ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I. CUZA" DIN IAŞI (S.N.)
MATEMATICĂ, Tomul LV, 2009, f.1

SOUS-VARIETES SEMI-INVARIANTES DES VARIETES PRESQUE HERMITIENNES

BY

T. TSHIKUNA-MATAMBA

Abstract. In this paper, some remarkable classes of semi-invariant submanifolds of almost Hermitian manifolds are determined.

Mathematics Subject Classification 2000: 53D15.

Key words: Variétés presque hermitiennes, variétés métriques presque de contact, sous-variétés.

1. Introduction. L'étude des sous-variétés semi-invariantes d'une variété presque complexe fut initiée par Blair, Ludden et Yano dans [1]. Leur emboîtant les pas, Chinea obtiendra dans [2], une classification des sous-variétés semi-invariantes des variétés quasi kählériennes.

Dans [8] et [9], il est établi que, pour certains types des submersions riemanniennes, les fibres sont des sous-variétés semi-invariantes de l'espace total de fibration.

Le but de ce papier est de faire ressortir, sur des sous-variétés semi-invariantes, des structures presque de contact qui y sont induites.

Ce texte est organisé de la manière suivante.

Le §2 consiste en des rappels des variétés qui interviendront dans cette étude.

Au §3, nous faisons un survol des généralités sur les sous-variétés semi-invariantes. On sait que certaines sous-classes des variétés presque hermitiennes sont définies au moyen de la codifférentielle $\delta\Omega$ de la $2-$forme fondamentale Ω, de Kähler; tel est le cas des W_3, $W_2 \oplus W_3$, W_4 ou $W_2 \oplus W_4$-variétés. Pour cette raison, nous établissons une relation entre la codifférentielle de la forme fondamentale de la variété et celle de la sous-variété semi-invariante.

Le §4 est consacré à la classification des sous-variétés semi-invariantes des G_1-variétés. Nous y avons décélé des relations de définition que nous n'avons pas pu situer dans la classification de Oubina [5]. C'est notamment le cas des relations obtenues aux propositions 4.4, 4.5 et 4.6 que l'on pourrait, peut-être, trouver dans le schéma de Chinea-Gonzalez [3].

Au §5, nous examinons les sous-variétés semi-invariantes des G_2-variétés. Nous y relevons également des relations de définition, par exemple celles établies à la proposition 5.2, qui n'apparaissent pas dans [5].

Le §6 est destiné au cas des variétés semi-kählériennes dont les sous-variétés semi-invariantes sont semi-cosymplectiques si, et seulement si, $J\bar{U}$ est analytique.

Le dernier paragraphe, §7, destiné aux sous-variétés des $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4-$variétés nous ramène à la structure quasi-trans-sasakienne.

2. Préliminaires. Rappelons qu'une variété presque hermitienne est la donnée d'un triplet (M,g,J) qui vérifie les conditions suivantes:

(a) (M,g) est une variété riemannienne;

(b) J est un champ de tenseurs de type (1,1) sur M tel que

$$J^2 D = -D;$$

(c) $g(JD,JE) = g(D,E)\,,\ \forall D,E \in \chi(M)$.

Sur une variété presque hermitienne il existe une 2-forme différentielle notée Ω, appelée *forme fondamentale* ou *forme de Kähler*, définie par

$$\Omega(D,E) = g(D,JE)\,.$$

Un champ de tenseurs qui intervient assez souvent dans l'étude de ces variétés est *le tenseur de Nijenhuis* de la structure presque complexe J. Il est de type (1,2) noté N_J et défini par

$$N_J(D,E) = [D,E] + J[JD,E] + J[D,JE] - [JD,JE]\,.$$

Soit $\{E_1,\ldots,E_m,JE_1,\ldots,JE_m\}$ une J-base locale d'un ouvert quelconque de M. La codifférentielle $\delta\Omega$ est définie par

$$\delta\Omega(D) = -\sum_{i=1}^{m}\{(\nabla_{E_i}\Omega)(E_i,D) + (\nabla_{JE_i}\Omega)(JE_i,D\})\,. \tag{2.1}$$

Dans [4], Gray et Hervella ont établi une classification complète des variétés presque hermitiennes. Nous reprenons les relations de définition des classes qui pourront nous servir par la suite.

On dit qu'une variété presque hermitienne (M,g,J) est:

(1) une W_3-*variété* si $\delta\Omega = 0 = N_J$ ou encore $(\nabla_D\Omega)(E,G) - (\nabla_{JD}\Omega)(JE,G) = 0 = \delta\Omega$;

(2) une $W_1 \oplus W_3$-*variété* si $(\nabla_D\Omega)(D,E) - (\nabla_{JD}\Omega(JD,E) = 0 = \delta\Omega$;

(3) une $W_2 \oplus W_3$-*variété* si $\sigma\{(\nabla_D\Omega)(E,G) - (\nabla_{JD}\Omega)(JE,G)\} = 0 = \delta\Omega$;

(4) *localement conformément kählérienne* (W_4-variété) si $(\nabla_D\Omega)(E,G) = \frac{-1}{2(m-1)}\{g(D,E)\,\delta\Omega(G) - g(D,G)\,\delta\Omega(JG)\}$;

(5) une $W_1 \oplus W_4$-*variété* si

$$(\nabla_D\Omega)(D,E) = \frac{-1}{2(m-1)}\{g(D,D)\,\delta\Omega(E) - g(D,E)\,\delta\Omega(D) - g(JD,E)\,\delta\Omega(JD)\};$$

(6) *localement conformément presque kählérienne* ($W_2 \oplus W_4$-variété) si $d\Omega = \omega\Lambda\theta$ ou encore $\sigma\left\{(\nabla_D\Omega)(E,G) - \frac{1}{m-1}\Omega(D,E)\,\delta\Omega(JG)\right\} = 0$;

(7) une G_1-*variété* ($W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$-variété) si $(\nabla_D\Omega)(D,E) - (\nabla_{JD}\Omega)(JD,E) = 0$ ou bien $g(N_J(D,E),D) = 0$;

(8) une G_2-*variété* ($W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$-variété) si $\sigma\{(\nabla_D\Omega)(E,G) - (\nabla_{JD}\Omega)(JE,G)\} = 0$ ou bien $\sigma\{g(N_J(D,E),JG)\} = 0$.

(9) *semi-kählérienne* ($W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$-variété) si $\delta\Omega = 0$;

(10) une $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-*variété* si $(\nabla_D\Omega)(E,G) + (\nabla_{JD}\Omega)(JE,G) = \frac{-1}{m-1}\{g(D,E)\,\delta\Omega(G) - g(D,G)\,\delta\Omega(E)\} + \frac{-1}{m-1}\{-g(D,JE)\,\delta\Omega(JG) + g(D,JG)\,\delta\Omega(JE)\}$;

Soit M une variété différentiable de dimension impaire, que nous noterons par $2m+1$. Une structure presque de contact sur M est la donnée d'un triplet (φ,ξ,η) soumis aux conditions suivantes:

(a) ξ est un champ de vecteurs caractéristique sur M;

(b) η est une 1-forme différentielle sur M telle que $\eta(\xi) = 1$, et

(c) φ est un champ de tenseurs de type (1,1) vérifiant $\varphi^2 D = -D + \eta(D)\,\xi, \quad \forall D \in \chi(M)$.

Si de plus, M possède un tenseur métrique riemannienne g tel que

$$g(\varphi D,\varphi E) = g(D,E) - \eta(D)\,\eta(E),$$

on dit que g est une métrique compatible et dans ce cas, le quintuplet (M,g,φ,ξ,η) est appelé une *variété métrique presque de contact* [6]. Comme dans le cas des variétés presque hermitiennes, les variétés métriques presque de contact ont également une $2-$ forme différentielle, notée ϕ , appelée *forme fondamentale* ou *forme de Sasaki* définie par

$$\phi(D,E) = g(D,\varphi E).$$

Dans [7], Sasaki et Hatakeyama ont défini deux champs de tenseurs $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ de type (0,2) par

$$N^{(1)}(D,E) = N_\varphi(D,E) + 2d\eta(D,E)\,\xi,$$

$$N^{(2)}(D,E) = (\mathcal{L}_{\varphi D}\eta)\,E - (\mathcal{L}_{\varphi E}\eta)\,D,$$

dans lequel N_φ désigne le tenseur de Nijenhuis de φ tandis que $\mathcal{L}$ désigne la dérivée de Lie. Lorsque $N^{(1)} = 0$, on dit que la variété métrique presque de contact est normale et dans ce cas $N^{(2)} = 0$.

Si on note par $\{E_1,\ldots,E_m,\varphi E_1,\ldots,\varphi E_m,\xi\}$ une φ-base locale d'un ouvert quelconque de M, alors les codifférentielles de ϕ et de η sont définies respectivement par

$$\delta\phi(D) = -\sum_{i=1}^{m}\{(\nabla_{E_i}\phi)(E_i,D) + (\nabla_{\varphi E_i}\phi)(\varphi E_i,D)\} - (\nabla_\xi\phi)(\xi,D); \tag{2.2}$$

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{m}\{(\nabla_{E_i}\eta)\,E_i + (\nabla_{\varphi E_i}\eta)\,\varphi E_i\}. \tag{2.3}$$

De la classification de Oubina [5], nous reprenons les relations de définition des classes qui sont déjà identifiées et qui interviendront dans cette étude. On dit qu'une variété métrique presque de contact est:

(1) *semi-cosymplectique* si $\delta\phi = 0 = \delta\eta$;
(2) *semi-cosymplectique normale* si $\delta\phi = 0 = \delta\eta = N^{(1)}$;
(3) G_1*-semi-cosymplectique* si elle est semi-cosymplectique et que $(\nabla_D\varphi)\,D - (\nabla_{\varphi D}\varphi)\,\varphi D + \eta(D)\,(\nabla_{\varphi D}\xi) = 0$;

(4) G_2-*semi-cosymplectique* si elle est semi-cosymplectique et que
$\sigma\left\{\left(\nabla_D\phi\right)(E,G)-\left(\nabla_{\varphi D}\phi\right)(\varphi E,G)-\eta\left(E\right)\left(\nabla_{\varphi D}\eta\right)G\right\}=0;$

(5) G_1-*sasakienne* si $\left(\nabla_D\varphi\right)D-\left(\nabla_{\varphi D}\varphi\right)\varphi D+\eta\left(D\right)\left(\nabla_{\varphi D}\xi\right)=0;$

(6) G_2-*sasakienne* si
$\sigma\left\{\left(\nabla_D\phi\right)(E,G)-\left(\nabla_{\varphi D}\phi\right)(\varphi E,G)-\eta\left(E\right)\left(\nabla_{\varphi D}\eta\right)G\right\}=0;$

(7) *presque trans-sasakienne* si
$d\phi=\phi\wedge\omega$ et $d\eta=\frac{1}{2m}\left\{\delta\phi\left(\xi\right)\phi-2\eta\wedge\varphi^*\left(\delta\phi\right)\right\};$

(8) *quasi-trans-sasakienne* si
$(\nabla_D\phi)(E,G)+(\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi E,G)+\eta(E)(\nabla_{\varphi D}\eta)G=$
$-\frac{1}{m}\left\{g(D,E)\delta\phi(G)-g(D,G)\delta\phi(E)-g(D,\varphi E)(\delta\phi(\varphi G)-\eta(G)\delta\eta)\right\}$
$-\frac{1}{m}\left\{g(D,\varphi G)(\delta\phi(\varphi E)-\eta(E)\delta\eta)\right\};$

3. Généralités. Soient $(\bar{M},\bar{g},J)$ une variété presque hermitienne et M une sous-variété plongée dans $\bar{M}$. Par la suite on supposera qu'il existe un champ de vecteurs unitaire $\bar{U}$ de $\bar{M}$ othogonal à M.

Définition 3.1. ([1]) *On dit que la sous-variété M est semi-invariante par rapport à $\bar{U}$ si les conditions suivantes sont vérifiées*

(3.1) $JD=\varphi D-\eta(D)\bar{U}$ pour $D\in\chi(M)$,

(3.2) $\xi=J\bar{U}/M$, et

(3.3) $\bar{U}$ n'est jamais tangent à M,

dans lesquelles φD est la composante tangentielle de JD à M.

Proposition 3.1. ([1]) *Si M est une sous-variété semi-invariante d'une variété presque hermitienne $(\bar{M},\bar{g},J)$, alors (M,g,φ,ξ,η) est une variété métrique presque de contact.*

Démonstration. On va montrer que (g,φ,ξ,η) est une structure métrique presque de contact. En d'autres termes qu'elle vérifie les propriétés classiques bien connues.

(a) D'après (3.1), on a $\varphi D=JD+\eta(D)\bar{U}$ qui conduit à

$$\varphi^2D=J(JD+\eta(D)\bar{U})+\eta(JD+\eta(D)\bar{U})\bar{U},$$

ceci donne

$$\varphi^2D=-D+\eta(D)J\bar{U}+\eta(JD)+\eta(\eta(D))\eta(\bar{U})\bar{U}.$$

Mais, d'après (3.2), $J\bar{U} = \xi$. Il reste à montrer que $\eta(JD) = 0$ et $\eta(\bar{U}) = 0$. En fait, $\eta(JD) = g(JD,\xi) = -g(D,J\xi) = g(D,\bar{U}) = 0$ car $\bar{U} \perp D$. Donc $\varphi^2 D = -D + \eta(D)\xi$.

(b) Montrons que $\eta \circ \varphi = 0$.

Comme $\varphi D = JD + \eta(D)\bar{U}$, on a $\eta(\varphi D) = \eta(JD) + \eta(D)\eta(\bar{U})$. On vient de voir que $\eta(\bar{U}) = 0 = \eta(JD)$. Dès lors

$$\eta(\varphi D) = \eta(JD)$$

et $\eta \circ \varphi = 0$.

(c) Vérifions que $\varphi\xi = 0$. De la relation $\xi = J\bar{U}$, on tire $\varphi\xi = \varphi(J\bar{U})$. Mais $\varphi(J\bar{U}) = J(J\bar{U}) + \eta(J\bar{U})\bar{U} = -\bar{U} + g(J\bar{U},\xi)\bar{U}$. Par ailleurs, $g(J\bar{U},\xi) = g(\xi,\xi) = 1$ et partant $\varphi(J\bar{U}) = -\bar{U} + \bar{U} = 0$, donc $\varphi\xi = 0$.

(d) On va vérifier que $\eta(\xi) = 1$. Etant donné que $\xi = J\bar{U}$, on a $\eta(\xi) = g(J\bar{U},J\bar{U}) = g(\bar{U},\bar{U}) = 1$.

(e) Il reste à montrer que g est une métrique compatible avec la structure (φ,ξ,η). Comme dans les assertions qui précèdent, on va calculer $g(\varphi D,\varphi E)$. On a $g(\varphi D,\varphi E) = g(JD + \eta(D)\bar{U}, JE + \eta(E)\bar{U})$
$= g(JD,JE) + g(\eta(D)\bar{U},JE) + g(\eta(D)\bar{U},\eta(E)\bar{U}) + g(JD,\eta(E)\bar{U})$ dont le dévéloppement donne $= g(D,E) - \eta(D)\eta(E) + \eta(D)\eta(E) - \eta(D)\eta(E)$ qui donne $g(\varphi D,\varphi E) = g(D,E) - \eta(D)\eta(E)$. □

En notant par $\mathcal{L}$ la dérivée de Lie, on sait que

$$(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(D,E) = 2g(\bar{\nabla}_D\bar{U},E) + 2g(\bar{\nabla}_E\bar{U},D)$$

pour $D,E \in \chi(\bar{M})$.

Proposition 3.2. *Soit (M,g,φ,ξ,η) une sous-variété semi-invariante d'une variété presque hermitienne $(\bar{M},\bar{g},J)$. Alors on a:*

(3.4) $(\bar{\nabla}_D\bar{\Omega})(E,G) = (\nabla_D\phi)(E,G) - \frac{1}{2}(\eta(G)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(D,E) - \eta(E)\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(D,G))$;

(3.5) $(\bar{\nabla}_{JD}\bar{\Omega})(JE,G) = (\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi E,G) - \frac{1}{2}\eta(G)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(JD,JE)$;

(3.6) $(\eta \circ J)(D) = 0$;

(3.7) $\delta\bar{\Omega}(D) = \delta\phi(D) + \eta(\nabla_\xi\varphi D) - \frac{1}{2}\eta(D)((\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(E_i,E_i) + 2(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(J\bar{U},J\bar{U}))$
$-\eta(E_i)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(E_i,D)$,
dans laquelle E_i désigne un champ de vecteurs d'une $J-$base locale d'un ouvert quelconque de $\bar{M}$;

(3.8) $\delta\bar{\Omega}(JD) = \delta\phi(\varphi D) + \eta(\nabla_\xi\varphi D)$.

Démonstration. L'énoncé (3.4) est établi dans [2]. Pour l'énoncé (3.5), on l'adapte à (3.4) en rappelant que $\eta \circ \varphi = 0$.

En ce qui concerne (3.6), on l'a établi à la proposition 3.1.

Pour ce qui est de l'énoncé (3.7), on utlise la définition d'une sous-variété semi-invariante et celle de la codifférentielle $\delta\bar{\Omega}$.

Comme $\eta(JD) = 0$, alors en remplaçant D par JD dans (3.7), on aura la relation (3.8). □

Définissant une métrique riemannienne $\bar{g^o}$ conforme avec la métrique $\bar{g}$ sur $\bar{M}$ en posant

$$\bar{g^o}(\bar{D},\bar{E}) = e^{2r}\bar{g}(\bar{D},\bar{E})$$

dans laquelle r est une fonction différentiable sur $\bar{M} \times \mathbb{R}$ telle que $r(x,t) = t$, alors il est établi dans [4] que $(\bar{g}^o,J)$ est une structure presque hermitienne sur $\bar{M}$; de ce fait, on notera par $(\bar{M}^o,\bar{g}^o,J)$ la variété presque hermitienne $\bar{M}$ munie de la structure $(\bar{g}^o,J)$. En outre on a

(3.9) $(\bar{\nabla}^o_{\bar{D}}\bar{\Omega}^o)(\bar{E},\bar{G}) = e^{2r}\left\{(\bar{\nabla}_{\bar{D}}\bar{\phi})(\bar{E},\bar{G}) - J\bar{E}(r)\bar{g}(\bar{D},\bar{G}) - \bar{E}(r)\bar{\phi}(\bar{D},\bar{G})\right\}$
$+ e^{2r}\left\{\bar{G}(r)\bar{\phi}(\bar{D},\bar{E}) + J\bar{G}(r)\bar{g}(\bar{D},\bar{E})\right\}$;

(3.10) $\delta\bar{\Omega}^o(\bar{D}) = \delta\bar{\phi}(\bar{D}) + 2(m-1)J\bar{D}(r)$.

En combinant (3.10) avec (3.8) et (3.6), on a

(3.11) $\delta\bar{\Omega}^o J(\bar{D}) = \delta\bar{\phi}(\varphi\bar{D}) + \eta(\bar{\nabla}_\xi\varphi\bar{D}) - 2(m-1)\bar{D}(r)$.

4. Sous-variétés des G_1-variétés. Rappelons que dans [2], Chinea a examiné le cas des sous-variétés semi-invariantes des variétés kählériennes, nearly kählériennes, presque kählériennes et quasi kählériennes. Le cas des sous-variétés semi-invariantes des variétés hermitiennes est traité dans [1].

Dans ce qui suit, nous n'étudions que les cas qui, à notre connaissance, n'ont pas encore été abordés.

Proposition 4.1. *Soit (M,g,φ,ξ,η) une sous-variété semi-invariante d'une W_3-variété. Alors la structure métrique presque de contact (g,φ,ξ,η) sur M vérifie les relations*

(4.1) $(\nabla_D\phi)(E,G)-(\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi E,G) = \frac{1}{2}[\eta(G)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(D,E)-(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(JD,JE)-$
$\eta(E)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(D,G)]$;

(4.2) $\delta\phi(D) = -\eta(\nabla_\xi\varphi D) + \frac{1}{2}[\eta(D)((\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(E_i,E_i) + (\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(JE_i,JE_i))]$-
$\frac{1}{2}[\eta(E_i)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(E_i,D) + (\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(J\bar{U},J\bar{U})]$;

Démonstration. La relation (4.1) provient de la définition d'une W_3-variété et de l'énoncé (3.3) de la proposition 3.2.

Quant à la relation (4.2), il suffit d'utiliser (3.7) sachant que $\delta\bar{\Omega} = 0$. □

Corollaire 4.1. *Sous les conditions de la proposition ci-dessus, si $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ analytique, alors (M,g,φ,ξ,η) est une variété semi-cosymplectique normale.*

Démonstration. En effet, sous ces conditions, les relations (4.1) et (4.2) se transforment en

$$(\nabla_D\phi)(E,G) - (\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi E,G) = 0$$

et

$$\delta\phi = 0,$$

qui sont les relations définissant une structure semi-cosymplectique normale.□

Proposition 4.2. *Si $\bar{M}^o$ est une W_3-variété, alors la structure métrique presque de contact sur M vérifie les relations suivantes.*

(4.3) $(\nabla_D\phi)(E,G) = (\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi E,G) - \frac{1}{2}\eta(G)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(JD,JE)$;

(4.4) $\delta\phi(D) = -\eta(\nabla_\xi\varphi D) + \frac{1}{2}[\eta(D)((\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(E_i,E_i) + (\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(JE_i,JE_i))]$-
$\frac{1}{2}[\eta(E_i)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(E_i,D) + (\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(J\bar{U},J\bar{U})] - 2(m-1)JD(r)$;

Démonstration. La relation (4.3) est obtenue en utilisant l'énoncé (3.4) de la proposition 3.2 et de la relation (3.9).

Pour la relation (4.4), on combine (3.7) avec (3.10). □

Corollaire 4.2. *Sous les conditions de la proposition ci-dessus, si $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ analytique, alors la structure métrique presque de contact fait de M une C_3-variété.*

Démonstration. Les conditions sur $\bar{U}$ et $J\bar{U}$ font que les relations (4.3) et (4.4) se transforment en

$$(\nabla_D\phi)(E,G) - (\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi E,G) = 0$$

et

$$\delta\phi(D) = 0$$

qui sont les relations définissant une C_3-variété [3]. □

Proposition 4.3. *Si $\bar{M}$ est une $W_1 \oplus W_3-$variété, alors la structure métrique presque de contact sur M vérifie les relations suivantes*

(4.5) $(\nabla_D\phi)(D,E) - (\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi D,E) = \frac{1}{2}\eta(E)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(D,D)$
$-\frac{1}{2}\{(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(JD,JD) - \eta(D)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(D,E)\}$;

(4.6) $\delta\phi(D) = \eta(D)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(\xi,\xi) + \frac{1}{2}\eta(D)((\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(E_i,E_i) + (\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(JE_i,JE_i))-$
$\frac{1}{2}\eta(E_i)((\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(E_i,D) - \eta(\nabla_\xi\varphi D))$.

Démonstration. Les relations de définition d'une $W_1 \oplus W_3-$variété, combinées à l'énoncé (3.4) de la proposition 3.2 donnent la preuve de (4.5). Etant donné que $\delta\phi = 0$, alors (4.4) conduit à (4.6). □

Corollaire 4.3. *Sous les conditions de la proposition ci-dessus, si $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ analytique, alors (M,g,φ,ξ,η) est une variété G_1-semi-cosymplectique.*

Démonstration. Puisque $\bar{U}$ est parallèle, alors la relation (4.5) donne

$$(\nabla_D\phi)(D,E) - (\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi D,E) = 0;$$

de même, la relation (4.6) se transforme en

$$\delta\phi(D) = -\eta(\nabla_\xi\varphi D);$$

Si $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ analytique, alors $\nabla_\xi\varphi D = 0$ et, de ce fait, $\delta\phi(D) = 0$. On voit que les relations (4.5) et (4.6) donnent

$$(\nabla_D\phi)(D,E) - (\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi D,E) = 0$$

et

$$\delta\phi(D) = 0,$$

qui sont des relations définissant une structure G_1-semi-cosymplectique. □

Proposition 4.4. *Si $\bar{M}^o$ est une $W_1 \oplus W_3-$variété telle que $\bar{U}$ est parallèle, $J\bar{U}$ analytique et $D(r) = 0$, alors la structure métrique presque de contact sur M vérifie les relations*

(4.7) $(\nabla_D\phi)(D,E) - (\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi D,E) = 0$, et

(4.8) $\delta\phi(D) = 0$.

Démonstration. En adaptant la relation (4.3) à la définition d'une $W_1 \oplus W_3-$variété et aux conditions imposées, on obtient la relation (4.7).

La relation (4.8) n'est rien d'autre que (4.6) sous l'effet des conditions imposées □

Proposition 4.5. *Soit M une sous-variété semi-invariante plongée dans une W_4-variété $\bar{M}$. Si le champ de vecteurs $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ analytique, alors la structure métrique presque de contact sur M vérifie la relation*

$$(4.9)\quad (\nabla_D\phi)(E,G) = \frac{-1}{2(m-1)}\{g(D,E)\delta\phi(G) - g(D,G)\delta\phi(E)\} + \frac{1}{2(m-1)}\{\phi(D,E)\delta\phi(\varphi G) - \phi(D,G)\delta\phi(\varphi E)\}.$$

Démonstration. Il suffit de prendre en compte la définition d'une W_4-variété et les conditions sur $\bar{U}$ et $J\bar{U}$. □

Proposition 4.6. *Soit M une sous-variété semi-invariante plongée dans une $W_1 \oplus W_4-$variété $\bar{M}$. Si $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ est analytique, alors la structure métrique presque de contact sur M vérifie la relation*

$$(4.10)\quad (\nabla_D\phi)(D,E) = \frac{-1}{2(m-1)}\{g(D,D)\delta\phi(E) - g(D,E)\delta\phi(D)\} + \frac{-1}{2(m-1)}\{\phi(D,E)\delta\phi(\varphi D)\}.$$

Démonstration. On procède comme à la proposition 4.5. □

Proposition 4.7. *Si $\bar{M}$ est une G_1-variété, alors la structure métrique presque de contact induite sur M vérifie la relation*

$$(\nabla_D\phi)(D,E) - (\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi D,E) = 0.$$

Démonstration. En combinant les relations (3.4) et (3.5) aux relations de définition d'une G_1-variété et tenant compte du fait que $\bar{U}$ est parallèle, on a la preuve. □

5. Sous-variétés des G_2-variétés

Proposition 5.1. *Si $\bar{M}$ est une $W_2 \oplus W_3-$variété, alors la structure métrique presque de contact induite sur M vérifie les relations suivantes*

$$(5.1)\quad \sigma\{(\nabla_D\phi)(E,G) - (\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi E,G)\} = -\frac{1}{2}\sigma\{\eta(G)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(JD,JE)\};$$

$$(5.2)\quad \delta\phi(D) = \eta(D)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(\xi,\xi) + \frac{1}{2}\eta(D)((\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(E_i,E_i) + (\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(JE_i,JE_i)) - \frac{1}{2}\eta(E_i)((\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(E_i,D) - \eta(\nabla_\xi\varphi D)).$$

Démonstration. La relation (5.1) provient de la définition d'une $W_1 \oplus W_3-$variété et de la relation (4.1) de la proposition 4.1 et tenant compte du fait que

$(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(D,E) = (\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(E,D)$;

$(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(E,G) = (\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(G,E)$;
$(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(G,D) = (\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(D,G)$.
La relation (5.2) n'est rien d'autre que (4.6) de la proposition 4.3 étant donné que $\delta\bar{\phi} = 0$. □

Corollaire 5.1. *Sous les conditions de la proposition ci-dessus, si $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ analytique, alors la sous-variété semi-invariante M est une variété G_2-semi-cosymplectique.*

Démonstration. On procède comme au corollaire 4.3. □

Proposition 5.2. *Soit M une sous-variété plongée dans une $W_2 \oplus W_3-$variété $\bar{M}^o$. Si $\bar{U}$ est parallèle , $J\bar{U}$ analytique et r une fonction telle que $D(r) = 0$, alors la structure métrique presque de contact induite sur M vérifie les relations*

(5.3) $\sigma\,\{(\nabla_D\phi)(E,G) - (\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi E,G)\} = 0$;
(5.4) $\delta\phi = 0$.

Démonstration. Comme $\delta\bar{\phi}(D) = 0$ et sous les conditions imposées, alors la relation (4.4) se transforme en (4.8); la relation (5.4) n'est rien d'autre que (4.8).

La relation (5.3) est établie en procédant comme à la proposition 4.4 en utilisant l'énoncé (3.4) de la proposition 3.2. □

Proposition 5.3. *Soit M une sous-variété semi-invariante plongée dans une $W_2 \oplus W_4-$variété $\bar{M}$. Si $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ analytique, alors (M,g,φ,ξ,η) est une variété presque trans-sasakienne.*

Démonstration. Puisque $\bar{U}$ est parallèle, alors en recourant à l'énoncé (3.4) de la proposition 3.2, on a
(5.5) $(\bar{\nabla}_D\bar{\phi})(E,G) = (\nabla_D\phi)(E,G)$.
Comme $J\bar{U}$ est analytique, alors $\nabla_\xi\varphi D = 0$ et partant, on a
(5.6) $\delta\bar{\phi}(JG) = \delta\phi(\varphi G)$.

On voit que les relations (5.5) et (5.6) permettent de tirer que
$\sigma\left\{(\bar{\nabla}_D\bar{\phi})(E,G) - \frac{1}{m-1}\bar{\phi}(D,E)\delta\bar{\phi}(JG)\right\} =$
$\sigma\left\{(\nabla_D\phi)(E,G) - \frac{1}{m-1}\phi(D,E)\delta\phi(\varphi G)\right\}$
dont on déduit
(5.7) $\sigma\left\{(\nabla_D\phi)(E,G) - \frac{1}{m-1}\phi(D,E)\delta\phi(\varphi G)\right\} = 0$,

qui est l'une des relations de définition d'une variété presque trans-sasakienne. L'autre relation s'établit par simple calcul. □

Proposition 5.4. *Soit M une sous-variété semi-invariante plongée dans une variété presque hermitienne. Si $\bar{M}$ est une G_2-variété, alors la structure métrique presque de contact induite sur M vérifie la relation*

$$\sigma\left\{(\nabla_D\phi)(E,G)-(\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi E,G)\right\}=-\tfrac{1}{2}\sigma\left\{\eta(G)(\mathcal{L}_{\bar{U}}\bar{g})(JD,JE)\right\}. \tag{5.8}$$

Démonstration. Entre une G_2-variété et une $W_2\oplus W_3-$variété, la différence réside en ceci qu'une G_2-variété n'est pas définie au moyen de la codifférentielle de la forme fondamentale. De ce fait, la relation (5.8) n'est rien d'autre que (5.1). □

Corollaire 5.2. *Sous les conditions de la proposition ci-dessus, si $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ aussi, alors (M,g,φ,ξ,η) est une variété G_2-sasakienne.*

Démonstration. Comme $\bar{U}$ est parallèle, alors la relation (5.8) devient

$$\sigma\left\{(\nabla_D\phi)(E,G)-(\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi E,G)\right\}=0.$$

Etant donné que $J\bar{U}$ est aussi parallèle, on a $\nabla_{\varphi D}J\bar{U}=0$; c'est-à-dire $\nabla_{\varphi D}\xi=0$. Par ailleurs $(\nabla_{\varphi D}\eta)G=g(G,\nabla_{\varphi D}\xi)$. Donc $(\nabla_{\varphi D}\eta)G=0$ qui conduit à

$$\sigma\left\{(\nabla_D\phi)(E,G)-(\nabla_{\varphi D}\phi)(\varphi E,G)-\eta(E)(\nabla_{\varphi D}\eta)G\right\}=0$$

qui est la relation de définition d'une variété G_2-sasakienne. □

6. Cas des variétés semi-kählériennes

Proposition 6.1. *Soient $(\bar{M},\bar{g},J)$ une variété presque hermitienne et (M,g,φ,ξ,η) une sous-variété semi-invariante plongée dans $\bar{M}$.*
Alors $\delta\bar{\Omega}=\delta\phi$ si, et seulement si, $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ analytique.

Démonstration. Au regard de la relation (3.7), si $\bar{U}$ est parallèle, on établit que

$$\delta\bar{\Omega}(D)=\delta\phi(D)+\eta(\nabla_\xi\varphi D).$$

Si de plus $J\bar{U}$ est analytique, on a $\nabla_\xi\varphi D=0$ comme au corollaire 4.3. Dans ce cas on a la preuve. □

Proposition 6.2. *Soient $(\bar{M},\bar{g},J)$ une variété presque hermitienne et (M,g,φ,ξ,η) une sous-variété semi-invariante plongée dans $\bar{M}$. Si $\delta\bar{\Omega}=0$, alors $\delta\phi=0$ si, et seulement si $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ analytique.*

Démonstration. Comme à la proposition ci-dessus, $\delta\bar{\Omega}(D) = \delta\phi(D)$ si, et seulement si, $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ analytique; il est clair que si, $\delta\bar{\Omega} = 0$ alors $\delta\phi = 0$ si et seulement si $\bar{U}$ est parallèle et $J\bar{U}$ est analytique. □

Proposition 6.3. *Soient* $(\bar{M},\bar{g},J)$ *et* $(\bar{M}^o,\bar{g}^o,J)$ *deux variétés presque hermitiennes conformes. Soit* (M,g,φ,ξ,η) *une sous-variété semi-invariante plongée dans* $\bar{M}$. *Si on a* $\bar{D}(r) = 0$, *alors les énoncés suivants sont vrais.*

(a) $\delta\bar{\Omega}^o(D) = \delta\bar{\Omega}(\bar{D})$;
(b) $\delta\bar{\Omega}^o(JD) = \delta\phi(\varphi D)$ *si, et seulement si,* $J\bar{U}$ *est analytique.*

Démonstration. Comme $\bar{D}(r) = 0$, alors (3.10) donne la preuve de (a). Pour la même raison, la relation (3.11) devient

$$\delta\bar{\Omega}^o(JD) = \delta\phi(\varphi D) + \eta(\nabla_\xi \varphi D).$$

Mais, $J\bar{U}$ étant analytique on a $\nabla_\xi \varphi D = 0$ et ceci donne la preuve de (b).□

7. Cas des $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4-$variétés. Suivant le diagramme de Gray-Hervella [4], il ressort que
les $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4-$variétés ont comme principales sous-classes:

(1) les variétés quasi kählériennes, déjà examinées par Chinea dans [2];

(2) les $W_1 \oplus W_4$ et $W_2 \oplus W_4-$variétés que nous avons examinées aux propositions 4.6 et 5.3 respectivement.

Nous n'allons traiter que le seul cas des sous-variétés semi-invariantes des $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4-$variétés.

Proposition 7.1. *Soit* (M,g,φ,ξ,η) *une sous-variété semi-invariante d'une variété presque hermitienne* $(\bar{M},\bar{g},J)$. *Si cette dernière est une* $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4-$*variété, alors* (M,g,φ,ξ,η) *est quasi trans-sasakienne si, et seulement si,* $\bar{U}$ *est parallèle et* $J\bar{U}$ *est analytique.*

Démonstration. On peut procéder comme aux propositions 6.1 et 6.3.□

REFERENCES

1. Blair, D.E.; Luden, G.D.; Yano, K. – *Semi-invariant immersions,* Kodai Math. Sem. Rep., 27 (1976), 313–319.

2. Chinea, D. – *Semi-invariant submanifolds of quasi Kaehlerian manifolds*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 32(1987), 321–329.
3. Chinea, D.; Gonzalez, C. – *A classification of almost contact metric manifolds,* Ann. Mat. Pura Appl., 156(1990), 15–36.
4. Gray, A.; Hervella, L.M. – *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants,* Ann. Mat. Pura Appl., 123 (1980), 35–58.
5. Oubina, J.A. – *A classification for almost contact structures*, Manuscrit, 1985.
6. Sasaki, S. – *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I,* Tôhoku Math. J., 12(1960), 459–476.
7. Sasaki, S.; Hatakeyama, Y. – *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II,* Tôhoku Math. J., 13(1961), 281–294.
8. Tshikuna-Matamba, T. – *The differential geometry of almost Hermitian almost contact metric submersions,* Int. J. Math. Math. Sci., 36(2004), 1923–1935.
9. Tshikuna-Matamba, T. – *Submersions presque hyperhermitiennes presque de contact,* An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi, Mat., 51 (2005), 83–98.

Received: 4.I.2008

Département de Mathématiques,
Institut Supérieur Pédagogique,
B.P. 282-Kananga,
République Démocratique du Congo
tshikmat@yahoo.fr