quelle racine de A.

Théorème 3. *Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[x]$ dont les racines $x_1, x_2, ..., x_n$ de A satisfont à la condition*

$$Sign(Im(x_1)) = Sign(Im(x_2)) = \cdots = Sign(Im(x_n)) = s \neq 0$$

alors

$$\begin{array}{ll} Re(P^{k-1}(0))Re(P^{k+1}(0)) \leq g_k Re^2(P^k(0)), & 1 \leq k \leq n-1, \\ Im(P^{k-1}(0))Im(P^{k+1}(0)) \leq g_k Im^2(P^k(0)), & 1 \leq k \leq n-2 \end{array}$$

avec $g_k = \dfrac{n-k}{n-k+1} < 1.$

Théorème 4. *Soit Q un polynôme de $\mathbb{C}[x]$ ayant toutes ses racines dans (π). Si A et B sont deux polynômes de $\mathbb{C}[x]$ de degrés respectifs p et q qui satisfont aux quatre conditions suivantes:*

(i) *A et B n'ont pas de racines réelles;*

(ii) *$Im\left(\dfrac{A}{B}\right) \geq 0$ le long de l'axe réel;*

(iii) *Tous les zéros de B sont dans (π);*

(iv) *On a soit $p \leq q$, soit $p = q+1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{A(x)}{xB(x)} = a$, a étant réel négatif.*

Alors le polynôme

$$AQ + BQ'$$

a ses parties réelle et imaginaire hyperboliques. De plus les racines de la partie réelle sont toutes distinctes et sont strictement séparées par celles de la partie imaginaire qui sont également toutes distinctes.

Le théorème 4 poursuit un travail qu'avait déjà commencé Dieudonné [7]. Ce dernier s'intéressait aux conditions permettant au polynôme $AQ + BQ'$ d'avoir toutes ses racines dans (π). Ces mêmes conditions imposées par Dieudonné [7] nous permettent de conclure quant à l'hyperbolicité des parties réelle et imaginaire du polynôme $AQ + BQ'$.

En imposant une condition supplémentaire sur les parties réelle et imaginaire du polynôme $AQ+BQ'$, nous obtenons des conditions necessaires et suffisantes.

Corollaire 5. *Soit Q un polynôme de $\mathbb{C}[x]$ ayant toutes ses racines dans (π). Si A et B sont deux polynômes de $\mathbb{C}[x]$ de degrés respectifs p et q dépourvus de zéros réels. Si on ajoute la condition supplémentaire: $Re(AQ + BQ')$ et $Im(AQ + BQ')$ n'ont pas de facteurs communs alors on a: Pour que le polynôme $AQ + BQ'$ ait au moins une racine dans (π) et ses parties réelles et imaginaires hyperboliques avec leurs zéros simples et entrelacés, il faut et il suffit que:*

(i) *$Im\left(\dfrac{A}{B}\right) \geq 0$ le long de l'axe réel;*

(ii) *Tous les zéros de B sont dans (π);*

(iii) *On a soit $p \leq q$, soit $p = q+1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{A(x)}{B(x)} = a$, a étant réel négatif.*

Théorème 6. *Soient U_p et V_p deux polynômes unitaires de $\mathbb{R}[x]$ de degrés respectifs p et $p-1$. Soit $P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 \in H_n$*

$(p \leq n)$ avec toutes ses racines $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$ simples. Si on suppose que:

1. *Les racines $z_1, z_2, ..., z_n$ du polynôme $U_p + iV_p$ satisfont la condition*

$$Sign(Im(z_1)) = Sign(Im(z_2)) = \cdots = Sign(Im(z_n)) \neq 0.$$

2. *La i-ème racine de $U_p \in]x_i, y_i[$ pour $1 \leq i \leq \min(p, n-1)$ si $y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1}$ sont les racines de P'.*
3. *La i-ème racine de V_p est inférieure où égale à y_i pour $1 \leq i \leq p-1$.*

Alors pour tout $\theta \in [0,1]$ le polynôme:

$$\theta V_p P + \frac{(1-\theta)}{n} U_p P'$$

est un élément de H_{n+p-1}.

De plus si on se restreint pour θ à $]0,1[$ et si on remplace la condition 3 par la condition:

3a. *La i-ème racine de V_p est inférieure où égale à y_i pour $1 \leq i \leq p-1$.*

Alors toutes les racines du polynôme hyperbolique ci–dessus sont simples.

Lorsque'on a un polynôme $P \in H_n$, le théorème 6 permet à partir de ce polynôme la construction d'un chemin très particulier de H_{n+p-1} d'extrémités Q_1 et Q_2 telles que P divise Q_1 et P' divise Q_2.

3. Démonstration des théorèmes et du corollaire. Avant de démontrer des théorèmes, donnons trois propositions et un lemme qui seront utiles dans la suite.

Proposition 7. *Etant donné un polynôme à coefficients complexes $F(x) = P(x) + iQ(x)$ où P et Q sont des polynômes réels n'ayant pas de facteur commun, les propositions:*

(i) *Les zéros de $F(x)$ sont tous intérieurs à un même demi–plan par rapport à l'axe réel;*
(ii) *Les polynômes P et Q ont tous leurs zéros réels, simples et entrelacés;*
(iii) *Les polynômes $pP(x) + qQ(x)$ où p et q désignent des nombres réels arbitraires, à tous ses zéros réels,*

sont équivalentes.

La preuve de la Proposition 7 a été donnée par A n c o c h e a [1].

Proposition 8. *Soient f et g deux polynômes unitaires de H_n ayant pour racines respectives $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$ et $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Pour chaque $\theta \in [0,1]$ les racines de $h_\theta(x) = \theta f(x) + (1-\theta)g(x)$ sont réelles.*
(b) *Pour chaque $k = 1, ..., n-1$ on a $\max(r_k, s_k) \leq \min(r_{k+1}, s_{k+1})$.*

De plus, si ces conditions sont satisfaites et si f et g n'ont pas de zéros communs alors, les racines de h_θ sont simples lorsque θ est restreint à $]0,1[$.

La proposition ci–dessus est un résultat qui est du à D e d i e u [4] et à D e d i e u et G r e g o r a c [5].

Proposition 9. *Soit P un polynôme assujetti à la seule condition d'avoir ses zéros dans (π), A et B deux polynômes de degré respectif p et q et dépourvus de zéros réels. Pour que toutes les racines de l'équation*

$$A(z)P(z) + B(z)P'(z) = 0$$

soient dans (π) il faut et il suffit que

(1) *$Im\left(\dfrac{A}{B}\right) \geq 0$ le long de l'axe réel;*
(2) *Tous les zéros de B sont dans (π);*
(3) *On a soit $p \leq q$, soit $p = q+1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{A(x)}{B(x)} = a$, a étant réel négatif.*

La proposition 9 est un résultat qui est du à Dieudonné dont la preuve peut être vérifiée dans [7].

Donnons aussi le lemme d'analyse bien connu dont la preuve a été donnée dans [8]:

Lemme 10. *Si $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in H_n$ alors $h_k a_k^2 \geq$ $\geq a_{k-1}a_{k+1}$, $(k = 1, 2, ..., n-1)$ avec*

$$h_k = \frac{k(n-k)}{(k+1)(n-k+1)} < 1.$$

Il y a égalité pour chaque k si et seulement si toutes les racines de P sont égales.

Preuve du théorème 1. On pose $A(x) = U_n(x) + iV_n(x)$ et on écrit $A(x)P(x) = U_n(x)P(x) + iV_n(x)P(x)$. D'après le théorème 0 et les hypothèses du théorème 1, on sait que les racines de U_n (resp. V_n) sont réelles et au nombre de n (resp. $n-1$). Ainsi, en posant $B(x) = -iV_n(x)P(x)$, il vient que $\deg(B) = n+p-1$ et que les racines de B sont réelles à cause de celles de P et de V_n qui sont toutes réelles.

D'autre part, $A(x)P(x)+B(x) = U_n(x)P(x)$ montre que $Q \in H_{n+p}$ et que $Z(Q) = Z(P) \cup Z(U_n) = Z(P) \cup Z(Re(A))$. De plus, comme U_n possède n racines distinctes alors Q possède au moins n racines distinctes.

Unicité de B: Soit B_1 et B_2 de degré égal à $n+p-1$ dont toutes les racines sont réelles et tels que: $Q_1(x) = A(x)P(x) + B_1(x)$ et $Q_2(x) = = A(x)P(x) + B_2(x)$ sont des éléments de H_{n+p} et ont tous deux comme ensembles de racines $Z(P) \cup Z(Re(A))$.

On a $Q_1(x) - Q_2(x) = B_1(x) - B_2(x)$ et les conditions imposées ci–dessus entraînent soit $Q_1 - Q_2 = 0$ auquel cas $B_1 = B_2$ ou $Q_1 = \alpha Q_2$ où α est un réel. Dans ce dernier cas, on aurait $B_1 - B_2$ qui est un polynôme de degré égal à $n+p$, ce qui est impossible. On obtient donc $B_1(x) = B_2(x)$ en tout point x, ce qui achève la preuve.

Preuve du théorème 2. Si x_k est une racine de $A(x)$, on pose $x_k = a_k + ib_k$ et on peut écrire

$$A(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) = U_n(x) + iV_n(x).$$

Définissons $\widetilde{A}$ par: $\widetilde{A}(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n+\varepsilon_1-i\varepsilon_2)$. Les racines du polynôme $\widetilde{A}(x)$ sont $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n - \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ et on peut alors poser $\widetilde{A}(x) = \widetilde{U}(x) + i\widetilde{V}_n(x)$.

Si pour $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ on a $Sign(Im(x_n) + \varepsilon_2) = s$, alors on a

$$Sign(Im(x_n - \varepsilon_1 + i\varepsilon_2)) = Sign(Im(x_n) + \varepsilon_2) = s$$

et d'après le théorème 0 on sait que $\widetilde{U}_n = 0$ de degré n a toutes ses racines réelles et distinctes de plus les racines de $\widetilde{V}_n$ au nombre de $n-1$ séparent strictement celles deU_n et sont toutes distinctes. En développant $\widetilde{A}(x)$, on trouve

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(x) \quad &= U_n(x) + \varepsilon_1 Re\left(\frac{A(x)}{x-x_n}\right) + \varepsilon_2 Im\left(\frac{A(x)}{x-x_n}\right) + \\ &+iV_n(x) + i\varepsilon_1 Im\left(\frac{A(x)}{x-x_n}\right) - i\varepsilon_2 Re\left(\frac{A(x)}{x-x_n}\right).\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire de la dernière égalité avec $\widetilde{U}_n$ et $\widetilde{V}_n$ on a le résultat désiré, ce qui achève la preuve du théorème 2.

Preuve du théorème 3. On écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{Re(P^k(0))}{k!} x^k + i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Im(P^k(0))}{k!} x^k.$$

D'après le théorème de Biehler, on a que les polynômes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{Re(P^k(0))}{k!} x^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{Im(P^k(0))}{k!} x^k$ sont hyperboliques.

En appliquant le lemme 10 aux deux polynômes précédents, on a que:

$$Re(P^{k-1}(0))Re(P^{k+1}(0)) \leq \frac{(k-1)!(k+1)!h_k}{(k!)^2} Re^2(P^k(0)),\ 1 \leq k \leq n-1.$$

En posant $g_k = \dfrac{(k-1)!(k+1)!}{(k!)^2} h_k$, on vérifie aisément que $g_k = \dfrac{n-k}{n-k+1} < 1$. Pour la partie imaginaire, on procède de la même manière.

Preuve du théorème 4. Avec les conditions (i), (ii), (iii) et (iv), la proposition 9 nous assure que le polynôme $AQ+BQ'$ a toutes ses racines dans (π), c'est–à–dire de parties imaginaires strictement positives. En appliquant alors le théorème 0, on déduit sans peine que le polynôme $AQ + BQ'$ a ses parties réelle et imaginaire hyperboliques et de plus les racines de la partie réelle qui sont toutes distinctes sont aussi strictement séparées par celles de la partie imaginaire qui sont également toutes distinctes.

Preuve du corollaire 5. Dans un sens, le résultat est clair. En effet lorsque (i), (ii) et (iii) sont vérifiés alors $AQ + BQ'$ a toutes ses racines dans (π) d'après la proposition 9. Ainsi, en appliquant le théorème 0, il est immédiat que $AQ + BQ'$ a ses parties réelles et imaginaires hyperboliques avec leurs zéros simples et entrelacés.

Supposons maintenant que $AQ+BQ'$ ait ses parties réelle et imaginaire hyperboliques et ait au moins une racine dans (π).

D'après la proposition 7, les zéros de $AQ + BQ'$ sont tous intérieurs à un même demi–plan par rapport à l'axe réel. Ce demi–plan ne peut être que (π) car $AQ + BQ'$ a au moins une racine dans (π). En appliquant maintenant la proposition 9, la conclusion suit c'est–à–dire que (i), (ii), et (iii) sont vérifiés.

Preuve du théorème 6. D'après le théorème 0, on sait que les polynômes U_p et V_p sont hyperboliques de degrés respectifs p et $p-1$. Il s'ensuit que les deux polynômes $P_1(x) = V_p(x)P(x)$ et $Q_1(x) = U_p(x)P'(x)$ sont aussi des éléments de H_{p+n-1}. Désignons par $\alpha_1, ..., \alpha_p$ (resp. $\beta_1, ..., \beta_{p-1}$) les racines de U_p (resp. V_p).

Cas où $n > p$: On définit les quantités r_i et s_i $(1 \leq i \leq n+p-1)$, de la façon suivante:

$$r_1 = x_1, r_2 = \beta_1, r_3 = x_2, ..., r_{2p-3} = x_{p-1}, r_{2p-2} = \beta_{p-1}, r_{2p-1} = x_p,$$
$$r_{2p} = x_{p+1}, ..., r_{n+p-1} = x_n.$$
$$s_1 = \alpha_1, s_2 = y_1, s_3 = \alpha_2, ..., s_{2p-1} = \alpha_p, s_{2p} = y_p, s_{2p+1} = y_{p+1},$$
$$s_{2p+2} = y_{p+2}, ..., s_{n+p-1} = y_{n-1}.$$

Remarquons que pour $1 \leq i \leq 2p-2$, $\max(r_i, x_i) = s_i$ et $\min(r_{i+1}, s_{i+1}) = r_{i+1}$ et comme $\alpha_i \leq \beta_i$ et $y_i \leq x_{i+1}$ (car les racines de P' séparent strictement celles de P) alors l'inégalité $\max(r_i, s_i) \leq \min(r_{i+1}, s_{i+1})$ est assurée pour $1 \leq i \leq 2p-2$.

Pour $i = 2p-1, r_{2p-1} = x_p, r_{2p} = x_{p+1}, s_{2p-1} = \alpha_p, s_{2p} = y_p$, donc $\max(r_{2p-1}, s_{2p-1}) = \alpha_p \leq y_p = \min(r_{2p}, s_{2p})$.

Pour $2p \leq i \leq n-1, \max(r_i, s_i) = x_{i-p+1}$ et $\min(r_{i+1}, s_{i+1}) = y_{i-p}$. Comme $y_{i-p} \leq x_{i-p+1}$ alors l'inégalité $\max(r_i, s_i) \leq \min(r_{i+1}, s_{i+1})$ est assurée pour $2p \leq i \leq n$. En conclusion, elle est assurée pour tout $1 \leq i \leq n$.

Cas où $n = p$: On définit les quantités r_i et s_i $(1 \leq i \leq 2p-1)$, de la façon suivante:

$$r_1 = x_1, r_2 = \beta_1, r_3 = x_2, ..., r_{2n-3} = x_{n-1}, r_{2n-2} = \beta_{n-1}, r_{2n-1} = x_n.$$
$$s_1 = \alpha_1, s_2 = y_1, s_3 = \alpha_2, ..., s_{2n-3} = \alpha_{n-1}, s_{2n-2} = y_{n-1}, s_{2n-1} = \alpha_n.$$

Pout tout $1 \leq i \leq n-1$, on peut remarquer que $\max(r_i, s_i) = x_i$ et $\min(r_{i+1}, s_{i+1}) = r_{i+1}$ donc comme ci–dessus, il est immédiat que l'inégalité $\max(r_i, s_i) \leq \min(r_{i+1}, s_{i+1})$ est assurée pour $1 \leq i \leq n-1$.

Dans les deux cas ci–dessus, la condition b) de la proposition 8 est satisfaite et donc pour tout $\theta \in [0, 1]$ le polynôme:

$$\theta V_p(x)P(x) + \frac{(1-\theta)}{n} U_p(x)P'(x)$$

a toutes ses racines réelles, donc est un élément de H_{n+p-1}.

On a déjà que P et P' n'ont pas de zéros communs et il en est de même pour U_p et V_p. Si on remplace 3) par 3a) alors les conditions 2) et 3a) impliquent que V_p et P' n'ont pas de zéros communs. Tout ceci entraîne que les deux polynômes V_pU_p et U_pP' n'ont pas de zéros communs. Si on se restreint pour θ à $]0,1[$ alors de la proposition 8, on déduit que toutes les racines du polynôme $\theta V_pP + \dfrac{(1-\theta)}{n}U_pP'$ sont simples.

RÉFÉRENCES

1. A n c o c h e a, G., *Sur l'équivalence de trois propositions de la théorie analytique des polynômes*, C.R. Acad. Sci. Paris, 220 (1945), p.579–581.
2. A r n o l d, V.I., *Hyperbolic polynomials and Vandermonde mappings*, Funct. Anal. and Appl. vol.20 (1986), p.125–127.
3. B i e h l e r, C., *Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles*, J. Reine Angew. Math. vol.87 (1879), p.350–352.
4. D e d i e u, J.P., *Obreschkoff's theorem revisited: what convex sets are contained in the set of hyperbolic polynomials?*, Journal of Pure and Applied Algebra, vol.81 (1992), p.269–278.
5. D e d i e u, J.P., G r e g o r a c, R.J., *Obreschkoff's theorem revisited: what convex sets are contained in the set of hyperbolic polynomials?, corrigendum*, Journal of Pure and Applied Algebra, vol.93 (1994), p.111–112.
6. D e d i e u, J.P., *Combien peu de polynômes ont toutes leurs racines réelles?*, C. R. Acad. Sci. Paris, 313 (1991), p.87–90.
7. D i e u d o n n é, J., *Sur un problème de la théorie des polynômes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 199 (1934), p.999–1001.
8. H a r d y, L i t t l e w o o d and P o l y a, *Inequalities*, Cambridge, University Press, 1952.
9. P i é t r u s, A., *Polynômes hyperbliques et combinaisons linéaires de certains polynômes hyperboliques*, C. R. Acad. Sci. Paris, 324, série I (1997), p.25–27.

Received: 10.X.1997

Département de Mathématiques
40, avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers Cedex
FRANCE
e–mail: pietrus@mathrs.univ-poitiers.fr