ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I.CUZA" IAŞI
Tomul L, s.I a, Matematică, 2004, f.1.

SUR LES STRUCTURES $\mathcal{F}$-PLATES DANS LES FIBRÉS VECTORIELS*

PAR

Costache Apreutesei

Abstract. Let $\mathcal{F}$ be a foliation of a differentiable manifold M. In this paper, we give the definition of a $\mathcal{F}$-flat structure (s.$\mathcal{F}$-p) in a vector bundle ξ with the base M. We obtain some general properties of these structures (theorems 4 and 7). A linear connextion ∇ in the vector bundle ξ is $\mathcal{F}$-flat if the curvature of ∇ is zero along the leaves of $\mathcal{F}$. The existence of a $\mathcal{F}$-flat structure in ξ is equivalent to the existence of a linear $\mathcal{F}$-flat connexion (c.$\mathcal{F}$-p.) of ξ.

The existence of a $\mathcal{F}$-flat structure in the vector bundle ξ has a certain implication on the characteristic classes of ξ (Theorem 7).

Finally, the tangent bundle of M is considered. The notion of $\mathcal{F}$-flat structure is inspired from the notion of a flat connexion.

AMS Subject classification: Primary 53C10, 53C07, 53C12; secondary: 53C05, 57R30.

Keywords and phrases: $\mathcal{F}$-flat structures, linear $\mathcal{F}$-flat connexions, Pontryagin classes.

1. Dans ce travail, toutes les variétés et les applications sont differentiables de classe C^∞. Les variétés sont supposées sans bord.

Soit M une variété différentiable de dimension m munie d'un feuilletage $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de dimension p et soit $\xi = (E, \pi, M)$ un fibré vectoriel réel d'espace total E, de rang n et de base M. Soient s_α un champ de repères de E sur U_α et $s_\alpha = A_{\alpha\beta} s_\beta, U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, où $A_{\alpha\beta}$ sont des fonctions de transition de ξ. Avec ces notations, on peut introduire la notion de structure $\mathcal{F}$-plate.

---

*À la mémoire de ma mère Catinca Lăcătuşu

Definition. On dit qu'un ensemble $\Lambda = (s_\alpha, A_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in I}$ (maximal ou non) définit une $s.\mathcal{F}-p.$ dans le fibré vectoriel ξ si les champs de matrices $A_{\alpha\beta}$ sont constants le long des feuilles de $\mathcal{F}$.

Soit $(U; x^i, x^{\widehat{i}}), i = 1, 2, \ldots, p, \widehat{i} = p+1, \ldots, m$, une carte locale de $\mathcal{F}$. On en déduit que les matrices $A_{\alpha\beta} = (A_a^b), a, b = 1, 2, \ldots, n$, doivent satisfaire à un système d'équations aux dérivées partielles: $\dfrac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = 0, \forall \alpha\beta \in I$, où (x^i) sont coordonnées dans une feuille de $\mathcal{F}$ et $(x^{\widehat{i}})$ sont coordonnées secondaires. Ce système d'équations a caractère géometrique (sont invariantes aux changement des chartes de $\mathcal{F}$). Ces systèmes sont compatibles sur $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \alpha, \beta \in I$. Une $s.\mathcal{F}-p.$ dans ξ exprime une liaison entre la propriété de M d'être feuilletée et certaines propriétés géométriques de ξ.

Remarque 1. Si $\mathcal{F}$ est le feuilletage trivial de M donné par ses composantes connexes (pour la topologie de variété de dimension m) alors Λ définit une structure plate dans ξ [5, p.4]. Soit $\mathcal{E}$ l'espace fibré des repères de E. Les fonctions de transition de E et $\mathcal{E}$ coincident et donc la notion de $s.\mathcal{F}-p.$ dans ξ peut être transférée à $\mathcal{E}$.

2. Soient $\xi = (E, \pi, M)$ un fibré vectoriel d'espace total E, la base M (non nécessairement feuilletée) et TE le fibré tangent à E. Soit HE une connexion non-linéaire sur E et VE le fibré vertical tangent à $E : TE = VE \oplus HE$. Si (y^a, x^i) sont les coordonnées locales dans une carte (U, ϕ) de E, on désignera par $\left(\dfrac{\partial}{\partial y^a}, \dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ le repère associé. Soit $\dfrac{\delta}{\delta x^i} = \dfrac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_i^a \dfrac{\partial}{\partial y^a}$ le relèvement horizontal de $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, où Γ_i^a sont les coefficients de la connexion non-linéaire [6]. Le changement de coordonnées locales sur E, $y^{a'} = M_a^{a'} y^a, x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ donné les relations $\dfrac{\partial}{\partial y^a} = M_a^{a'} \dfrac{\partial}{\partial y^{a'}}, \dfrac{\delta}{\delta x^i} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\delta}{\delta x^{i'}}$. Il en résulte que la famille $\Lambda = \left(\dfrac{\partial}{\partial y^a}, \dfrac{\delta}{\delta x^i}, A_{uu'}\right)$, où $A_{uu'} = \begin{pmatrix} M_a^{a'} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \end{pmatrix}$, définit dans TE une $s.\mathcal{F}-p.$, $\mathcal{F}$ étant le feuilletage verticale de E. Avec ces notations, on a

Proposition 1. *L'ensemble* $\left(\dfrac{\partial}{\partial y^a}, \dfrac{\delta}{\delta x^i}, A_{uu'}\right)$ *définit une* $s.\mathcal{F}-p.$ *dans le fibré tangent* TE *à l'éspace total* E *d'un fibré vectoriel* ξ *munie d'une connexion non-linàire.*

Corollaire. *Le fibré tangent à $T(TM)$ admet une $s.\mathcal{F}-p.$ où $\mathcal{F}$ est le feuilletage vertical du fibré tangent TM.*

Soient $T\mathcal{F}$ le fibré tangent à $\mathcal{F}$ et $Q = TM/T\mathcal{F}$ le fibré vectoriel transverse à $\mathcal{F}$. Soit $\pi_1 : TM \to Q$ la projection canonique. Si $(U; x^i, x^{\hat{i}})$ est une carte de $\mathcal{F}$, le fibré Q/U est engendré par les sections $\left(\pi_1\left(\frac{\partial}{\partial x^{\hat{i}}}\right)\right)$. À un changement de coordonnées locales $x^i = x^i(x^{i'}, x^{\hat{i}'}), x^{\hat{i}} = x^{\hat{i}}(x^{\hat{i}'})$ de $\mathcal{F}$, on a $\pi_1\left(\frac{\partial}{\partial x^{\hat{i}}}\right) = \frac{\partial x^{\hat{i}'}}{\partial x^{\hat{i}}}\pi_1\left(\frac{\partial}{\partial x^{\hat{i}'}}\right)$. Il en résulte:

Proposition 2. *L'ensemble $\Lambda = \left(\pi_1\left(\frac{\partial}{\partial x^{\hat{i}}}\right), \left(\frac{\partial x^{\hat{i}'}}{\partial x^{\hat{i}}}\right)\right)$ définit une $s.\mathcal{F}-p.$ dans le fibré transverse Q de $\mathcal{F}$.*

Remarque 2. Plus généralement, soit K un feuilletage de M et $\mathcal{F}$ un sous feuilletage de K. On désigne par TK le fibré tangent à K. De même on montre qu'il existe une $s.\mathcal{F}-p.$ dans le fibré quotient $TK/T\mathcal{F}$. Une telle situation est rencontrée dans l'étude des G_T-structures intégrables [1].

One note par Γ le foncteur qui associe à chaque fibré vectoriel, l'espace des sections.

Lemme 3. *Soit $(U_\alpha, x^i, x^{\hat{i}})$ une carte quelconque de $\mathcal{F}$. On suppose que les ouverts U_α du recouvrement $\{U_\alpha\}$ sont connexes. Soit $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ des repères de $\xi = (E, \pi, M)$ sur U_α, U_β et $\sigma_\alpha = B_{\alpha\beta}\sigma_\beta$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Si pour une connexion linéaire ∇ dans E on a $\nabla_X\sigma_\alpha = \nabla_X\sigma_\beta = 0, \forall X \in \Gamma(E)$, alors les matrices $B_{\alpha\beta}$ ne dépendent pas de (x^i).*

Démonstration. En utilisant la loi de transformation des 1-formes de connexion de ∇ par rapport à σ_α et σ_β, on a $dB_{\alpha\beta}(X) = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = 0$. On peut supposer que $U_\alpha \cap U_\beta$ sont connexes [4,p.54] et donc $B_{\alpha\beta}$ ne dépendent pas de (x^i).

Théorème 4. *Soient $\xi = (E, \pi, M)$ un fibré vectoriel de base M munie d'un feuilletage $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ où U_α et $U_\alpha \cap U_\beta$ sont connexes. Pour qu'il existe dans ξ une $s.\mathcal{F}-p.$ il faut et il suffit qu'il existe dans ξ une connexion $\mathcal{F}$-plate.*

Démonstration. Soient ∇ une connexion $\mathcal{F}$-plate ($c.\mathcal{F}-p.$) dans ξ et $\widetilde{s}_\alpha = (\widetilde{s}_a^b)$ un repère quelconque de E/U_α. Nous cherchons un repère $s_\alpha = (s_a^b)$ de $E/U_\alpha, s_\alpha = A_a^b \widetilde{s}_b$, de sorte que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s_\alpha = 0$. Soit $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ le repère tangent à une feuille, associé aux coordonnées $(x^i, x^{\hat{i}})$, et soit $\omega = (\omega_a^b)$ la matrice des 1-formes de connexion de ∇ par rapport à $\widetilde{s}_\alpha$. Alors le champ de matrices $A = (A_a^b)$ satisfait aux équations

$$\frac{\partial A_a^b}{\partial x^i} + A_a^c \Gamma_c{}^b{}_i = 0 \tag{1}$$

où $\omega_a^b = \Gamma_a{}^b{}_i dx^i + \Gamma_a{}^b{}_{\hat{i}} dx^{\hat{i}}$. En considérant $(x^{\hat{i}})$ des paramètres, les conditions d'intégrabilité pour ce système (ou le théorème de Frobenius) sont

$$\frac{\partial \Gamma_a{}^b{}_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_a{}^b{}_k}{\partial x^i} + \Gamma_a{}^c{}_i \Gamma_c{}^b{}_k - \Gamma_a{}^c{}_k \Gamma_c{}^b{}_i = 0 \tag{2}$$

D'autre part, si Ω dénote la courbure de ∇, on a $\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = 0, i, k = 1, 2, \ldots, p$ et ces relations coincident avec (2). Donc, le champ de matrices A existe et de plus sur $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ on a $\nabla_X s_\alpha = \nabla_X s_\beta = 0, X \in \Gamma(\mathcal{F}), s_\alpha = A_{\alpha\beta} s_\beta$. Alors, d'après le lemme 3, l'ensemble $(s_\alpha, A_{\alpha\beta})$ définit une $s.\mathcal{F}-p.$

On suppose maintenant que ξ admet une $s.\mathcal{F}-p.$ Nous définissons $\overset{\alpha}{\nabla}_X s_\alpha = 0, \alpha \in I, X \in \Gamma(T\mathcal{F})$. Pour $s \in \Gamma(E/U_\alpha), \overset{\alpha}{\nabla}_X s = \overset{\beta}{\nabla}_X s$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. En utilisant l'ensemble d'opérateurs $\{\overset{\alpha}{\nabla}\}$ on peut définir une application $\nabla : \Gamma(T\mathcal{F}) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E), \nabla_X s$, d'une manière classique [2]. L'opérateur ∇_X satisfait aux conditions de la définition d'une connexion linéaire, pour $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$. Soient $\overline{\nabla}$ une connexion linéaire de ξ et $T^\perp\mathcal{F}$ un sous-fibré supplémentaire de $T\mathcal{F}$ par rapport à TM. L'application $D : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, $D_Z s = \nabla_X s + \overline{\nabla}_{X^\perp} s, s \in \Gamma(E), Z = X + X^\perp \in \Gamma(TM), X^\perp \in \Gamma(T^\perp\mathcal{F}), X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ est une connexion linéaire. Pour accomplir la démonstration, on utilise maintenant le résultat suivant

Lemme 5. *La connexion D est $\mathcal{F}$-plate.*

Démonstration. On a $D_X s = \nabla_X s, s \in \Gamma(E), X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et donc $D_X s_\alpha = \theta_\alpha(X) s_\alpha = 0$ où $\theta_\alpha = (\theta_a^b)$ est la matrice des 1-formes de connexion de D par rapport à s_α. Donc $\theta_a^b\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)=0$. Les équations de structure de D donnent $R\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right)=0, i,k=1,2,\ldots,p$, où R est la courbure de D.

D'après la démonstration de la réciproque du théorème 4, on remarque que pour l'existence de D il n'est pas nécessaire que U_α soient connexes.

L'existence d'une $s.\mathcal{F}-p.$ dans un fibré vectoriel ξ a des implications sur l'anneau caractéristique de ξ. Soit I l'idéal dans l'algèbre des formes différentielles sur U_α, engendré par les 1-formes qui s'annulent sur $\Gamma(T\mathcal{F}/U_\alpha)$. Soit Φ^r une fonction polynomiale invariante de degré $r>m-p$ et $\Omega=(\Omega_{ab})$ la matrice de R sur U_α. Alors on a

Lemma 6. *Les 2-formes Ω_{ab} appartiennent 'a l'idéal I et $\Phi^r(\Omega)=0$.*
On obtient ainsi.

Théorème 7. *Soient M une variété différentiable de dimension m munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension p et $\xi=(E,\pi,M)$ un fibré vectoriel d'espace total E et la base M. S'il existe une $s.\mathcal{F}-p.$ dans ξ, alors*

$$\mathit{Pont}^s(E)=0, s>2(m-p.)$$

Corollaire 1. Soient $\xi_1=(E_1,p_1,M),\xi=(E,\pi,M)$ deux fibrés vectoriels isomorphes de base la variété $\mathcal{F}$-feuilletée M. S'il existe une $s.\mathcal{F}-p.$ dans ξ, alors

$$\mathrm{Pont}^s(E_1)=0, s>2(m-p),$$

où $m=\dim M, p=\dim\mathcal{F}$.

La proposition 2 et le théorème 7 donnent le résultat bien connu [2]:

Corollaire 2. Pour le fibré transverse Q de $\mathcal{F}$ on a

$$\mathrm{Pont}^s\,(Q)=0,\quad s>2(m-p).$$

3. Cas du fibré tangent. On dit qu'une $s.\mathcal{F}-p.$ dans le fibré tangent TM est intégrable si elle est définie par les champs de repères naturels des cartes de M et les matrices jacobiennes associées. Soit $\mathcal{F}_F$ l'atlas déterminé de $\mathcal{F}$ sur une feuille F de $\mathcal{F}$. Les transformations de coordonnées des $\mathcal{F}_F$ sont données par relations de la forme $x^i=x^i(x^{i'},x^{\widehat{i'}})$, où $x^{\widehat{i'}}$=constant.

Si l'ensemble des repères naturels de $\mathcal{F}$ détermine une $s.\mathcal{F}-p.$ dans TM, alors le changement de coordinnées locales de $\mathcal{F}$ sont de la forme $x^i = a^i_{i'} x^{i'} + b^i(x^{\widehat{i'}}) + a^i, x^{\widehat{i}} = x^{\widehat{i}}(x^{\widehat{i'}})$, où $a^i_{i'}, a^i$ sont constantes, dét $|a^i_{i'}| \neq 0$ et $b^i(x^{\widehat{i'}})$ sont des fonctions différentiables. Donc $\mathcal{F}$ détermin une structure localement offine [3] sur F. Il en résulte

Théorème 8. *Soit M une variété munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$. Alors l'ensemble des repères naturrels de $\mathcal{F}$ et les matrices jacobiennes des transformations associées détermine une $s.\mathcal{F}-p.$ (intégrable) dans TM si et seulement si $\mathcal{F}$ détermine une structure localement affine sur chaque feuille de $\mathcal{F}$.*

Corollaire. Si $\mathcal{F}$ ést le feuilletage de M donné par ses composantes connexes, alors l'ensemble des repères naturels de $\mathcal{F}$ et les matrices jacobiennes déterminent une $s.\mathcal{F}-p.$ dans TM si et seulement si $\mathcal{F}$ définit une structure localement affine sur M.

Bibliographie

1. Apreutesei, C. – *Quelques classes caractéristiques et G_T-structures,* C.R. Acad. Sci. Paris 280, seria A(1975), 41-44.
2. Bott, R., Gitler, S., James, M.I. – *Lectures on characteristic classes and foliations* (Lectures Notes, 270, 1972).
3. Brickell, F. and Clark, S.R. – *Integrable almost tangent structures*, J. Differential Geometry, 9, 1974, 557-563.
4. Candel, A., Conlon, L. and Foliations, I. – *Graduate studies in Mathematics*, vol. 23, AMS, 1999.
5. Kobayashi, S. – *Differential Geometry of Complex Vector Bundles* (Knõ memorial lectures 5), M.S. Japan, 1987.
6. Duc, V.T. – *Sur la géomètrie différentielle des fibres vectories,* Kõdai Math. Sem. Rep. 26, 1975, 349-408.

Received: 3.VII.2003

Université "Al.I. Cuza",
Séminaire Mathematique "Al. Myller",
Iaşi, 700506
ROUMANIE,