CONSIDÉRATIONS SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE: $F[F(x+y)-F(x)-F(y)+z]-F[F(x+y)-F(x)-F(y)]-F(z)=$ $=F[F(z+y)-F(z)-F(y)+x]-F[F(z+y)-F(z)-F(y)]-F(x)$ DANS UN ESPACE LINÉAIRE

PAR

ION CREANGĂ

Communication présentée au Congrès International des Mathématiciens, Moscou, 16–26 août 1966

Nous avons considéré, dans un travail précédent [3], des algèbres A_F, qui peuvent être attachées, dans un espace linéaire R, aux opérateurs F, en prenant comme opération interne en R, l'opération suivante:

$$x \circ y = F(x+y) - F(x) - F(y). \tag{1}$$

On suppose toujours que $F(0)=0$, pour garder la propriété d'annulation du produit quand l'un des facteurs est zéro. Ainsi, R devient une algèbre A_F; si F est linéaire, l'algèbre A_F se réduit à l'algèbre nulle: $A_F^2=0$; si F est non-linéaire, en général, l'algèbre A_F est commutative mais non-distributive et non-associative.

Dans le travail cité, nous avons cherché les conditions pour que ces algèbres soient distributives. Nous avons trouvé que les seules algèbres distributives, dans le cas où R a un nombre fini de dimensions et où les coordonnées de F sont des polynômes des coordonnées de x, sont celles pour lesquelles ces polynômes sont de second degré.

Dans cette Note, nous nous préoccupons des opérateurs F qui conduisent aux algèbres associatives. La condition d'associativité:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \tag{2}$$

est équivalente à l'équation fonctionnelle:

$$F[F(x+y)-F(x)-F(y)-z]-F[F(x+y)-F(x)-F(y)]- \tag{3}$$
$$-F(z)=F[F(z+y)-F(z)-F(y)+x]-F[F(z+y)-F(z)-F(y)]-F(x)$$

que l'on peut nommer l'équation de l'associativité.

Il en existe des solutions : l'une est la solution banale : $F(x)$ opérateur linéaire. Il y a aussi d'autres solutions ; par exemple dans le cas $\dim R = 1$, nous avons les solutions : $F(x) = x^2$, $F(x) = [x]$, $F(x) = \{x\}$, où $[x]$ est la partie entière de x et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x.

Nous nous limitons ici seulement aux opérateurs algébriques, c'est-à-dire pour les opérateurs qui, dans les espaces linéaires de dimension finies, ont leurs coordonnées exprimées par des polynômes dans les coordonnées de l'argument.

Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base dans l'espace R_n. Nous avons :

$$x = \xi^i e_i \,;\; F(x) = \varphi^j e_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

et

$$\varphi^j = \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{k!} \alpha^j_{h_1 h_2 \ldots h_k} \xi^{h_1} \xi^{h_2} \ldots \xi^{h_k}, \tag{5}$$

m_j étant le degré du polynôme φ^j et les indices h_i des indices de sommation ; les coefficients $\alpha^j_{h_1 h_2 \ldots h_k}$ sont considérés symétriques par rapport au groupe des permutations des indices d'en bas.

L'expression du produit $x \circ y$ prend alors la forme:

$$x \circ y = \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{k!} \alpha^j_{h_1 h_2 \ldots h_k} T^{h_1 h_2 \ldots h_k}(x, y)\, e_j \tag{6}$$

où

$$T^{h_1 h_2 \ldots h_k}(x, y) = \sum_{l=1}^{k-1} \underset{i_1 i_2 \ldots i_l}{S} \prod_{q=1}^{l} \xi^{h_{i_q}} \prod_{r=l+1}^{k} \eta^{h_{i_r}}, \tag{7}$$

$i_1, i_2, \ldots, i_l$ étant l'une des combinaisons des indices $1, 2, \ldots, k$; les autres indices $i_{l+1}, i_{l+2}, \ldots, i_k$ complètent la permutation $i_1 i_2 \ldots i_l i_{l+1} \ldots i_k$ des indices $1, 2, \ldots, k$ et $\underset{i_1 i_2 \ldots i_l}{S}$ est la somme étendue à toutes les combinaisons C_k^l.

On remarque que :

a) $T^{h_1 h_2 \ldots h_k}(x, y)$ satisfait à la relation de récurrence

$$T^{h_1}(x, y) = 0,$$

$$T^{h_1 h_2 \ldots h_k}(x, y) = (T^{h_1 h_2 \ldots h_{k-1}}(x, y) + \eta^{h_1} \eta^{h_2} \ldots \eta^{h_{k-1}})\, \xi^{h_k} + \tag{8}$$
$$+ (T^{h_1 h_2 \ldots h_{k-1}}(x, y) + \xi^{h_1} \xi^{h_2} \ldots \xi^{h_{k-1}})\, \eta^{h_k} \,;$$

b)
$$\frac{\partial T^{h_1 h_2 \ldots h_k}}{\partial \xi^{h_k}} = T^{h_1 h_2 \ldots h_{k-1}}(x, y) + \eta^{h_1} \eta^{h_2} \ldots \eta^{h_{k-1}}$$

et, par suite,

$$T^{h_1 h_2 \ldots h_k} = \frac{\partial T^{h_1 h_2 \ldots h_k}}{\partial \xi^{h_k}} \xi^{h_k} + \frac{\partial T^{h_1 h_2 \ldots h_k}}{\partial \eta^{h_k}} \eta^{h_k}. \tag{9}$$

c) On doit appliquer avec soin les formules (7) et (8), quand quelques indices de la suite $h_1, h_2, \ldots, h_k$ deviennent égaux.

L'expression de $(x \circ y) \circ z$ se présente sous la forme :

$$(x \circ y) \circ z = \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{k!} \alpha^j_{h_1 h_2 \ldots h_k} T^{h_1 h_2 \ldots h_k}(x \circ y, z)\, e_j \tag{10}$$

avec

$$T^{h_1 h_2 \ldots h_k}(x \circ y, z) = \sum_{l=1}^{k-1} \underset{i_1 i_2 \ldots i_l}{S} \sum_{n_{i_1}=1}^{m_{h_{i_1}}} \sum_{n_{i_2}=1}^{m_{h_{i_2}}} \cdots \sum_{n_{i_l}=1}^{m_{h_{i_l}}} \frac{1}{n_{i_1}!} \tag{11}$$

$$\frac{1}{n_{i_2}!} \cdots \frac{1}{n_{i_l}!} \alpha^{h_{i_1}}_{s_{1i_1} s_{2i_1} \ldots s_{n_{i_1} i_1}} \alpha^{h_{i_2}}_{s_{1i_2} s_{2i_2} \ldots s_{n_{i_2} i_2}} \cdots \alpha^{h_{i_l}}_{s_{1i_l} s_{2i_l} \ldots s_{n_{i_l} i_l}} \cdot$$

$$\cdot\, T^{s_{1i_1} s_{2i_1} \ldots s_{n_{i_1} i_1}}(x, y) \cdot T^{s_{1i_2} s_{2i_2} \ldots s_{n_{i_2} i_2}}(x, y) \ldots$$

$$\ldots T^{s_{1i_l} s_{2i_l} \ldots s_{n_{i_l} i_l}}(x, y)\, \zeta^{h_{i_{l+1}}} \cdot \zeta^{h_{i_{l+2}}} \ldots \zeta^{h_{i_k}}.$$

Nous obtenons ainsi

$$(x \circ y) \circ z = \Bigg\{ \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{k!} \alpha^j_{h_1 h_2 \ldots h_k} \tag{12}$$

$$\sum_{l=1}^{k-1} \underset{i_1 i_2 \ldots i_l}{S} \sum_{n_{i_1}=1}^{m_{h_{i_1}}} \sum_{n_{i_2}=1}^{m_{h_{i_2}}} \cdots \sum_{n_{i_l}=1}^{m_{h_{i_l}}} \frac{1}{n_{i_1}!} \frac{1}{n_{i_2}!} \cdots \frac{1}{n_{i_l}!} \alpha^{h_{i_1}}_{s_{1i_1} s_{2i_1} \ldots s_{ni_1} i_1} \cdot$$

$$\alpha^{h_{i_2}}_{s_{1i_2} s_{2i_2} \ldots s_{n_{i_2} i_2}} \cdots \alpha^{h_{i_l}}_{s_{1i_l} s_{2i_l} \ldots s_{n_{i_l} i_l}} \zeta^{h_{i_{l+1}}} \zeta^{h_{i_{l+2}}} \ldots$$

$$\ldots \zeta^{h_{i_k}} \sum_{p_1=1}^{n_{i_1}-1} \sum_{p_2=1}^{n_{i_2}-1} \cdots \sum_{p_l=1}^{n_{i_p}-1} \underset{u_1 u_2 \ldots u_{p_1}}{\overset{1,2,\ldots,n_{i_1}}{S}} \underset{v_1 v_2 \ldots v_{p_2}}{\overset{1,2,\ldots,n_{i_2}}{S}} \cdots \underset{w_1 w_2 \ldots w_{p_l}}{\overset{1,2,\ldots,n_{i_l}}{S}}$$

$$\left(\xi^{s_{u_1 i_1}} \xi^{s_{u_2 i_1}} \ldots \xi^{s_{u_{p_1} i_1}}\right) \left(\xi^{s_{v_1 i_2}} \ldots \xi^{s_{v_{p_2} i_2}}\right) \ldots \left(\xi^{s_{w_1 i_l}} \xi^{s_{w_2 i_l}} \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \xi^{s_{w_{p_l} i_l}}\right) \ldots \left(\eta^{s_{u_{p_1+1} i_1}} \eta^{s_{u_{p_1+2} i_1}} \ldots \eta^{s_{u_{n_{i_1}} i_1}}\right) \left(\eta^{s_{v_{p_2+1} i_2}}\right.$$

$$\left.\eta^{s_{v_{p_2+2} i_2}} \ldots \eta^{s_{v_{n_{i_2}} i_2}}\right) \ldots \left(\eta^{s_{w_{p_l+1} i_l}} \eta^{s_{w_{p_l+2} i_2}} \ldots \eta^{s_{w_{n_l} i_l}}\right) \Bigg\} e_j \,.$$

Les indices qui se trouvent en bas et en haut doivent être variés de 1 à n. Remarquons que les coordonnées du produit $(x \circ y) \circ z$ sont des polynômes des coordonnées de x, y, z ; le degré de ces polynômes est, au maximum

$$(m_j - 1) \max_{j=1}^{n} m_j + 1. \tag{13}$$

Les conditions d'associativité sont données par le système

$$\sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{k!} \alpha^j_{h_1 h_2 \ldots h_k} \left[T^{h_1 h_2 \ldots h_k}(x \circ y, z) - T^{h_1 h_2 \ldots h_k}(x, y \circ z) \right] = 0 \tag{14}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

et pour avoir des algèbres associatives il faudra annuler tous les coefficients de ces poynômes. On trouvera des conditions entre les coefficients $\alpha^j_{h_1 h_2 \ldots hk}$ et si ces conditions seront compatibles elles donneront des solutions pour l'équation de l'associativité.

Les calculs et les expressions sont assez compliqués ; nous ne donnons ici que les résultats pour les cas $n = 1$ et $n = 2$, $m_1 = m_2 = 3$.

Pour $n = 1$, en dehors de la solution banale $F(x) = x$, il existe la seule solution algébrique $F(x) = x^2$, qui nous donne le produit habituel $x \circ y = x \cdot y$.

Pour $n = 2$ et $m_1 = m_2 = 3$, de (14) nous avons :

$$\frac{1}{2} \alpha^1_{h_1 h_2} [T^{h_1 h_2}(x \circ y, z) - T^{h_1 h_2}(x, y \circ z)] + \tag{15}$$

$$\frac{1}{6} \alpha^1_{h_1 h_2 h_3} [T^{h_1 h_2 h_3}(x \circ y, z) - T^{h_1 h_2 h_3}(x, y \circ z)] = 0,$$

$$\frac{1}{2} \alpha^2_{h_1 h_2} [T^{h_1 h_2}(x \circ y, z) - T^{h_1 h_2}(x, y \circ z)] +$$

$$+ \frac{1}{6} \alpha^2_{h_1 h_2 h_3} [T^{h_1 h_2 h_3}(x \circ y, z) - T^{h_1 h_2 h_3}(x, y \circ z)] = 0.$$

En effectuant les calculs, on obtient

$$\alpha^t_{rs} \alpha^s_{hi} - \alpha^t_{is} \alpha^s_{hr} = 0, \tag{16}$$

$$\alpha^t_{rs} \alpha^s_{hik} - \alpha^s_{hr} \alpha^t_{isk} = 0, \tag{17}$$

$$\alpha^t_{rsp} \alpha^s_{hik} = 0, \tag{18}$$

$$\alpha^t_{rsp} \alpha^s_{hi} \alpha^p_{uv} = 0. \tag{19}$$

Ce sont les relations de structure pour l'algèbre. On observe que dans les cas $\alpha^t_{rsp} = 0$, c'est-à-dire pour les opérateurs quadratiques, il reste seulement la relation (16), qui donne des algèbres commutatives, associatives et distributives et qui sont des relations de structure d'une algèbre qui a pour tableau de multiplication : $e_i e_j = \alpha^k_{ij} e_k$, α^k_{ij} étant les constantes de structure.

Dans le cas $\alpha^t_{rsp} \neq 0$, on obtient trois solutions :

(I) $\alpha^1_{111} = \alpha^1_{211} = \alpha^1_{221} = \alpha^1_{222} = \alpha^2_{211} = \alpha^2_{221} = \alpha^2_{222} = 0$; $\alpha^2_{111} \neq 0$;

(II) $\alpha^1_{111} = \alpha^1_{211} = \alpha^1_{221} = \alpha^2_{111} = \alpha^2_{211} = \alpha^2_{221} = \alpha^2_{222} = 0$; $\alpha^1_{222} \neq 0$;

(III) $\alpha^1_{111} = \alpha^1_{211} = \alpha^1_{221} = \alpha^1_{222} = -\alpha^2_{111} = -\alpha^2_{211} = -\alpha^2_{221} = -\alpha^2_{222}$

qui donnent, respectivement

$$F(x) = A(x) + [\lambda(\xi^1)^2 + \mu(\xi^1)^3] e_2,$$

$$F(x) = A(x) + [\lambda(\xi^2)^2 + \mu(\xi^2)^3] e_1, \tag{21}$$

$$F(x) = A(x) + [\lambda(\xi^1 + \xi^2)^2 + \mu(\xi^1 + \xi^2)^3](e_1 - e_2),$$

où $A(x)$ est un opérateur linéaire arbitraire.

Leur produit est de la forme

$$x \circ y = [2\lambda \xi^1 \eta^1 + 3\mu \xi^1 \eta^1 (\xi^1 + \eta^1)] e_2,$$

$$x \circ y = [2\lambda \xi^2 \eta^2 + 3\mu \xi^2 \eta^2 (\xi^2 + \eta^2)] e_1$$

ou

$$x \circ y = [2\lambda(\xi^1 + \xi^2)(\eta^1 + \eta^2) + 3\mu(\xi^1 + \xi^2)(\eta^1 + \eta^2)(\xi^1 + \xi^2 + \eta^1 + \eta^2)](e_1 - e_2).$$

Dans tous ces cas nous avons

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = 0.$$

Par conséquent ces algèbres sont des algèbres nilpotentes d'indice trois.

Pour n quelconque, il y en a des solutions particulières de la forme

$$F(x) = \varphi^{r+1}(\xi^1 \xi^2 \ldots \xi^r) e_{r+1} + \ldots + \varphi^n(\xi^1 \xi^2 \ldots \xi^r) e_n \tag{22}$$

où $\varphi^j(\xi^1 \xi^2 \ldots \xi^r)$ sont des polynômes arbitraires des coordonnées $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^r$.

Nous avons aussi dans ces cas

$$(x \circ y) \circ z = 0.$$

Il n'est pas vrai que toute la classe des algèbres considérées contient seulement des éléments nilpotents d'indice trois. Par exemple, pour

$$F(x) = \frac{1}{2}(\xi^1)^2 (e_1 - e_2) + \frac{1}{3}(\xi^1 + \xi^2)^3 e_3,$$

on a

$$(x \circ y) \circ z = \xi^1 \eta^1 \xi^1 (e_1 - e_2).$$

Les opérateurs $F(x)$, qui engendrent les algèbres associatives peuvent avoir des interprétations géométriques intéressantes.

BIBLIOGRAPHIE

1. Albert A. A. — *Studies in modern algebra*, vol. II, 1963.
2. Красносельский М. А. — *Положительные решения операторных уравнений*. 1962.
3. Creangă Ion — *Sur une algèbre attachée à un opérateur dans un espace linéaire*. Au. şt. Univ. Iaşi (s.n.), s. I, t. XI_A, 1965, p. 21–25.
4. Sadayuki Yamamura — *On the theory of some non linear operators*. Yokohama Math. Journ., 10, 1962, p. 11–17.

CONSIDERAŢII ASUPRA ECUAŢIEI FUNCŢIONALE:

$$F[F(x+y)-F(x)-F(y)+z]-F[F(x+y)-F(x)-F(y)]-F(z)=$$
$$=F[F(z+y)-F(z)-F(y)+x]-F[F(z+y)-F(z)-F(y)]-F(x)$$

ÎNTR-UN SPAŢIU LINIAR

Rezumat

În această Notă se prezintă cîteva consideraţii asupra ecuaţiei funcţionale (3) şi se dau soluţii algebrice.

Ecuaţia (3) este ecuaţia asociativităţii pentru o algebră A_F, ataşată unui operator $F(x)$ din spaţiul liniar R, care se transformă în A_F prin operaţia (1).

Se constată că în cazul din $R=1$, singurele soluţii algebrice sînt $F(x)=x$ şi $F(x)=x^2$, dar există soluţii neanalitice, de exemplu: $F(x)=[x]$, $F(x)=\{x\}$.

Se dau pentru operatorii algebrici ecuaţiile generale pentru ca A_F să fie asociativă. Se tratează cazul particular cînd dim $R=2$, iar coordonatele lui $F(x)$ sînt polinoame de gradul al treilea în coordonatele vectorilor x.

Se dă de asemenea o clasă de soluţii particulare pentru cazul cînd dim R este finită. Pentru toate aceste soluţii, algebrele corespunzătoare sînt nilpotente de indice trei. Se arată, prin exemplu, că există totuşi soluţii care conduc la algebre care nu-s nilpotente de indice trei. Se întrezăresc interpretări geometrice interesante pentru operatorii care conduc la algebre asociative.

O GENERALIZARE A FUNCŢIEI LUI MÖBIUS

DE

DORIAN SPULBER

În Nota de faţă se defineşte o funcţie numerică $\mu_k(n)$ şi i se studiază unele proprietăţi; această funcţie coincide pentru $k=2$ cu $\mu(n)$, cunoscuta funcţie a lui Möbius. Generalizări ale funcţiei lui Möbius au mai dat C. P. Popovici [2] şi K. P. R. Sastry [3].

1°. Pentru orice k şi n naturali definim

$$\mu_k(n)=\begin{cases}0 & \text{dacă un există } p \text{ aşa ca } p^k/n,\\ (-1)^{\nu(n)} & \text{în celelalte cazuri,}\end{cases} \tag{1}$$

unde $\nu(n)$ este numărul divizorilor primi ai numărului n.

2°. Funcţia $\mu_k(n)$ este multiplicativă, adică dacă $(n_1, n_2)=1$, $\mu_k(n_1 n_2)=\mu_k(n_1)\,\mu_k(n_2)$.

Deosebim cazurile:

— $p^k/n_1 n_2$: datorită ipotezei, sau p^k/n_1, sau p^k/n_2 şi deci $\mu_k(n_1 n_2)=\mu_k(n_1)\,\mu_k(n_2)=0$;

— $p_k \nmid n_1 n_2$, deci $p_k \nmid n_1$ şi $p_k \nmid n_2$; după definiţie,

$$\mu_k(n_1 n_2)=(-1)^{\nu(n_1 n_2)},$$
$$\mu_k(n_1)=(-1)^{\nu(n_1)},$$
$$\mu_k(n_2)=(-1)^{\nu(n_2)};$$

deoarece $\nu(n_1 n_2)=\nu(n_1)+\nu(n_2)$, rezultă $\mu_k(n_1 n_2)=\mu_k(n_1)\,\mu_k(n_2)$.

Din 1° şi 2° rezultă

a) $\mu_1(n)=\sum_{d/n}\mu(d)$; în baza definiţiei, relaţia este evidentă.

Dacă $f(n)$ este o funcţie multiplicativă, se ştie [1] că

$$\sum_{d/n} f(d)=\prod_{i=1}^{h}\left[1+f(p_i)+f(p_i^2)+\dots\right], \tag{2}$$