ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL.I. CUZA" DIN IAŞI (S.N.)
MATEMATICĂ, Tomul LVII, 2011, f.1

APPROXIMATION DE LA GÉOMÉTRIE DANS UNE FORMULATION MIXTE POUR UN PROBLÈME DE COQUES MINCES

BY

GABRIELA TĂNASE

Abstract. Starting from Naghdi's bidimensional shell model we build first a mixed variational formulation that gives directly the equilibrium equation of the shell's transverse shear. In order to build the discrete formulation, we also consider an approximation of the map describing the geometry of the shell. Existence and uniqueness of the solution of the continuous and discrete problems are proven. Error estimations are established at the end.

Mathematics Subject Classification 2000: 65Jxx, 74S05, 78M30.

Key words: numerical analysis, shell theory, finite element methods, mixed variational methods.

1. Introduction

On considère le modèle bidimensionel de Naghdi et on construit une formulation variationnelle mixte qui dualise le cisaillement transverse, tandis que l'effort membranaire et le moment de flexion sont des tenseurs symétriques avec des composantes L^2. La théorie générale de Babuska-Brezzi (voir [4]) pour les formulations mixtes, mais adaptée au cas particulier qu'on traite: trois équations d'équilibre en interaction et quantitées dépendantes de la géométrie de la carte φ - qui décrit la géométrie de la surface moyenne de la coque - nous aide a prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème continu. Pour avoir une solution unique du problème discret on a besoin, en supposant que la carte φ est connue, d'un paramètre h de discretisation petit et aussi de plus de régularité sur le problème auxiliaire, celui qui nous conduit a l'obtention de la condition $\inf - \sup$.

Il faut noter que la condition inf − sup en discret est obtenue, sous cette hypothèse, avec l'aide des propriètes de l'interpolé équilibre prouvées en [1], celles de la projection L^2 sur l'espace des polynômes (voir [5]) et en utilisant le Lemme 5.5 de Nečas (voir [6]). Egalément, on a besoin d'une régularité C^3 de la carte φ, la même démandée pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème primal de départ.

Comme l'établisement de la nécéssaire condition de Babuška-Brezzi pour la nouvelle formulation discrète passe par la condition de compatibilité entre les deux espaces continues, cette régularité sur la carte φ doit être gardée, même si pour la carte approchée la régularité C^2 locale suffit.

2. Le problème continu

Par la suite, les lettres grecques (sauf ε) prennent leurs valeurs dans l'ensemble d'indices et d'exposants $\{1,2\}$ et celles latines les prennent dans l'ensemble $\{1,2,3\}$. On utilise la convention de sommation des indices répétés.

On considère une coque élastique, constituée d'un materiau homogène et isotrope et encastrée sur tout son bord lateral.

La dèrivation covariante par rapport a la mètrique $a_{\alpha\beta}$ est notée par $|$ et la dérivation clasique par une virgule.

On pose:

$$g_{\alpha 3\beta 3} = \frac{1+\nu}{4E} a_{\alpha\beta};\ g_{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{1+\nu}{4E}\left[a_{\alpha\rho}a_{\beta\sigma} + a_{\alpha\sigma}a_{\beta\rho} - \frac{2\nu}{1+\nu} a_{\alpha\beta}a_{\rho\sigma}\right];$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(\eta) = \frac{1}{2}(\eta_\alpha\,|_\beta + \eta_\beta\,|_\alpha) - b_{\alpha\beta}\eta_3;$$

$$\chi_{\alpha\beta}(\eta, r) = \frac{1}{2}(r_\alpha\,|_\beta + r_\beta\,|_\alpha) - \frac{1}{2} b^\rho_\alpha(\eta_\rho\,|_\beta - b_{\rho\beta}\eta_3) - \frac{1}{2} b^\sigma_\alpha(\eta_\sigma\,|_\alpha - b_{\alpha\sigma}\eta_3).$$

$$T = (\underset{\sim}{t}, \underset{\approx}{n}, \underset{\approx}{m});\ X = (\zeta_3, (\zeta_\alpha)_{1\le\alpha\le 2}, (s_\alpha)_{1\le\alpha\le 2});\ R = (\underset{\sim 1}{R}, \underset{\approx 2}{R}, \underset{\approx 3}{R});$$

$$Y = (\eta_3, (\eta_\alpha)_{1\le\alpha\le 2}, (r_\alpha)_{1\le\alpha\le 2});\ W = H(div;\omega) \times \left[L^2(\omega)\right]^4_s \times \left[L^2(\omega)\right]^4_s;$$

$$M = L^2(\omega) \times \left[H^1_0(\omega)\right]^2 \times \left[H^1_0(\omega)\right]^2;$$

$$A(T,R) = \int_\omega \frac{1}{\varepsilon} t^{\alpha 3} g_{\alpha 3\beta 3} R_1^{\beta 3} \frac{1}{\sqrt{a}}\, d\omega + \int_\omega \frac{1}{\varepsilon} n^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_2^{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{a}}\, d\omega$$
$$+ \int_\omega \frac{3}{\varepsilon^3} m^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_3^{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{a}}\, d\omega;$$

$$B(R,Y) = \frac{1}{2}\int_\omega div\underset{\sim 1}{R}\,\eta_3 d\omega - \frac{1}{2}\int_\omega R_1^{\alpha 3} b_\alpha^\rho \eta_\rho d\omega - \frac{1}{2}\int_\omega R_1^{\alpha 3} r_\alpha d\omega$$
$$- \int_\omega R_2^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}(Y)d\omega - \int_\omega R_3^{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}(Y)d\omega;$$
$$F(Y) = \int_\omega p^i \eta_i \sqrt{a}\; d\omega;$$

Le problème continu s'écrit alors sous la forme:

$$(1) \qquad \begin{cases} \textit{trouver } T \in W, X \in M \textit{ tels que :} \\ \forall R \in W, A(T,R) + B(R,X) = 0 \\ \forall Y \in M, B(T,Y) = -F(Y). \end{cases}$$

Concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème (1), on se raporte au Théorème 1 de [9].

Il faut noter que le problème primal associé au problème (1) admet une solution et une seule d'après Bernadou, Ciarlet et Miara (voir [3]) et Bernadou (voir [2]).

3. Le problème discret

On suppose l'ouvert ω convexe et polygonal, de telle sorte que $\overline{\omega} = \bigcup_{T\in\mathcal{T}_h} T$, où $\mathcal{T}_h$ est une triangulation régulière au sens de Ciarlet [5]. On note par $(\overrightarrow{e_i})_{1\le i\le 3}$ une base fixe dans R^3 et par $(\overrightarrow{e^i})_{1\le i\le 3}$ la base duale associée. L'interpolé de la carte φ est désigné par Θ_h et la carte approchée par φ_h, i.e.:

$$\varphi_h = \varphi_{ih}\overrightarrow{e^i}; \varphi_{ih} = \Theta_h\varphi_i, : 1 \le i \le 3;\ \varphi = \varphi_i\overrightarrow{e^i}.$$

En supposant que φ_h est de classe C^2 sur chaque $T \in \mathcal{T}_h$, on définit la géométrie de la coque approchée, c'est à dire par rapport à la carte φ_h au lieu de φ. On note ces quantités avec un indice h en bas et on désigne par $\Phi_h = (T, P_T, \sum_T)_h$ l'espace d'éléments finis associé à la carte φ.

Ainsi, en supposant que sur chaque $T \in \mathcal{T}_h$ on a φ_h de classe C^2, on pose $\mathcal{S}_h = \varphi_h(\overline{\omega})$ et on peut définir:

$\overrightarrow{a_{h\alpha}} = \varphi_{h,\alpha}$, $1 \le \alpha \le 2$

$\overrightarrow{a_{h3}} = \frac{\overrightarrow{a_{h1}}\times\overrightarrow{a_{h2}}}{|\overrightarrow{a_{h1}}\times\overrightarrow{a_{h2}}|}$

$a_{h\alpha\beta} = a_{h\beta\alpha} = \overrightarrow{a_{h\alpha}} \cdot \overrightarrow{a_{h\beta}}$; $a^{h\alpha\beta} = \overrightarrow{a^{h\alpha}} \cdot \overrightarrow{a^{h\beta}}$

$b_{h\alpha\beta} = b_{h\beta\alpha} = \overrightarrow{a_{h3}} \cdot \overrightarrow{a_{h\beta}}_{,\alpha} = -\overrightarrow{a_{h\beta}} \cdot \overrightarrow{a_{h3}}_{,\alpha}$
$b_{h\alpha}^{\beta} = a^{h\beta\rho} b_{h\rho\alpha}$
$c_{h\alpha\beta} = c_{h\beta\alpha} = b_{h\alpha}^{\rho} b_{h\rho\beta} = b_{h\alpha\rho} b_{h\beta}^{\rho}$
$a_h = \det(a_{h\alpha\beta})$
$\Gamma_{h\alpha\beta}^{\rho} = \Gamma_{h\beta\alpha}^{\rho} = \overrightarrow{a^{h\rho}} \cdot \overrightarrow{a_{h\beta}}_{,\alpha} = \overrightarrow{a^{h\rho}} \cdot \overrightarrow{a_{h\alpha}}_{,\beta}$
$\overrightarrow{v_h} = v^{h\alpha}\ \overrightarrow{a_{h\alpha}} = v_{h\alpha}\ \overrightarrow{a^{h\alpha}}$
$v_{h\alpha}|_{h\beta} = v_{h\alpha,\beta} - \Gamma_{h\alpha\beta}^{\rho}\ v_{h\rho}$
$v^{h\alpha}|_{h_\beta} = v^{h\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma_{h\beta\rho}^{\alpha}\ v^{h\rho}$
$g_{h\alpha 3\beta 3} = \dfrac{1+\nu}{4E} a_{h\alpha\beta};$
$g_{h\alpha\beta\rho\sigma} = \dfrac{1+\nu}{4E}\left[a_{h\alpha\rho}a_{h\beta\sigma} + a_{h\alpha\sigma}a_{h\beta\rho} - \dfrac{2\nu}{1+\nu} a_{h\alpha\beta}a_{h\rho\sigma}\right]$
Ensuite, on considère les espaces d'éléments finis suivats:

$$W_h = W_{h1} \times W_{h2} \times W_{h2} \subset W;\ M_h = M_{h1} \times M_{h2} \times M_{h2} \subset M;$$
$$W_{h1} = \left\{\underset{\sim h}{R} \in H(div;\omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, \underset{\sim h}{R}\ |_T \in D_{k+1}\right\};$$
$$W_{h2} = \left\{\underset{\approx h}{R} \in \left[L^2(\omega)\right]_s^4; \forall T \in \mathcal{T}_h, \underset{\approx h}{R}\ |_T \in [P_k]_s^4\right\};$$
$$M_{h1} = \left\{\eta_h \in L^2(\omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, \eta_h\ |_T \in P_k\right\};$$
$$M_{h2} = \left\{\underset{\sim h}{R} \in \left[H_0^1(\omega)\right]^2; \forall T \in \mathcal{T}_h, \underset{\sim h}{R}\ |_T \in [P_{k+1}]^2\right\}$$

où D_{k+1} est l'espace de Raviart et Thomas d'ordre $k+1$ et P_k l'espace des polynômes de degré au plus égal à k (voir [7]).

On définit les deux formes bilinéaires $A_h(.,.)$ et $B_h(.,.)$ et la forme linéaire $F_h(.)$ par:

$$\begin{aligned} A_h(T_h, R_h) = &\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \frac{1}{\varepsilon} t_h^{\alpha 3} g_{h\alpha 3\beta 3} R_{h1}^{\beta 3} \frac{1}{\sqrt{a_h}}\ dT \\ &+ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \frac{1}{\varepsilon} n_h^{\alpha\beta} g_{h\alpha\beta\rho\sigma} R_{h2}^{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{a_h}}\ dT \\ &+ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \frac{3}{\varepsilon^3} m_h^{\alpha\beta} g_{h\alpha\beta\rho\sigma} R_{h3}^{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{a_h}}\ dT; \\ F_h(Y_h) = &\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T p^i \eta_{hi} \sqrt{a_h}\ dT; \end{aligned}$$

$$B_h(R_h,Y_h)=\frac{1}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T div\underset{\sim h1}{R}\eta_{h3}d\omega-\frac{1}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T R_{h1}^{\alpha 3}b_{h\alpha}^{\rho}\eta_{h\rho}dT$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T R_{h1}^{\alpha 3}r_{h\alpha}d\omega-\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T R_{h2}^{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\left(\eta_{h\alpha}\mid_{h\beta}+\eta_{h\beta}\mid_{h\alpha}\right)-b_{h\alpha\beta}\eta_{h3}\right]dT$$
$$-\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T R_{h3}^{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\left(r_{h\alpha}\mid_{h\beta}+r_{h\beta}\mid_{h\alpha}\right)-\frac{1}{2}b_{h\alpha}^{\rho}\left(\eta_{h\rho}\mid_{h\beta}-b_{h\rho\beta}\eta_{h3}\right)\right]dT$$
$$+\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T R_{h3}^{\alpha\beta}\frac{1}{2}b_{h\beta}^{\sigma}\left(\eta_{h\sigma}\mid_{h\alpha}-b_{h\alpha\sigma}\eta_{h3}\right)dT.$$

La formulation discrète étudiée est la suivante:

$$\begin{cases} trouver\ T_h\in W_h, X_h\in M_h\ tels\ que: \\ \forall R_h\in W_h, A_h(T_h,R_h)+B_h(R_h,X_h)=0 \\ \forall Y_h\in M_h, B_h(T_h,Y_h)=-F_h(Y_h). \end{cases} \tag{2}$$

Les termes des sous les integrales qui donnent les expressions de $A(.,.)$, $B(.,.)$ et $F(.)$ peuvent être écrits comme des quotients entre des polynômes, exprimés comme des dérivées jusqu'à l'ordre 2 de φ, et des dénominateurs qui sont des puissances entières de $\sqrt{a}$.

Ainsi, prenons le premier terme de $A(.,.)$, i.e. $\int_\omega \frac{1}{\varepsilon}t^{\alpha 3}g_{\alpha 3\beta 3}R_1^{\beta 3}\frac{1}{\sqrt{a}}\ d\omega$. On l'écrit comme $\int_\omega \frac{1}{\varepsilon}\underset{\sim}{t}A^1\underset{\sim}{R_1}^T d\omega$, avec $\underset{\sim}{t}=(t^{13},t^{23})$, $\underset{\sim}{R_1}=(R_1^{13},R_1^{23})$, $A^1=(a^1_{\alpha\beta})_{1\le\alpha,\beta\le 2}$ et $a^1_{\alpha\beta}=\frac{1+\nu}{4E}\frac{1}{\sqrt{a}}a_{\alpha\beta}$. On remarque que la matrice A^1 regroupe les coefficients variables de notre terme. On utilise que $a_{\alpha\beta}=\varphi_{,\alpha}\cdot\varphi_{,\beta}$ et ainsi on obtient les composantes de A^1 comme un rapport entre un polynôme dépendant de la première dérivée de φ et $\sqrt{a}$.

De la même manière on travaille sur les deux autres termes de $A(.,.)$ et on obtient un rapport du même type que pour le premier terme de $A(.,.)$. Il faut aussi noter que, içi et dans la suite, on tient compte de la symétrie de tenseurs et on considère ainsi leurs composantes égales une seule fois. Par exemple, pour $\underset{\approx 2}{R}$ on construit le vecteur $\underset{\sim 2}{U}=(R_2^{11},R_2^{12},R_2^{22})$, en ne prenant pas aussi comme composante R_2^{21} qui est égale à R_2^{12}.

Par conséquent on a la proposition suivante.

Proposition 1. *On suppose que les espaces Φ_h sont tels que:*

$$\forall T\in\mathcal{T}_h, P_m\subset P_T\subset C^1(T), avec\ m\ge 1\ donné. \tag{3}$$

Alors, il existe une constante $h_0 > 0$ telle que pour tout $h \leq h_0$, les formes bilinéaires approchées $A_h(.,.)$ sont bien définies sur $W \times W$. De plus, il existe une constante C_A indépendante de l'épaisseur ε et du paramètre de discretisation h telle que:

$$\forall S, R \in W, \mid A(S,R) - A_h(S,R) \mid \leq C_A \|S\|_{0,\omega,\varepsilon} \|R\|_{0,\omega,\varepsilon} h^m$$

où $\|R\|^2_{0,\omega,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\|\underset{\sim 1}{R}\|^2_{0,\omega} + \frac{1}{\varepsilon}\|\underset{\approx 2}{R}\|^2_{0,\omega} + \frac{1}{\varepsilon^3}\|\underset{\approx 3}{R}\|^2_{0,\omega}$.

Démonstration. L'hypothèse (3) donne l'existence d'une constante C indépendante de h telle que:

$$\sup_{\zeta \in \cup \overset{\circ}{T}} \mid \partial_\alpha \varphi_i(\zeta) - \partial_\alpha \varphi_{ih}(\zeta) \mid \leq C h^m \mid \varphi_i \mid_{m+1,\infty,\overline{\omega}} .$$

De plus, $\inf_{\zeta \in \cup \overset{\circ}{T}} a(\psi_{i\alpha}(\zeta)) \geq a_0 > 0$, où a_0 est une constante et $\psi_{i\alpha}$ sont des fonctions à valeurs réel définies sur $\cup \overset{\circ}{T}$ telles que $\sup_{\zeta \in \cup \overset{\circ}{T}} \mid \partial_\alpha \varphi_i(\zeta) - \psi_{i\alpha}(\zeta) \mid \leq \delta$, avec δ une constante positive (voir Théorème 8.2.1 de [5] (pp. 443-446) .

La forme obtenue pour $A(.,.)$ avec des rapports entre des polynômes dépendant de la première dérivée de φ et $\sqrt{a}$ nous permet d'obtenir la conclusion comme en Théorème 8.2.1 de [5]. □

On écrit la forme bilinéaire $B(.,.)$ comme:

$$\begin{aligned} B(R,Y) = & \frac{1}{2}\int_\omega div \underset{\sim 1}{R}\, \eta_3 d\omega - \frac{1}{2}\int_\omega R_1^{\alpha 3} b_\alpha^\rho \eta_\rho d\omega - \frac{1}{2}\int_\omega R_1^{\alpha 3} r_\alpha d\omega \\ & - \int_\omega R_2^{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha,\beta} + \eta_{\beta,\alpha}\right) - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\eta_\lambda - b_{\alpha\beta}\eta_3\right] d\omega \\ & - \int_\omega R_3^{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\left(r_{\alpha,\beta} + r_{\beta,\alpha}\right) - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} r_\lambda - b_\alpha^\rho \eta_{\rho,\beta} + b_\alpha^\rho \Gamma^\lambda_{\rho\beta}\eta_\lambda + c_{\alpha\beta}\eta_3\right] d\omega, \end{aligned} \tag{4}$$

en utilisant la définition de la dérivée covariante d'un vecteur et la symétrie des tenseurs $(R_3^{\alpha\beta})$ et $(c_{\alpha\beta})$.

Or la géométrie de la surface définie à l'aide de la carte φ donne b_α^ρ, $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ et $c_{\alpha\beta}$ comme des rapports entre des polynômes dépendant des dérivées d'ordre un et deux de φ et des puissances m de $\sqrt{a}$, avec m égal à trois, deux, un et respectivement quatre. Par conséquent, une téchnique similaire employée dans l'expression (4) de $B(.,.)$ conduit à l'obtention de la

proposition suivante. Certainement, les termes de $B(.,.)$ qui ne contiennent pas des coefficients variables et donc qui restent inchangés en discret, ne sont pas considérés dans notre analyse.

Proposition 2. *On suppose que les espaces Φ_h sont tels que:*

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, P_m \subset P_T \subset C^2(T), \text{avec } m \geq 2 \text{ donné.} \tag{5}$$

Alors, il existe une constante $h_0 > 0$ telle que pour tout $h \leq h_0$, les formes bilinéaires $B_h(.,.)$ sont bien définies sur $W \times M$. De plus, il existe une constante C_B strictement positive, indépendante de l'épaisseur ε et du paramètre de discretisation h telle que:

$$\forall R \in W, \forall Y \in M, \mid B(R,Y) - B_h(R,Y) \mid \leq C_B \|R\|_W \|Y\|_M h^{m-1}.$$

□

D'après l'expression de la forme linéaire $F(.)$ on a, avec le théorème 8.2.1. de [5] la proposition suivante.

Proposition 3. *On suppose que les espaces Φ_h sont tels que:*

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, P_m \subset P_T \subset C^1(T), \text{ avec } m \geq 1 \text{ donné.}$$

Alors, il existe une constante $h_0 > 0$ telle que pour tout $h \leq h_0$, les formes linéaires $F_h(.)$ sont bien définies sur M. De plus, il existe une constante C_F strictement positive, indépendante de l'épaisseur ε et du paramètre de discretisation h telle que:

$$\forall Y \in M, \mid F(Y) - F_h(Y) \mid \leq C_F \|\underset{\sim}{p}\|_{0,\omega} \|Y\|_M h^m.$$

□

Théorème 1. *Pour h assez petit, le problème* (2) *admet une solution et une seule (T_h, X_h).*

Démonstration. Conformément à la théorie de Babuska-Brezzi (voir [4], [7]) , la conclusion découle d'après l'ellipticité de $A_h(.,.)$ sur $Ker_h \mathcal{B}_h = \{R_h \in W_h; \forall Y_h \in M_h, B_h(R_h, Y_h) = 0\}$, où l'opérateur $\mathcal{B}_h : W_h \to M_h^*$ est défini à l'aide du produit de dualité entre M_h^* et M_h.i.e.:

$$\forall R_h \in W_h, \forall Y_h \in M_h, < \mathcal{B}_h R_h, Y_h >_{M_h^*, M_h} = B_h(R_h, Y_h)$$

et ausi de la condition inf-sup sur $B_h(.,.)$ en discret.

Moyennant la Proposition 1, l'identité $A_h(R,R) = A(R,R)+A_h(R,R)-A(R,R)$ et la norme $\|R\|_{0,\omega,\varepsilon} = (\frac{1}{\varepsilon}\|\underset{\sim 1}{R}\|^2_{0,\omega} + \frac{1}{\varepsilon}\|\underset{\approx 2}{R}\|^2_{0,\omega} + \frac{1}{\varepsilon^3}\|\underset{\approx 3}{R}\|^2_{0,\omega})^{\frac{1}{2}}$,on obtient, pour h tel que $h \leq h_0$, avec h_0 donné par la Proposition 1, que:

$$\forall R \in W, A_h(R,R) \geq C_1\|R\|^2_{0,\omega,\varepsilon} - C_2\|R\|^2_{0,\omega,\varepsilon}h^m.$$

Soit $h_0^{'}$ tel que $0 < h_0^{'} < (\frac{C_1}{C_2})^{\frac{1}{m}}$, avec m entier, $m \geq 1$.

On considère $h_0^{"} = \min(h_0^{'}, h_0)$, qui est une constante strictement positive et indépendante du paramètre de discretisation h. Avec $h \leq h_0^{"}$ on obtient:

$$\forall R \in W, A_h(R,R) \geq C\|R\|^2_{0,\omega,\varepsilon},$$

où $C = C_1 - C_2\left(h_0^{"}\right)^m$ est une constante strictement positive et indepéndante du paramètre de discretisation h.

De la dernière relation on obtient:

$$\forall h \leq h_0^{"},\ \forall R \in W,\ A_h(R,R) \geq C\frac{1}{\varepsilon}\|R\|^2_{0,\omega}.$$

Ensuite, l'ellipticité de $A_h(.,.)$ sur $Ker_h\mathcal{B}_h$ résulte d'une manière analogue à celle de $A(.,.)$ sur $Ker\mathcal{B}$, en définissant:

$$S_{h1} = \{R_h \in W_h; \forall Y_h \in M_{h1} \times \{0,0\} \times \{0,0\}, B_h(R_h, Y_h) = 0\} \subset Ker_h\mathcal{B}_h$$

et en remarquant que (5) donne

$$\begin{cases} \sup\limits_{\xi \in \overset{\circ}{\cup T}} \mid \partial_\alpha\varphi_i(\xi) - \partial_\alpha\varphi_{ih}(\xi) \mid \leq Ch^m \mid \varphi_i \mid_{m+1,\infty,\overline{\omega}}, \\ \sup\limits_{\xi \in \overset{\circ}{\cup T}} \mid \partial_{\alpha\beta}\varphi_i(\xi) - \partial_{\alpha\beta}\varphi_{ih}(\xi) \mid \leq Ch^{m-1} \mid \varphi_i \mid_{m+1,\infty,\overline{\omega}}, \end{cases}$$

conduisant à l'obtention de:

$$\sup_{\xi \in \overset{\circ}{\cup T}} \mid \partial_\alpha\varphi_{ih}(\xi) \mid \leq K;\ \sup_{\xi \in \overset{\circ}{\cup T}} \mid \partial_{\alpha\beta}\varphi_{ih}(\xi) \mid \leq K,$$

avec K une constante strictement positive et indépendante de h, d'où:

$$\{\mid b_{h\alpha\beta} \mid, \mid c_{h\alpha\beta} \mid\} \leq K.$$

On tient compte ensuite qu'on utilise une approximation conforme, i.e. $W_h \subset W$.

La condition inf-sup en discret sur $B_h(.,.)$ résulte d'après la Proposition 2, la condition inf-sup en discret sur $B(.,.)$ et en utilisant l'identité $B_h(R_h, Y_h) = B(R_h, Y_h) + B_h(R_h, Y_h) - B(R_h, Y_h)$. $\square$

Remarque 1. Il est clair que la continuité respectivement de $A_h(.,.)$, $B_h(.,.)$ et $F_h(.)$ sur $W \times W$, $W \times M$ et M s'ensuivent d'après les Propositions 1,2 et 3.

Remarque 2. La condition $\inf - \sup$ en discret sur $B(.,.)$ est obtenue pour h assez petit et en supposant qu'on a la solution du problème auxiliaire (6) de [9] appartenant à $\left[W^{s+1,q}(\omega)\right]^5$, $0 < s < 1$, $q \geq 2$, $(s+1)q > 2$, avec l'utilisation des propriétés de l'interpolé équilibre démontrés en [1].

4. La majoration d'erreur

Tout au long de ce paragraphe on étudie la majoration d'erreur en utilisant d'abord des normes naturelles et après des normes qui dépendent de l'épaisseur ε.

On tient également compte de la variation de forces exterieures selon l'épaisseur en posant $\underset{\sim}{p} = \varepsilon^i \underset{\sim}{f}$, $i = 0, 1, 2, 3$, avec $\underset{\sim}{f}$ une force indépendante de l'épaisseur ε.

La forme bilinéaire $A(.,.)$ et celle linéaire $F(.)$ devient:

$$\begin{aligned} A(T,R) &= \int_\omega \varepsilon^{i-1} t^{\alpha 3} g_{\alpha 3 \beta 3} R_1^{\beta 3} \frac{1}{\sqrt{a}}\, d\omega + \int_\omega \varepsilon^{i-1} n^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_2^{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{a}}\, d\omega \\ &\quad + \int_\omega \varepsilon^{i-3} 3 m^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\rho\sigma} R_3^{\rho\sigma} \frac{1}{\sqrt{a}}\, d\omega, \\ F(Y) &= \int_\omega f^i \eta_i \sqrt{a}\, d\omega, \end{aligned}$$

la forme bilinéaire $B(.,.)$ restant inchangée.

On dénote par $\mathcal{A}$ la constante de continuité de $A(.,.)$, par $\mathcal{A}_1$ la constante de continuité de $A_h(.,.)$, par α la constante d'ellipticité de $A_h(.,.)$ sur $Ker_h \mathcal{B}_h$, par $\mathcal{B}$ la constante de continuité de $B(.,.)$ et par β la constante de compatibilité entre W_h et M_h. On pose:

$$C_1(\varepsilon) = \max\left(1 + \frac{\mathcal{A}}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right);\ C_2(\varepsilon) = \frac{1 + \mathcal{A} + \mathcal{A}_1}{\beta};$$

$$C(\varepsilon) = C_1(\varepsilon)\max(1 + BC_2(\varepsilon), C_2(\varepsilon), B);$$

$$C_3(\varepsilon) = \max\left(\frac{2\mathcal{A} + \mathcal{A}_1}{\beta}, 1 + \frac{\mathcal{B}}{\beta}, \frac{1}{\beta}\right);\quad K(\varepsilon) = C_3(\varepsilon)(C(\varepsilon) + 1).$$

On utilise ensuite les résultats de majoration d'erreur pour les problèmes mixtes établis dans [8], i.e.:

$$\begin{aligned}
&\|T - T_h\|_W \le C(\varepsilon)\Bigg\{\inf_{R_h\in W_h}\|T - R_h\|_W + \inf_{Y_h\in M_h}\|X - Y_h\|_M \\
&+ \inf_{R_h\in W_h}\sup_{T_h\in W_h}\frac{|\ A(R_h, T_h) - A_h(R_h, T_h)\ |}{\|T_h\|_W} \\
&+ \inf_{R_h\in W_h}\sup_{Y_h\in M_h}\frac{|\ B(R_h, Y_h) - B_h(R_h, Y_h)\ |}{\|Y_h\|_M} + \sup_{Y_h\in M_h}\frac{|\ F(Y_h) - F_h(Y_h)\ |}{\|Y_h\|_M}\Bigg\}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\|X - X_h\|_M \le K(\varepsilon)\Bigg\{\inf_{R_h\in W_h}\|T - R_h\|_W + \inf_{Y_h\in M_h}\|X - Y_h\|_M \\
&+ \inf_{R_h\in W_h}\sup_{T_h\in W_h}\frac{|\ A(R_h, T_h) - A_h(R_h, T_h)\ |}{\|T_h\|_W} \\
&+ \inf_{R_h\in W_h}\sup_{Y_h\in M_h}\frac{|\ B(R_h, Y_h) - B_h(R_h, Y_h)\ |}{\|Y_h\|_M} \\
&+ \inf_{Y_h\in M_h}\sup_{R_h\in W_h}\frac{|\ B(R_h, Y_h) - B_h(R_h, Y_h)\ |}{\|R_h\|_W} + \sup_{Y_h\in M_h}\frac{|\ F(Y_h) - F_h(Y_h)\ |}{\|Y_h\|_M}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Dans le cas des normes naturelles on obtient $C(\varepsilon) \le K_1\varepsilon^{i-5}$ et $K(\varepsilon) \le K_2\varepsilon^{2i-8}$, d'où:

$$\varepsilon^{5-i}\|T - T_h\|_W \le C\Bigg\{\inf_{R_h\in W_h}\|T - R_h\|_W + \inf_{Y_h\in M_h}\|X - Y_h\|_M$$

$$
\begin{aligned}
&+ \inf_{R_h \in W_h} \sup_{T_h \in W_h} \frac{\mid A(R_h, T_h) - A_h(R_h, T_h) \mid}{\|T_h\|_W} \\
&+ \inf_{R_h \in W_h} \sup_{Y_h \in M_h} \frac{\mid B(R_h, Y_h) - B_h(R_h, Y_h) \mid}{\|Y_h\|_M} \\
&+ \sup_{Y_h \in M_h} \frac{\mid F(Y_h) - F_h(Y_h) \mid}{\|Y_h\|_M} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{8-2i}\|X - X_h\|_M \leq C \Bigg\{ & \inf_{R_h \in W_h} \|T - R_h\|_W + \inf_{Y_h \in M_h} \|X - Y_h\|_M \\
&+ \inf_{R_h \in W_h} \sup_{T_h \in W_h} \frac{\mid A(R_h, T_h) - A_h(R_h, T_h) \mid}{\|T_h\|_W} \\
&+ \inf_{R_h \in W_h} \sup_{Y_h \in M_h} \frac{\mid B(R_h, Y_h) - B_h(R_h, Y_h) \mid}{\|Y_h\|_M} \\
&+ \inf_{Y_h \in M_h} \sup_{R_h \in W_h} \frac{\mid B(R_h, Y_h) - B_h(R_h, Y_h) \mid}{\|R_h\|_W} \\
&+ \sup_{Y_h \in M_h} \frac{\mid F(Y_h) - F_h(Y_h) \mid}{\|Y_h\|_M} \Bigg\},
\end{aligned}
$$

avec C une constante strictement positive et indépendante de l'épaisseur ε et du paramètre de discretisation h.

Remarque 3. Par rapport aux résultats obtenus dans le cas où la carte φ est connue (voir [9]), les puissances de l'épaisseur ε ont augmentée avec $3 - i$.

Si on considère les deux normes dépendantes de l'épaisseur respectivement dans W et M,

$$
\begin{aligned}
\|R\|_{W,\varepsilon} &= \left(\varepsilon^{i-1}\|\underset{\sim}{R}_1\|^2_{H(div;\omega)} + \varepsilon^{i-1}\|\underset{\approx}{R}_2\|^2_{0,\omega} + \varepsilon^{i-3}\|\underset{\approx}{R}_3\|^2_{0,\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\|Y\|_{M,\varepsilon} &= \varepsilon^{\frac{1-i}{2}}\|Y\|_M,
\end{aligned}
$$

on obtient alors $C(\varepsilon) \leq K_1\varepsilon^{-1}$ et $K(\varepsilon) \leq K_2\varepsilon^{-2}$.

Par conséquent pour $i = 0, 1, 2$, on trouve:

$$
\varepsilon^2\|\underset{\sim}{t} - \underset{\sim}{t}_h\|_{H(div;\omega)} + \varepsilon^2\|\underset{\approx}{n} - \underset{\approx}{n}_h\|_{0,\omega} + \varepsilon\|\underset{\approx}{m} - \underset{\approx}{m}_h\|_{0,\omega}
$$

$$\leq C\left\{\inf_{R_h\in W_h}\|T-R_h\|_W+\inf_{Y_h\in M_h}\|X-Y_h\|_M\right.$$
$$+\inf_{R_h\in W_h}\sup_{T_h\in W_h}\frac{\mid A(R_h,T_h)-A_h(R_h,T_h)\mid}{\|T_h\|_W}$$
$$+\inf_{R_h\in W_h}\sup_{Y_h\in M_h}\frac{\mid B(R_h,Y_h)-B_h(R_h,Y_h)\mid}{\|Y_h\|_M}$$
$$\left.+\sup_{Y_h\in M_h}\frac{\mid F(Y_h)-F_h(Y_h)\mid}{\|Y_h\|_M}\right\}$$

et

$$\varepsilon^{4-i}\|X-X_h\|_M\leq C\left\{\inf_{R_h\in W_h}\|T-R_h\|_W+\inf_{Y_h\in M_h}\|X-Y_h\|_M\right.$$
$$+\inf_{R_h\in W_h}\sup_{T_h\in W_h}\frac{\mid A(R_h,T_h)-A_h(R_h,T_h)\mid}{\|T_h\|_W}$$
$$+\inf_{R_h\in W_h}\sup_{Y_h\in M_h}\frac{\mid B(R_h,Y_h)-B_h(R_h,Y_h)\mid}{\|Y_h\|_M}$$
$$\left.+\inf_{Y_h\in M_h}\sup_{R_h\in W_h}\frac{\mid B(R_h,Y_h)-B_h(R_h,Y_h)\mid}{\|R_h\|_W}+\sup_{Y_h\in M_h}\frac{\mid F(Y_h)-F_h(Y_h)\mid}{\|Y_h\|_M}\right\},$$

avec C une constante strictement positive et indépendante de l'épaisseur et du paramètre de discretisation h.

Dans le cas où $i=3$ on a:

$$\varepsilon^3\|\underset{\sim}{t}-\underset{\sim h}{t}\|_{H(div;\omega)}+\varepsilon^3\|\underset{\approx}{n}-\underset{\approx h}{n}\|_{0,\omega}+\varepsilon^2\|\underset{\approx}{m}-\underset{\approx h}{m}\|_{0,\omega}$$
$$\leq C\left\{\inf_{R_h\in W_h}\|T-R_h\|_W+\inf_{Y_h\in M_h}\|X-Y_h\|_M\right.$$
$$+\inf_{R_h\in W_h}\sup_{T_h\in W_h}\frac{\mid A(R_h,T_h)-A_h(R_h,T_h)\mid}{\|T_h\|_W}$$
$$\left.+\inf_{R_h\in W_h}\sup_{Y_h\in M_h}\frac{\mid B(R_h,Y_h)-B_h(R_h,Y_h)\mid}{\|Y_h\|_M}+\sup_{Y_h\in M_h}\frac{\mid F(Y_h)-F_h(Y_h)\mid}{\|Y_h\|_M}\right\}$$

et

$$\varepsilon^2\|X-X_h\|_M\leq C\left\{\inf_{R_h\in W_h}\|T-R_h\|_W+\inf_{Y_h\in M_h}\|X-Y_h\|_M\right.$$

$$+ \inf_{R_h \in W_h} \sup_{T_h \in W_h} \frac{\mid A(R_h, T_h) - A_h(R_h, T_h) \mid}{\|T_h\|_W}$$
$$+ \inf_{R_h \in W_h} \sup_{Y_h \in M_h} \frac{\mid B(R_h, Y_h) - B_h(R_h, Y_h) \mid}{\|Y_h\|_M}$$
$$\left. + \inf_{Y_h \in M_h} \sup_{R_h \in W_h} \frac{\mid B(R_h, Y_h) - B_h(R_h, Y_h) \mid}{\|R_h\|_W} + \sup_{Y_h \in M_h} \frac{\mid F(Y_h) - F_h(Y_h) \mid}{\|Y_h\|_M} \right\},$$

avec C une constante strictement positive et indépendante de l'épaisseur ε et du paramètre de discretisation h.

Remarque 4. Par rapport aux résultats obtenus dans le cas où la carte φ est connue (voir [9]), les puissances de l'épaisseur ε ont augmenté avec 1.

Remarque 5. Les résultats restent vrais si on employe, au lieu de D_{k+1}, un des espaces: BDM_{k+1}, $BDFM_{k+1}$, $BDM_{[k+1]}$, $BDFM_{[k+1]}$ (voir [4] pour les notations), les deux derniers étant utilisés dans le cas d'une triangulation formée par des quadrilatères.

REFERENCES

1. Agouzal, A. – *Analyse numérique de méthodes de decomposition des domaines. Méthodes de domaines fictifs avec multiplicateurs de Lagrange,* Thèse de doctorat, Univérsité de Pau, France, 1993.
2. Bernadou, M. – *Méthodes d'éléments finis pour les problèmes des coques minces,* Masson, Paris, France, 1994.
3. Bernadou, M.; Ciarlet, P.G; Miara, B. – *Existence theorems for two-dimensional linear shell theories,* J. Elasticity, 34 (1994), 111–138.
4. Brezzi, F.; Fortin, M. – *Mixed and Hybrid Finite Element Methods,* Springer Series in Computational Mathematics, 15, Springer-Verlag, New York, 1991.
5. Ciarlet, P.G. – *The Finite Element Method for Elliptic Problems,* Studies in Mathematics and its Applications, 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978.
6. Nečas, J. – *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques* (French), Masson et Cie, Éditeurs, Paris; Academia, Éditeurs, Prague, 1967.
7. Roberts, J.E.; Thomas, J.-M. – *Mixed and hybrid methods,* Handbook of numerical analysis, Vol. II, 523–639, Handb. Numer. Anal., II, North-Holland, Amsterdam, 1991.

8. Thomas, J.-M. – *Sur l'analyse numérique des méthodes d'léments finis hybrides et mixtes*, Thèse d'état, Université Paris 6, 1977.

9. Ţârdea, G. – *Dualisation du cisaillement transverse dans le modèle de Naghdi pour la flexion des coques minces,* An. Ştiinţ. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi, Mat., 41 (1995), 401–408.

Received: 5.VI.2009

Faculty of Mathematics,
University "Al.I. Cuza",
11, Bd. Carol I, 700506, Iaşi,
ROMANIA
gabriela.tanase@uaic.ro