ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I. CUZA" IAŞI
Tomul LI, s.I, Matematică, 2005, f.1

SUBMERSIONS PRESQUE HYPERHERMITIENNES PRESQUE DE CONTACT

BY

T. TSHIKUNA-MATAMBA

Abstract. In this paper, we discuss some geometric properties of Riemannian submersions whose total space is an almost hyper-Hermitian manifold, the base space being an almost contact metric manifold with 3-structure or an almost Hermitian almost contact metric manifold.

Mathematics Subject Classification 2000 : 53C26, 53C15.

Key words : Submersions riemanniennes, variétés presque hyperhermitiennes, variétés métriques à 3-structures presque de contact, variétés métriques presque de contact presque hermitiennes.

1. Introduction. Dans [15], Watson a initié une étude des G, G'-submersions riemanniennes, qui sont des submersions commutant avec les champs de tenseurs de structure.

Par champ de tenseurs de structure nous entendons un champ de tenseurs de type $(1,1)$ qui intervient dans la classification des structures riemanniennes. L'exemple le plus familier est celui de la structure presque complexe J avec laquelle on définit la structure presque hermitienne.

Dans [4], Chinea a introduit l'étude des submersions riemanniennes dont l'espace total est une variété presque hermitienne tandis que l'espace de base est une variété métrique presque de contact.On peut classer ce type de submersions parmi les submersions riemanniennes qui ne commutent pas avec les champs de tenseurs de structure [11].

Le but de cette note est d'étendre l'étude de Chinea au cas où l'espace total est une variété presque hyperhermitienne ; pour ce faire, l'espace de

base doit avoir trois structures. Lorsque l'espace de base possède trois structures presque de contact, nous étudions les submersions de type I tandis que si c'est une variété métrique presque de contact presque hermitienne, nous étudions les submersions de type II.

Ce papier est organisé de la manière suivante :

Le §2 est consacré au survol des différentes classes des variétés qui feront l'objet de cette étude.

Au §3, nous étudions les submersions de type I tandis qu'au §4, nous examinons les submersions de type II.

Le §5 est consacré aux exemples de ces deux types de submersions.

Notons que les submersions que nous étudions permettent d'envisager par exemple, sur une variété presque hyperhermitienne, l'existence des sous-variétés semi-invariantes ayant 3 ou 2 structures presque de contact. C'est notamment le cas des fibres de l'un ou l'autre type de submersions définies.

A travers tout ce texte, nous noterons par U, V, et W les champs de vecteurs verticaux et par X, Y et Z ceux de la distribution horizontale. Les champs de vecteurs quelconques seront notés par D, E et G. Les tenseurs et autres objets sur les fibres seront notés par l'accent circonflexe " ˆ " tandis que sur l'espace de base, on les désignera par le signe prime " $'$ ". Par exemple ∇, $\hat{\nabla}$ et ∇' désigneront les connexions riemanniennes de l'espace total,des fibres et de l'espace de base respectivement.

Je remercie Monsieur F. Blanchard ainsi que tous les membres de l'Institut de Mathématiques de Luminy, pour m'avoir invité et m'avoir offert le cadre nécessaire à cette recherche durant mon séjour scientifique en juin 2003.

2. Préliminaires sur les variétés. Ce paragraphe est consacré au survol des différentes classes des variétés sur lesquelles porte cette étude.

Par variété presque hermitienne, on entend une variété riemannienne, (M, g), de dimension paire $2m$, munie d'une structure presque complexe J telle que $J^2 D = -D$ et $g(JD, JE) = g(D, E)$.

La deuxième condition signifie que g est une métrique compatible avec la structure presque complexe J. Dans ce cas, on dit que (g, J) est une structure presque hermitienne. Nous noterons par Ω la 2-forme de Kähler sur (M, g, J) définie par

$$\Omega(D, E) = g(D, JE) \tag{1}$$

En notant par ∇ la connexion de Levi-Civita attachée à g, et par $d\Omega$ la différentielle extérieure de Ω, les identités ci-après sont bien connues.

$$(\nabla_D J)\, E = \nabla_D JE - J\nabla_D E; \tag{2}$$

$$(\nabla_D \Omega)\,(E, G) = g\,(E, (\nabla_D J)\, G)\,; \tag{3}$$

$$3d\Omega\,(D, E, G) = \sigma\,\{(\nabla_D \Omega)\,(E, G)\}\,, \tag{4}$$

où σ désigne la somme cyclique sur D, E et G.

Dans [5], A. Gray et L.M. Hervella ont obtenu une classification complète des variétés presque hermitiennes. Nous reprenons ci-après les définitions de celles dont nous aurons besoin.

On dit qu'une variété presque hermitienne (M, g, J) est :

(a) *kählérienne* si $\nabla J = 0$;

(b) *presque kählérienne* si $d\Omega = 0$;

(c) *nearly kählérienne* si $(\nabla_D J)\, D = 0$;

(d) *quasi kählérienne* si $(\nabla_D \Omega)\,(E, G) + (\nabla_{JD} \Omega)\,(JE, G) = 0$;

(e) une G_1-*variété* si $(\nabla_D \Omega)\,(D, E) - (\nabla_{JD} \Omega)\,(JD, E) = 0$;

(f) une G_2-*variété* si $\sigma\,\{(\nabla_D \Omega)\,(E, G) - (\nabla_{JD} \Omega)\,(JE, G)\} = 0$.

On appelle *structure presque hypercomplexe* la donnée d'un triplet (J_1, J_2, J_3) des structures presque complexes qui se comportent comme des quaternions en vérifiant les conditions suivantes

$$J_i^2 D = -D; \tag{5}$$

$$J_1 J_2 = J_3 = -J_2 J_1. \tag{6}$$

Lorsqu'il existe un tenseur métrique g tel que , pour tout J_i, (g, J_i) est kählérienne, on dit que $\left(g, (J_i)_{i=1}^3\right)$ est *une structure hyperkählérienne* [6]. Pour tout J_i, le tenseur de Nijenhuis, N_{J_i}, est un tenseur de type $(1, 2)$ défini par

$$N_{J_i}\,(D, E) = [D, E] + J_i\,[J_i D, E] + J_i\,[D, J_i E] - [J_i D, J_i E]\,.$$

Dire que (g, J_i) est kälérienne signifie que N_{J_i} est intégrable, c'est-à-dire que $N_{J_i}(D, E) = 0$. D'après Calabi [3], pour qu'une structure soit hyperkählérienne, il suffit que, parmi les $(g, (J_i)_{i=1}^3)$ deux de ces structures le soient. On définit une 4-forme différentielle

$$\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{3} \Omega_i \wedge \Omega_i.$$

Lorsque $\nabla\tilde{\Omega} = 0$, on dit que $\left(g, (J_i)_{i=1}^3\right)$ est hyperkählérienne.

Etant donné que, parmi les différentes classes obtenues par Gray et Hervella [5], certaines ne sont pas kählériennes, et donc ne sont pas définies par des structures intégrables, il n'est donc pas facile de trouver des relations de définition de ces structures en termes de la 4-forme différentielle $\tilde{\Omega}$ ci-dessus. C'est pour cette raison qu'on se rabat sur les 2 -formes différentielles Ω_i.

A l'instar des variétés presque hermitiennes, nous convenons de parler des *variétés presque hyperhermitiennes* et adoptons la terminologie suivante. Si les deux structures (g, J_i) sont dans l'une des classes définies par Gray et Hervella, nous dirons que $\left(g, (J_i)_{i=1}^3\right)$ est dans cette classe. Ceci nous permet de contourner la difficulté rencontrée par Alekseevsky et Marchiafava [1] pour définir les variétés quasi hyperkählériennes.

Pour une étude approfondie des structures presque hypercomplexes, le lecteur intéressé peut consulter [2] et [13].

On appelle variété métrique presque de contact une variété riemannienne, (M, g), de dimension impaire, $2m+1$, munie d'une (φ, ξ, η)-structure vérifiant les conditions suivantes

(1) ξ est un champ de vecteurs caractéristique sur M,

(2) η est une 1-forme différentielle telle que $\eta(\xi) = 1$,

(3) φ est un champ de tenseurs de type $(1, 1)$ tel que $\varphi^2 D = -D + \eta(D)\xi$,

(4) $g(\varphi D, \varphi E) = g(D, E) - \eta(D)\eta(E)$.

La dernière condition exprime que g est une métrique compatible avec la (φ, ξ, η)-structure ; on dit que (g, φ, ξ, η) est une structure métrique presque de contact.

Comme dans le cas des variétés presque hermitiennes, on définit une 2-forme différentielle ϕ, appelée *forme fondamentale* en posant

$$\phi(D, E) = g(D, \varphi E).$$

Les identités analogues à (2), (3) et (4) sont également établies. La dérivée covariante et la forme différentielle extérieure de η sont définies par

$$(\nabla_D \eta) E = g(E, \nabla_D \xi), et \tag{7}$$

$$2d\eta(D, E) = (\nabla_D \eta) E - (\nabla_E \eta) D. \tag{8}$$

Dans [9], Sasaki et Hatakeyama ont défini un champ de tenseurs $N^{(1)}$ de type $(1, 2)$ en posant

$$N^{(1)}(D, E) = [\varphi, \varphi](D, E) + 2d\eta(D, E)\xi, \tag{9}$$

dans lequel $[\varphi, \varphi]$ désigne le tenseur de Nijenhuis de φ .

Nous rappelons, ci-après, les relations de définition des classes dont nous aurons besoin par la suite. On dit qu'une variété métrique presque de contact est :

(a) *cosymplectique* si $\nabla\varphi = 0$;

(b) *presque cosymplectique* si $d\phi = 0 = d\eta$;

(c) *nearly cosymplectique* si

$$(\nabla_D \varphi) D = 0;$$

(d) *quasi-K-cosymplectique* si

$$(\nabla_D \varphi) E + (\nabla_{\varphi D} \varphi) \varphi E - \eta(E)(\nabla_{\varphi D} \eta) = 0;$$

(e) une G_1-*sasakienne* si

$$(\nabla_D \varphi) D - (\nabla_{\varphi D} \varphi) \varphi D + \eta(D)(\nabla_{\varphi D} \xi) = 0;$$

(f) une G_2-*sasakienne* si

$$\sigma\{(\nabla_D \phi)(E, G) - (\nabla_{\varphi D} \phi)(\varphi E, G) - \eta(E)(\nabla_{\varphi D} \eta) G\} = 0.$$

Soient $(\varphi_i, \xi_i, \eta_i)$ trois structures presque de contact telles que chacune soit compatible avec la structure riemannienne g sur une variété différentiable M. On dit que $\left(M, g, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^3\right)$ est une variété métrique à 3-structures presque de contact [7], si pour toute permutation cyclique (i, j, k) de $(1, 2, 3)$, les conditions suivantes sont remplies :

(1) $\eta_i(\xi_j) = 0 = \eta_j(\xi_i)$;
(2) $\varphi_i\xi_j = -\varphi_j\xi_i = \xi_k$;
(3) $\varphi_i \circ \varphi_j - \eta_j \otimes \xi_i = -\varphi_j \circ \varphi_i + \eta_i \otimes \xi_j = \varphi_k$;
(4) $\eta_i \circ \varphi_j = -\eta_j \circ \varphi_i = \eta_k$.

Par la suite, nous dirons simplement une 3-*variété métrique presque de contact*. Comme dans le cas des variétés presque hyperhermitiennes, on définit une 2-forme fondamentale locale, φ_i, en posant

$$\phi_i\,(D, E) = g\,(D, \varphi_i E)\,.$$

Ces variétés sont de dimension $4m + 3$. Leur nomenclature est liée à celle des structures métriques presque de contact sous-jacentes.

Soient (M, g, J) une variété presque hermitienne et $\left(\varphi_i, \eta_i, \xi_i\right)_{i=1}^{2}\Big)$ deux structures presque de contact. On dit que$\Big(M, g, J, (\varphi_i, \xi_i, \eta_i)_{i=1}^{2}\Big)$ est une variété métrique presque de contact presque hermitienne si

(a) chaque $(\varphi_i, \xi_i, \eta_i)$-structure est compatible avec le tenseur métrique g ;
(b) $J\xi_1 = -\xi_2$ et $J\xi_2 = \xi_1$;
(c) $\varphi_i^2 D = -D + \eta_1\,(D)\,\xi_1 + \eta_2\,(D)\,\xi_2$:
(d) $\varphi_1\,(JD) = -J\,(\varphi_1 D) = \varphi_2\,(D)$;
(e) $\varphi_1\,(\varphi_2 D) = -\varphi_2\,(\varphi_1 D) = JD + \eta_1\,(D)\,\xi_2 - \eta_2\,(D)\,\xi_1$;
(f) $\varphi_2\,(JD) = -J\,(\varphi_2 D) = -\varphi_1 D$.

Pour ce qui est des formes fondamentales, on a $\phi_i\,(D, E) = g\,(D, \varphi_i E)$, et $\Omega\,(D, E) = g\,(D, JE)$.

De telles variétés sont de dimension $4m+2$. Pour leur nomenclature, on indique le nom de deux structures presque de co ntact suivi de la structure presque hermitienne. Par exemple, une variété sasakienne-kählérienne est une variété kählérienne ayant deux structures sasakiennes.

3. Submersions de type I

Définition 3.1. *Soient* $\Big(M^{4m}, g, (J_i)_{i=1}^{3}\Big)$ *une variété presque hyperhermitienne et* $\Big(M'^{4m'+3}, g', (\varphi_i', \eta_i', \xi_i')_{i=1}^{3}\Big)$ *une* 3*-variété métrique presque de contact. On dit qu'une submersion riemannienne*

$$f : M^{4m} \longrightarrow M'^{4m'+3}$$

est une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type I si

$$f_* J_i E = \varphi'_i f_* E - \eta'_i (f_* E) \xi'_i.$$

Proposition 3.2. *Soit* $f : M^{4m} \longrightarrow M'^{4m'+3}$ *une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type I. Alors*

(a) *les fibres sont des* 3*-sous-variétés métriques presque de contact semi-invariantes par* J_i ;

(b) $\hat{\phi}_i (U, V) = \Omega_i (U, V)$;

(c) $\hat{\eta}_i (J_i V) = 0$ pour tout V tangent aux fibres ;

(d) $f^* \eta'_i = -\hat{\eta}_i \circ J_i$.

Démonstration. (a) Notons par $\hat{M}$ les fibres et pour tout $i = 1, 2, 3$, nous noterons par μ_i un champ de vecteurs unitaire de M orthogonal à $\hat{M}$. On sait que $\dim \hat{M} = 4 (m - m') - 3$. On définit une 3-structure presque de contact $\left(\hat{\varphi}_i, \hat{\xi}_i, \hat{\eta}_i\right)$ sur les fibres $\hat{M}$ en posant

$$\hat{\xi}_i = -J_i \mu_i; \tag{10}$$

$$\hat{\eta}_i (E) = g (J_i E, \mu_i) ; \tag{11}$$

$$\hat{\varphi}_i E = J_i E - \hat{\eta}_i (E) \mu_i. \tag{12}$$

Par la relation (12), on voit que $\left(\hat{\varphi}_i, \hat{\xi}_i, \hat{\eta}_i\right)$ est semi-invariante par J_i.

(b) Prenons deux champs de vecteurs U et V tangents aux fibres. On a

$$\hat{\phi}_i (U, V) = g (U, \hat{\varphi}_i V) , \tag{1a}$$

Comme $\hat{\varphi}_i V = J_i V - \hat{\eta}_i (V) \mu_i$, alors (1a) donne

$$\hat{\phi}_i (U, V) = \Omega_i (U, V) - \hat{\eta}_i (V) g (U, \mu_i) \tag{1b}$$

Par ailleurs, $g (U, \mu_i) = 0$ car μ_i est orthogonal à $\hat{M}$; dès lors (1b) donne $\hat{\phi}_i (U, V) = \Omega_i (U, V)$.

(c) Etant donné que $\hat{\eta}_i (J_i V) = g \left(J_i^2 V, \mu_i\right) = -g (V, \mu_i)$ et que $g (V, \mu_i) = 0$, on a $\hat{\eta}_i (J_i V) = 0$.

Pour l'énoncé (d), rappelons d'abord qu'un champ de vecteurs X est dit basique [8] s'il est horizontal et qu'il correspond , par f, à un champ de vecteurs noté X_* de l'espace de base. En fait $X_* = f_*X$.

Prenons X basique et calculons $f^*\eta_i'(X)$. On a

$$\begin{aligned} f^*\eta_i'(X) &= \eta_i'(f_*X) = g'(f_*X, \xi_i') = g'(f_*X, f_*\mu_i) = \\ &= f^*g'(X, \mu_i) = g\left(X, J_i\hat{\xi}_i\right) = -g\left(J_iX, \hat{\xi}_i\right) = -\hat{\eta}_i(J_iX); \end{aligned}$$

ce qui donne la preuve de (d). □

Proposition 3.3. *Soit $f : M^{4m} \longrightarrow M'^{4m'+3}$une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type I telle que μ_i est parallèle. Si M est hyperkählérienne, presque hyperkählérienne, nearly hyperkählérienne ou quasi hyperkählérienne, alors M' est* 3*-cosymplectique,* 3*-presque cosymplectique,* 3*-nearly cosymplectique ou* 3*-quasi-K-cosymplectique respectivement.*

Démonstration. Considérons le cas où M est hyperkählérienne. On sait que, en recourant aux relations analogues à (2),

$$(2a) \qquad \left(\nabla'_{X_*\varphi_i'}\right) Y_* = \nabla'_{X_*}\varphi_i'Y_* - \varphi_i'\nabla'_{X_*}Y_*.$$

En calculant attentivement, on peut montrer que l'on a

$$\nabla'_{X_*}\varphi_i'Y_* = f_*\left(\nabla_X J_iY + g(Y, \mu_i)(\nabla_X\mu_i)\right),$$

et $\varphi_i'\nabla'_{X_*}Y_* = f_*\left(J_i\nabla_XY + g(\nabla_XY, \mu_i)\right)$ de telle sorte que (2a) donne

$$(2b) \quad \left(\nabla'_{X_*}\varphi_i'\right)Y_* = f_*\left(\nabla_*J_iY + g(Y, \mu_i)(\nabla_X\mu_i) - J_i\nabla_XY - g(\nabla_XY, \mu_i)\right)$$

Dès lors, si μ_i est parallèle, alors (2b) donnera

$$(2c) \qquad \left(\nabla'_{X_*}\varphi_i'\right)Y_* = f_*\left(\nabla_XJ_iY - J_i\nabla_XY\right).$$

Il est clair que si M est hyperkählérienne, alors le deuxième membre de (2c) s'annule et on a $\left(\nabla'_{X_*}\varphi_i'\right)Y_* = 0$; ce qui définit une structure 3-cosymplectique.

Les autres énoncés sont établis de manière analogue en recourant aux relations de définition de l'espace total de fibration. □

Proposition 3.4. *Soit $f : M^{4m} \longrightarrow M'^{4m'+3}$ une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type I telle que μ_i et $J_i\mu_i$ sont tous*

parallèles. Si M est hyperkählérienne, presque hyperkählérienne, nearly hyperkählérienne ou quasi hyperkahlérienne avec μ_i analytique, alors les fibres sont des variétés 3-cosymplectiques, 3-presque cosymplectiques, 3-nearly cosymplectiques ou 3-quasi-K-cosymplectiques respectivement.

Démonstration. Considérons trois champs de vecteurs U, V et W tangents aux fibres et examinons le cas où M est presque hyperkählérienne. Il sera question de montrer que

$$d\hat{\phi}_i = 0 = d\hat{\eta}_i.$$

En effet, par la proposition 3.2(b), on a vu que $\hat{\phi}_i\,(U,V) = \Omega_i\,(U,V)$; ce qui fait que

$$d\hat{\phi}_i\,(U,V,W) = d\Omega_i\,(U,V,W)\,, \tag{3a}$$

On voit que $d\hat{\phi}_i = 0$ car $d\Omega_i = 0$ comme M est presque hyperkählérienne. Il reste à montrer que $d\hat{\eta} = 0$. Par la relation (8), on a

$$2d\hat{\eta}_i\,(U,V) = \left(\hat{\nabla}_U\hat{\eta}_i\right)V - \left(\hat{\nabla}_V\hat{\eta}_i\right)U, \tag{3b}$$

et en utilisant (7), la relation (3b) donnera

$$2d\hat{\eta}_i\,(U,V) = g\left(V,\hat{\nabla}\hat{\xi}_i\right) - g\left(U,\hat{\nabla}_V\hat{\xi}_i\right). \tag{3c}$$

Comme $\hat{\xi}_i = -J_i\mu_i$ alors (3c) devient

$$2d\hat{\eta}_i\,(U,V) = g\left(V,-\hat{\nabla}_U J_i\mu_i\right) - g\left(U,-\hat{\nabla}_V J_i\mu_i\right), \tag{3d}$$

dont on déduit $d\hat{\eta}_i = 0$ lorsque $J_i\mu_i$ est parallèle.
Les autres énoncés sont établis par le mme procédé. □

Proposition 3.5. *Soit $f : M^{4m} \longrightarrow M'^{4m'+3}$ une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type I telle que μ_i est analytique et $J_i\mu_i$ est parallèle. Si l'espace total M est une variété G_1-hyperkählérienne, alors l'espace de base M' ainsi que les fibres possèdent trois structures G_1-sasakiennes.*

Démonstration. Rappelons qu'un champ de vecteurs D est analytique si, pour tout autre champ de vecteurs E, on a $\nabla_D E = 0$.

Examinons le cas de la structure de l'espace de base lorsque l'espace total est une variété G_1-hyperkählérienne. Considérons un champ de vecteurs basique X. On veut montrer que, sur l'espace de base, on a

$$\left(\nabla'_{X_*}\varphi'_i\right)X_* - \left(\nabla'_{\varphi'_iX_*}\varphi'_i\right)\varphi'_iX_* + \eta'_i\left(X_*\right)\left(\nabla'_{\varphi'_iX_*}\xi'_i\right) = 0.$$

Etant donné que l'espace total est une variété G_1-hyperkählérienne, alors $\left(\nabla_X J_i\right)X - \left(\nabla_{J_iX}J_i\right)J_iX = 0$, ce qui équivaut à

$$\nabla_X J_iX - J_i\nabla_X X + \nabla_{J_iX}X + J_i\nabla_{J_iX}J_iX = 0.$$

Avec un peu de patience, il suffira de calculer

$$f_*\left(\nabla_X J_iX - J_i\nabla_X X + \nabla_{J_iX}J_iX\right),$$

en utilisant le fait que $f_*J_iX = \varphi'_if_*X - \eta'_i\left(f_*X\right)\xi'_i$ et que μ_i est analytique et $J_i\mu_i$ parallèle pour obtenir la preuve. Par exemple

$$f_*\nabla_X J_iX = \nabla_{f_*X}f_*J_iX = \nabla'_{X_*}\varphi'_if_*X - \eta'_i\left(X_*\right)\left(\nabla'_{X_*}\xi'_i\right);$$

soit $f_*\nabla_X J_iX = \nabla'_{X_*}\varphi'_iX_* - \eta'_i\left(X_*\right)\left(\nabla'_{X_*}\xi'_i\right)$, qui conduit à la preuve.

Le cas de la structure des fibres sera établi de manière analogue qu'à la proposition suivante, relative aux variétés G_2-hyperkählériennes. □

Proposition 3.6. *Soit $f : M^{4m} \longrightarrow M'^{4m'+3}$ une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type I telle que μ_i est analytique et $J_i\mu_i$ est parallèle. Si l'espace total M est une variété G_2-hyperkählérienne, alors l'espace de base M' ainssi que les fibres possèdent trois structures G_2-sasakiennes.*

Démonstration. Examinons la structure des fibres. Etant donné que l'espace total est une variété G_2-hyperkählérienne, alors

$$\sigma\left\{\left(\nabla_U\Omega_i\right)\left(V,W\right) - \left(\nabla_{J_iU}\Omega_i\right)\left(J_iV,W\right)\right\} = 0. \tag{4b}$$

Comme $\Omega_i\left(U,V\right) = \hat{\phi}_i\left(U,V\right)$, alors

$$\left(\nabla_U\Omega_i\right)\left(V,W\right) = \left(\hat{\nabla}_U\hat{\phi}_i\right)\left(V,W\right). \tag{4c}$$

Par ailleurs, d'après (12), on a $J_iU = \hat{\varphi}_iU + \hat{\eta}_i\left(U\right)\mu_i$, de telle façon que

$$\left(\nabla_{J_iU}\Omega_i\right)\left(J_iV,W\right) = \left(\hat{\nabla}_{\hat{\varphi}_iU+\hat{\eta}_i(U)\mu_i}\hat{\phi}_i\right)\left(\hat{\varphi}_iV + \hat{\eta}_i\left(V\right)\mu_i, W\right), \tag{4d}$$

ce qui, compte tenu de l'analyticité de μ_i, donne

$$(4e) \qquad (\nabla_{J_iU}\Omega_i)(J_iV,W) = \left(\nabla_{\hat{\varphi}_iU}\hat{\phi}_i\right)(\hat{\varphi}_iV,W) + \hat{\eta}_i(V)\left(\nabla_{\hat{\varphi}_iV}\hat{\eta}_i\right)W.$$

Dès lors, les relations (4c) et (4e) conduisent à

$$\sigma\left\{(\nabla_U\Omega_i)(V,W) - (\nabla_{J_iU}\Omega_i)(J_iV,W)\right\} =$$
$$= \sigma\left\{\left(\hat{\nabla}_U\hat{\phi}_i\right)(V,W) - \left(\hat{\nabla}_{\hat{\varphi}_iU}\hat{\varphi}_i\right)(\hat{\varphi}_iV,W) - \hat{\eta}_i(V)\left(\hat{\nabla}_{\hat{\varphi}_iU}\hat{\eta}_i\right)W\right\} = 0$$

qui montre que les fibres possèdent trois structures G_2-sasakiennes.

Le cas de la structure de l'espace de base s'établit comme à la proposition 3.5. □

4. Submersions de type II

Définition 4.1. *Soient* $\left(M^{4m}, g, (J_i)_{i=1}^3\right)$ *une variété presque hyperhermitienne et* $\left(M'^{4m'+2}, g', J', (\varphi'_i, \xi'_i, \eta'_i)_{i=1}^2\right)$ *une variété métrique presque de contact presque hermitienne. On dit qu'une submersion riemannienne*

$$f : M^{4m} \longrightarrow M'^{4m'+2}$$

est une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type II si :

(a) $f_*J_1E = J'f_*E$,
(b) $f_*J_2E = \varphi'_1 f_*E - \eta'_1(f_*E)\xi'_1$,
(c) $f_*J_3E = \varphi'_2 f_*E - \eta'_2(f_*E)\xi'_2$.

Proposition 4.2. *Soit* $f : M^{4m} \longrightarrow M'^{4m'+2}$ *une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type II. Alors*

(a) *la distribution verticale et la distribution horizontale sont invariantes par* J_1 ;
(b) *les fibres sont des variétés métriques presque de contact presque hermitiennes , semi-invariantes par* J_2 *et* J_3 ;
(c) $f^*\Omega' = \Omega_1$;
(d) $\hat{\phi}_i(U,V) = \Omega_i(U,V)$;
(e) $\hat{\eta}_i(J_{i+1}V) = 0$, pour tout $i = 1,2$ *et* V tangent aux fibres ;

(f) $f^*\eta'_i = -\hat{\eta}_i \circ J_{i+1}$, pour $i = 1, 2$;

(g) $\mathcal{H}(\nabla_X J_1) Y$ est basique associé à $\left(\nabla'_{X_*} J'\right) Y_*$ lorsque X et Y sont basiques

Démonstration. Etant donné que $f_* J_1 = J' f_*$, alors les assertions (a) et (c) s'établissent comme dans le cas des submersions presque hermitiennes [14]. L'assertion (g) découle du lemme 1 de [8]. Le reste est établi comme à la proposition 3.2. □

Notons que ce type de submersions est à rapprocher des submersions métriques presque de contact presque hermitiennes de type II, étudiées dans [10] et [12].

Proposition 4.3. *Soit $f : M^{4m} \longrightarrow M'^{4m'+2}$ une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type II telle que μ_1 et μ_2 sont tous parallèles. Si l'espace total M est hyperkählérienne, presque hyperkählérienne, nearly hyperkählérienne ou quasi hyperkählérienne, alors l'espace de base M' est cosymplectique-kählérienne, nearly cosymplectique-nearly kählérienne ou quasi-K-cosymplectique-quasi kählérienne respectivement.*

Démonstration. Considérons le cas où M est nearly hyperkählérienne et prenons un champ de vecteurs basique X. Par la proposition 4.2(g), il est clair que $\mathcal{H}(\nabla_X J_1) X$ est basique associé à $\left(\nabla'_{X_*} J'\right) X_*$. Ceci fait que $\left(\nabla'_{X_*} J'\right) X_* = 0$ car $(\nabla_X J_1) X = 0$.

Il reste à montrer que $(\varphi'_1, \xi'_1, \eta'_1)$ et $(\varphi'_2, \xi'_2, \eta'_2)$ sont des structures nearly cosymplectiques. En effet, comme à la proposition 3.3, il n'est pas difficile d'établir que si μ_1 et μ_2 sont tous parallèles, alors $\left(\nabla'_{X_*} \varphi'_1\right) X_* = f_* (\nabla_X J_2) X$ et $\left(\nabla'_{X_*} \varphi'_2\right) X_* = f_* (\nabla_X J_3) X$, dont on déduit $\left(\nabla'_{X_*} \varphi'_1\right) X_* = 0 = \left(\nabla'_{X_*} \varphi'_2\right) X_*$ puisque $(\nabla_X J_2) X = 0 = (\nabla_X J_3) X$.

Les autres assertions sont établies de manière analogue. □

Proposition 4.4. *Soit $f : M^{4m} \longrightarrow M'^{4m'+2}$ une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type II telle que μ_1 et μ_2 sont tous parallèles. Si l'espace total M est hyperkählérienne, presque hyperkählérienne, nearly hyperkählérienne ou quasi hyperkählérienne avec μ_1 et μ_2 analytiques, alors les fibres sont des variétés cosymplectiques-kählériennes, presque cosymplectiques-presque kählériennes, nearly cosymplectiques-nearly kählériennes ou quasi-K-cosymplectiques-quasi kählériennes respectivement.*

Démonstration. Comme dans d'autres cas, il suffit d'utiliser les relations de définition des variétés considérées ainsi que les relations (10), (11) et (12). □

Proposition 4.5. *Soit $f : M'^{4m} \longrightarrow M'^{4m'+2}$ une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type II telle que μ_1 et μ_2 sont analytiques tandis que $J_2\mu_1$ et $J_3\mu_2$ sont tous parallèles. Si l'espace total est une G_1-variété hyperkählérienne, alors l'espace de base ainsi que les fibres possèdent deux structures G_1-sasakiennes et une structure de G_1-variété.*

Démonstration. Comme à la proposition 3.5, nous pouvons également considérer le cas où l'espace total est une G_1-variété hyperkählérienne. Prenons deux champs de vecteurs basiques X et Y. On veut montrer que, sur l'espace de base, on a

$$\left(\nabla'_{X_*}\varphi'_i\right) X_* - \left(\nabla'_{\varphi'_i X_*}\varphi'_i\right) \varphi'_i X_* + \eta'_i\left(X_*\right)\left(\nabla'_{\varphi'_i X_*}\xi'_i\right) = 0 \text{ pour } i = 1, 2$$

et

$$\left(\nabla'_{X_*}\Omega'\right)\left(X_*, Y_*\right) - \left(\nabla'_{J'X_*}\Omega'\right)\left(J'X_*, Y_*\right) = 0.$$

Le cas des structures presque de contact $(\varphi'_i, \xi'_i, \eta'_i)$ se traite comme à la proposition 3.5.

Examinons le cas de la structure presque hermitienne (g', J'). Etant donné que l'espace total possède une G_1-structure hyperkählérienne, alors on a au moins

$$(5a) \qquad \left(\nabla_X\Omega_1\right)\left(X, Y\right) - \left(\nabla_{J_1X}\Omega_1\right)\left(J_1X, Y\right) = 0$$

Mais $f_*J_1X = J'f_*X = J'X_*$. Par ailleurs, on sait que $f^*\Omega' = \Omega_1$ et ceci nous permet de transformer (5a) en

$$(5b) \qquad \left(\nabla_X f^*\Omega'\right)\left(X, Y\right) - \left(\nabla_{J_1X} f^*\Omega'\right)\left(J_1X, Y\right) = 0$$

dont on déduit

$$\left(\nabla'_{X_*}\Omega'\right)\left(X_*, Y_*\right) - \left(\nabla'_{J'X_*}\Omega'\right)\left(J'X_*, Y_*\right) = 0. \square$$

Proposition 4.6. *Soit $f : M^{4m} \longrightarrow M'^{4m'+2}$ une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type II telle que μ_1 et μ_2 sont analytiques tandis que $J_2\mu_1$ et $J_3\mu_2$ sont tous parallèles. Si l'espace total est*

une G_2-variété hyperkählérienne, alors l'espace de base ainsi que les fibres possèdent deux structures G_2-sasakiennes et une structure de G_2-variété.

Démonstration. La structure de l'espace de base est établie comme à la proposition 4.4. Examinons le cas de la structure des fibres. Il est question d'établir que

$$(5c) \quad \sigma\left\{\left(\hat{\nabla}_U\hat{\phi}_i\right)(V,W)-\left(\hat{\nabla}_{\hat{\varphi}_iU}\hat{\phi}_i\right)(\hat{\varphi}_iV,W)-\hat{\eta}_i(V)\left(\hat{\nabla}_{\hat{\varphi}_iU}\hat{\eta}_i\right)\right\}=0$$

$$(5d) \qquad \sigma\left\{\left(\hat{\nabla}_U\hat{\Omega}_1\right)(V,W)-\left(\hat{\nabla}_{J_1U}\hat{\Omega}_1\right)(J_1V,W)\right\}=0$$

La relation (5c) a déjà été établie à la proposition 3.5. La relation (5d) découle du fait que les fibres sont invariantes par J_1. □

5. Quelques exemples. Les exemples qui suivent sont construits en nous inspirant de ce qui est fait dans $[16, p.680]$

5.1 Exemple des submersions de type I. Soit $\left(M^{4m}, g, (J_i)_{i=1}^3\right)$ une variété presque hyperhermitienne. Sur M, choisissons trois champs de vecteurs unitaires μ_1, μ_2 et μ_3 deux à deux orthogonaux. Posons $\bar{\xi}_i=-J_i\mu_i$ et notons par $\bar{M}$ une distribution engendrée par les champs de vecteurs $\bar{\xi}_i$. On peut mettre sur $\bar{M}$ une 3-structure presque de contact $\left(\bar{\varphi}_i,\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i\right)$ en posant

$$\bar{\eta}_i(E)=g(J_iE,\mu_i)$$
$$\bar{\varphi}_iE=J_iE-\bar{\eta}_i(E)\mu_i.$$

Etant donné que $\bar{M}$ est une sous-variété de M^{4m}, alors $\dim\bar{M}=4p-3$. On peut montrer que $\bar{M}$ est une distribution régulière de telle manière que $M^{4m}/\bar{M}$ a un sens. Le quotient M^{4m}/M^{4p-3} a pour dimension $4(m-p)+3$ et, de ce fait, possède trois structures presque de contact. La projection canonique

$$f: M^{4m}\longrightarrow M^{4m}/\bar{M}$$

est une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type I.

5.2 Exemple des submersions de type II. Comme à l'exemple précédent, on peut considérer une distribution $\bar{M}$ engendrée par $\bar{\xi}_1$ et $\bar{\xi}_2$ définis par $\bar{\xi}_1=-J_1\mu_1$ et $\bar{\xi}_2=-J_2\mu_2$. On vérifie que $\left(J_3,\left(\bar{\varphi}_i,\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i\right)_{i=1}^2\right)$

est une structure presque de contact presque hermitienne. On a $\dim\bar{M} = 4p-2$. Le quotient M^{4m}/M^{4p-2} est une variété métrique presque de contact presque hermitienne. La projection canonique

$$f : M^{4m} \longrightarrow M^{4m}/\bar{M}$$

est une submersion presque hyperhermitienne presque de contact de type II.

Références

1. Alekseevsky, D.V. ; Marchiafava, S. – *Almost quaternionic Hermitian and quasi-Kähler manifolds*, Complex Structures and Vector Fields, World Sci.Pub.Co., Singapore(1994), pp. 150-175.
2. Alekseevsky, D.V. ; Marchiafava, S. – *Quaternionic structures on a manifold and subordinates structures*, Ann.Mat.Pura Appl., 171(1996), pp. 205-273.
3. Calabi, E. – *Métriques kählériennes et fibrés holomorphes*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 12(1979), pp. 269-294.
4. Chinea, D. – *Transference of structures on almost complex contact metric submersions*, Houston J. Math., 14(1988), pp. 9-22.
5. Gray, A. ; Hervella, L.M. – *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, Ann. Mat. Pura Appl., 123(1980), pp. 35-58.
6. Hitchin, N. – *Hyperkähler manifolds*, Séminaire Bourbaki, 748(1992), pp. 137-166.
7. Kuo, Y.Y. – *On almost contact* 3*-structure*, Tôhoku Math.J., 22(1970), pp. 325-332.
8. O'Neill, B. – *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math.J., 13(1966), pp. 459-469.
9. Sasaki, S. ; Hatakeyama, Y. – *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II*, Tôhoku Math. J., 13(1961), pp. 281-294.
10. Tshikuna-Matamba, T. – *Submersions métriques presque de contact presque hermitiennes de type II*, Ann. Fac. Sci. Université de Kinshasa, Numéro Spécial, 3(1997), pp. 317-332.
11. Tshikuna-Matamba, T. – *Submersions riemanniennes ne commutant pas avec les champs de tenseurs de structure*, An. Sti. Univ. "Al.I.Cuza" Iasi, 46(2000), pp. 251-262.
12. Tshikuna-Matamba, T. – *The differential geometry of almost Hermitian almost contact metric submersions*, Int. J. Math. Math. Sc., 36(2004), pp. 1923-1935.
13. Verbitsky, M. ; Kaledin, D. – *Hyperkähler manifolds*, Internat. Press, 2000.

14. Watson, B. – *Almost Hermitian submersions*, J. Differential Geometry, 11(1976), pp. 147-165.

15. Watson, B. – *G, G'-Riemannian submersions and non linear gauge field equations of a general relativity*, Global Analysis-Analysis on Manifolds, T.M. Rassias, Teubner Press, Leipzig (1983), pp. 324-349.

16. Watson, B. – *Almost contact metric 3-submersions*, Int. J. Math. Math.Sc., 7(1984), pp. 667-688.

Received : 6.IV.2004

Département de Mathématiques,
Institut Supérieur Pédagogique,
B.P. 282-Kananga,
République Démocratique du Congo,
tshikmat@yahoo.fr