ESPACES À DEUX MÉTRIQUES DONNÉES *

PAR

GH. GHEORGHIEV et I. POPA

1. En nous occupant avec quelques aspects géometriques des agrégats — éléments de l'algèbre Clifford associée à un espace euclidien n-dimensionel — nous avons constaté que l'espace vectoriel représentatif est doué de deux métriques. Si l'espace initial est rapporté à un repère orthonormé, alors l'une de ces métriques est euclidienne (sous forme de sommes de carrés) pendant que l'autre est euclidienne, sous forme cyclique dans les cas $n = m4$ et $m4 + 1$ ou symplectique, sous forme canonique, dans les cas $n = m4 + 2$ et $m4 + 3$.

Nous apprécions qu'il pourrait être intéressant d'étudier les espaces doués de deux métriques de l'espèce trouvée dans le problème mentionné ; d'autant plus, que la théorie des espaces riemanniens generalisés est étroitement liée au second cas.

§ 2. On considère un espace vectoriel de dimension $n = 2r$ doué de deux métriques :

$$\text{I)}\quad F = \delta_{ij}\, x^i x^j,\ \Phi = I_{hk}\, x^h x^k \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases};\ i, j, h, k = 1, \ldots, 2r$$

où

$$\text{II)}\quad F = \delta_{ij}\, x^i x^j,\ \Psi = I_{hk} x^h \wedge x^k \qquad I_{hk} = \begin{cases} \varepsilon & k - h = r,\ \varepsilon = 1 \text{ pour } \Phi \\ 0 & |k - h| \neq r,\ \varepsilon = -1 \text{ pour } \Psi \end{cases}$$

Soit $\tilde{x}^h = a^h_k\, x^k$ une transformation linéaire à matrice $a = (a^h_k)$ régulière.

Pour conserver les formes F, Φ respectivement F, Ψ, on a les conditions :

I). $a^t a = I_{2n}$, $a^t J a = J$ dans laquelle $J = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$ où I_{2n}, I_r sont les

---

* Communication présentée à la Séssion Scientifique de l'Institut Pédagogique de Iaşi, février 1965.

matrices unité d'ordre $2r$ respectivement r et a^t indique la matrice transposée.

II) $a^t a = I_{2r}, a^t J^* a = J^*$ dans laquelle $J^* = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}$. Nous poserons $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ où a_i sont des tableaux carrés d'ordre r. Remarquons que dans les deux cas nous avons comme conséquence $a\ J = J\ a$, respectivement $a\ J^* = J^*\ a$, ce qui conduit dans le premier cas aux relations

I) $a_1 = a_4 = \alpha, a_2 = a_3 = \beta$ et dans le second

II) $a_1 = a_4 = \alpha, a_2 = -a_3 = \beta$.

Nous aurons donc à résoudre les systèmes matriciels :

I) $\alpha^t \alpha + \beta^t \beta = I_r, \alpha^t \beta + \beta^t \alpha = 0$;

II) $\alpha^t \alpha + \beta^t \beta = I_r, \alpha^t \beta - \beta^t \alpha = 0$.

En posant dans le premier système

$$\alpha + \beta = \xi, \alpha - \beta = \eta,$$

nous aurons $\xi^t \xi = \eta^t \eta = I_r$ c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$$

où ξ et η sont des matrices orthogonales arbitraires.

Il suit que le groupe des transformations linéaires Γ_{ee} qui conservent F et Φ est d'ordre $r^2 - r$.

En posant dans le second système

$$\alpha + i\beta = \xi, \ \alpha - i\beta = \eta$$

nous aurons $\xi\eta^t = \eta\xi^t = I_r$. Remarquons qu'une de ces équations est conséquence de l'autre. Il s'ensuit

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \ \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta),$$

avec ξ matrice d'ordre r arbitraire régulière et $\eta = (\xi^t)^{-1}$.

Donc le groupe Γ_{es} est d'ordre r^2, resultat connu.

Remarques 1. En ce qui concerne le groupe Γ_{ee} qui agit dans l'espace E_{2r}, remarquons qu'en même temps il conserve les formes

$$\sum_{h=1}^{r} (\xi^h)^2 \text{ et } \sum_{h=1}^{r} (\eta^h)^2$$

où $\xi^h = x^h + x^{r+h}, \eta^h = x^h - x^{r+h}$,

ce qui montre que E_{2r} est un produit de deux espaces euclidiens à r dimensions.

En ce qui concerne Γ_{es}, remarquons qu'il conserve les formes bilinéaires

$$\sum_{h=1}^{r} \xi^h Y^h \text{ et } \sum_{h=1}^{r} X^h \eta^h$$

où

$$\xi^h = x^h + i\,x^{r+h}, \eta^h = y^h + iy^{r+h}$$

$$X^h = x^h - i\,x^{r+h}, \ Y^h = y^h - iy^{r+h}, \ (i^2 = -1),$$

ce qui montre que l'espace a une structure presque complexe.

Parceque nous y sommes, remarquons que l'espace à dimension $2r$ doué de deux métriques symplectiques est le produit cartésien d'espaces symplectiques de dimensions 2ρ dans le cas $r = 2\rho$ et d'un espace à dimension $2\rho + 2$ et d'un autre de dimension 2ρ dans le cas $r = 2\rho + 1$.

En effet, le groupe Γ_{ss} conservera, en même temps que les formes

$$\Phi = \sum_{h=1}^{r} x^h \wedge x^{r+h}, \Psi = \sum_{h=1}^{r} x^h \wedge x^{2r-h+1},$$

es formes $\Phi \pm \Psi$ qu'on peut écrire :

$$\Phi + \Psi = \sum_{h=1}^{\rho} (x^h + x^{r-h+1}) \wedge (x^{r+h} + x^{2r-h+1}) + 2\sigma\, x^{\rho+1} \wedge x^{3}{}_{\rho}{}^{+2}$$

$$\Phi - \Psi = \sum_{h=1}^{\rho} (x^h - x^{r-h+1}) \wedge (x^{r+h} - x^{2r-h+1}),$$

$\sigma = 0, 1$ suivant que $r = 2\rho$, ou $r = 2\rho + 1$, ce qui justifie l'affirmation.

2. Nous nous sommes limités au cas des espaces à dimension paire puisque, pour ceux de dimension $2r + 1$, nous avons :

I) Γ_{ee} conserve, en même temps que $\sum_{\alpha=0}^{2r} (x^\alpha)^2, (x^0)^2 + \sum_{h=1}^{r} x^h x^{r+h}$, les formes $2(x^0)^2 + \sum_{h=1}^{r} (\xi^h)^2, \sum_{h=1}^{r} (\eta^h)^2$;

d'où il suit que l'espace considéré est le produit de deux espaces euclidiens de dimensions $r + 1$ et r :

II) d'une manière analogue, on constate que l'espace E_{2r+1} dans lequel agit le groupe Γ_{es} est un espace euclidien contenant un hyperplan $x^0 = 0$ dans lequel les transformations induites sont du type Γ_{es} (relatif à un espace de dimension paire).

3. L'espace vectoriel, doué d'un produit scalaire de deux vecteurs $\bar{x}(x^i)$ et $\bar{y}(y^i)$

$$(*) \qquad \bar{x}\,\bar{y} = g_{ij}\, x^i y^j$$

où g_{ij} est un tenseur quelconque, prend le nom d'espace euclidien généralisé.

Les mouvements dans cet espace seront des transformations linéaires $\bar{x}'^i = a^i_j\, \bar{x}^j$, ou sous forme matricielle $\bar{x}' = a\,\bar{x}$, qui conservent (*) c'est-à-dire

$$\bar{x}'\,\bar{y}' = a\,\bar{x}\,a\,\bar{y}.$$

En décomposant le tenseur fondamental dans sa partie symétrique g_{ij} et antisymétrique $\underset{\vee}{g}_{ij}$ la forme (*) devient

$$\bar{x}\,\bar{y} = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \psi(\bar{x}, \bar{y})$$

où

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = g_{ij}\, x^i y^j, \quad \psi(\bar{x}, \bar{y}) = \underset{\vee}{g}_{ij}\, x^i y^j.$$

En exprimant l'invariance du produit scalaire nous aurons

$$\bar{x}\,\bar{y} = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \psi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(a\bar{x}, a\bar{y}) + \psi(a\bar{x}, a\bar{y})$$

$$\bar{y}\,\bar{x} = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) - \psi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(a\bar{x}, a\bar{y}) - \psi(a\bar{x}, a\bar{y}),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(a\bar{x}, a\bar{y}) = \psi(a\bar{x}, a\bar{y}) - \psi(\bar{x}, \bar{y}) = \psi(\bar{x}, \bar{y}) - \psi(a\bar{x}, a\bar{y})$$

d'où

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(a\bar{x}, a\bar{y})$$
$$\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \psi(a\bar{x}, a\bar{y}).$$

Il suit que l'espace euclidien généralisé est doué de deux métriques : une métrique euclidienne et une métrique symplectique.

4. Pour déterminer les éléments différentiels des groupes Γ_{ee} et Γ_{es}, partons des équations de la transformation linéaire

$$\tilde{x}^i = a^i_j\, x^j \quad \text{où la matrice } a = [a^i_j] = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \varepsilon\beta & \alpha \end{vmatrix}.$$

En interprétant $\tilde{x}^i$ comme coordonnées absolues et x^i comme coordonnées relatives d'un même point de l'espace E_{2r}, nous obtenons les conditions d'immobilité

$$da^i_j\, x^j + a^i_j\, dx^j = 0,$$

d'où

$$dx^k = -\, da^i_j\, \tilde{a}^k_i\, x^j, \quad \tilde{a} = a^{-1} = [\tilde{a}^k_i] = a' = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \beta' & \alpha' \end{vmatrix}.$$

Si l'on pose $\omega^i_j = -\, da^i_k\, \tilde{a}^k_j$, on obtient les composantes d'un déplacement infinitésimal du repère mobile e_i $(i = 1 \ldots 2r)$ c'est-à-dire $de_i = \omega^i e_j$.

Le problème revient à la détermination de la matrice ayant pour éléments les formes de Pfaff ω^i_j donnée par $\omega = -\, da\tilde{a}$. Pour Γ_{ee} nous avons $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, $\beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$ avec ξ et η des matrices orthogonales, ce qui donne

$$a = \begin{vmatrix} \xi + \eta & \xi - \eta \\ \xi - \eta & \xi + \eta \end{vmatrix}, \quad \tilde{a} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \xi' + \eta' & \xi' - \eta' \\ \xi' - \eta' & \xi' + \eta' \end{vmatrix}, \quad \xi' = \tilde{\xi}, \ \eta' = \tilde{\eta}.$$

Donc

$$-\,\omega = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} d\xi + d\eta & d\xi - d\eta \\ d\xi - d\eta & d\xi + d\eta \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \tilde{\xi} + \tilde{\eta} & \tilde{\xi} - \tilde{\eta} \\ \tilde{\xi} - \tilde{\eta} & \tilde{\xi} + \tilde{\eta} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \varpi & \varpi' \\ \varpi' & \varpi \end{vmatrix}$$

où

$$\varpi = -\frac{1}{2}(d\xi\,\tilde{\xi} + d\eta\,\tilde{\eta}), \quad \varpi' = -\frac{1}{2}(d\xi\,\tilde{\xi} - d\eta\,\tilde{\eta});$$

ce qui montre que les matrices ϖ et ϖ' sont antisymétriques.

D'une manière analogue, on obtient, pour le groupe Γ_{es}, $\omega = \begin{vmatrix} \varpi & \varpi' \\ -\varpi' & \varpi \end{vmatrix}$, où ϖ est une matrice toujours antisymétrique, pendant que ϖ' est symétrique.

On peut réunir ces résultats en écrivant

$$(:) \qquad \omega = \begin{vmatrix} \varpi & \varpi' \\ \varepsilon\varpi' & \varpi \end{vmatrix},$$

sachant que pour Γ_{ee} on a $\varepsilon = 1$ et ϖ' antisymétrique ; pour Γ_{es}, $\varepsilon = -1$ et ϖ' symétrique.

En utilisant (:) on peut déduire aisément les équations de structure (Maurer-Cartan) des groupes Γ_{ee}, Γ_{es} :

$$d\omega = \omega \wedge \omega$$

ou

$$\begin{vmatrix} d\varpi & d\varpi' \\ \varepsilon d\varpi' & d\varpi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varpi & \varpi' \\ \varepsilon\varpi' & \varpi \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \varpi & \varpi' \\ \varepsilon\varpi' & \varpi \end{vmatrix}$$

ce qui donne

$$(:) \qquad \begin{aligned} d\varpi &= \varpi \wedge \varpi + \varepsilon\,\varpi' \wedge \varpi' \\ d\varpi' &= \varpi \wedge \varpi' + \varpi' \wedge \varpi. \end{aligned}$$

De la seconde formule, il suit, en particulier, que pour le groupe Γ_{es} :

$$(,,) \qquad d\omega^{r+h}_h = 2\,\omega^k_h \wedge \omega^{r+h}_k,$$

et en sommant par rapport à h on a

$$d\left(\sum_{h=1}^{r} \omega_h^{r+h}\right) = 0,$$

ce qui montre que $\sum \omega_h^{r+h}$ est une différentielle.

L'équation pfaffienne $\sum \omega_h^{r+h} = 0$ définit un sous-groupe invariant de Γ_{es} d'ordre $r^2 - 1$, son premier groupe dérivé ; d'où il suit que le groupe Γ_{es} n'est pas simple. Pour $n = 4$ on vérifie immédiatement qu'il n'est pas ni semisimple ni intégrable *).

Si l'on considère le système $\varpi' = 0$, la seconde des équations de structure (;) nous montre que celui-ci est complètement intégrable. Par conséquent, le groupe Γ_{es} contient un sous-groupe orthogonal d'ordre C_r^2.

Le système $\omega_i^k = \omega_k^{r+i} = 0$ $(k \neq i)$ à $2C_r^2$ équations pfaffiennes est de même complètement intégrable **), donc, ce système détermine un sous-groupe d'ordre r de Γ_{es} ; de la relation (,) il suit que ce sous-groupe est abelien.

SPAŢII CU DOUĂ METRICI DATE

Rezumat

Se cercetează problema dotării unui spaţiu vectorial cu două metrici euclidiene sau simplectice nedegenerate şi a grupurilor respective. Dotarea spaţiului cu două metrici similare conduce la descompunerea lui în produse carteziene de spaţii de dimensiuni mai mici. Se observă că grupul Γ_{es} (euclidian şi simplectic) acţionează în spaţiul euclidian generalizat şi se fac observaţii asupra structurii grupului, determinîndu-se unele subgrupuri remarcabile.

---

* En notant $\omega_1^4 = \frac{1}{2}\omega^1$, $\varpi_1^2 = \frac{1}{2}\varpi^2$, $\omega_1^3 - \omega_2^4 = \varpi^3$, $\omega_1^3 + \omega_2^4 = \varpi^4$ les équations de structure deviennent $d\varpi^1 = \varpi^3 \wedge \varpi^2$, $d\varpi^2 = \varpi^1 \wedge \varpi^3$, $d\varpi^3 = \varpi^2 \wedge \varpi^1$, $d\varpi^4 = 0$ ce qui montre que le sous-groupe derivé $\Gamma_{es}^{[1]}$ de Γ_{es} est isomorphe au groupe orthogonal de E_3.

** Le système considéré peut s'écrire $\varpi = 0$, $\varpi^1 - (\omega_{r+h}^h) I_r = 0$ où $[\omega_{r+h}^h]$ est la matrice unilinéaire, ce qui montre que, en vertu de (;), ce système satisfait au critère d'intégrabilité complète de Frobenius.

TENSEURS PROJECTIFS SUR UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE

PAR

IZU VAISMAN

Les remarques que nous voulons faire ici et qui sont évidemment importantes pour l'étude des structures projectives sur une variété différentiable, sont des conséquences immédiates de certains résultats donnés dans [6]. Pourtant nous ne les avons pas rencontrées explicitement chez d'autres auteurs.

1. Rappelons d'abord les notions et les résultats nécessaires de [6]. A cette occasion, nous introduirons aussi une terminologie qui nous semble convenable.

On appelle [6] système de transformations de coordonnées d'un espace topologique X, à valeurs dans un groupe topologique G, ou *G-atlas* de X, un recouvrement $\{V_i\}$ $(i \in I)$ de X et un système d'applications continues $g_{ji} : V_i \cap V_j \to G (i, j \in I)$, tels que

$$g_{kj}(x) g_{ji}(x) = g_{ki}(x), \tag{1}$$

pour tout $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$.

Évidemment, un G-atlas de X peut être toujours plongé dans un G-atlas maximal et cette opération sera sousentendue dans la suite (d'ailleurs, elle n'est pas essentielle).

Une remarque importante est que si $f : G \to G'$ est un homomorphisme continu, alors l'ensemble (V_i, fg_{ij}) constitue un *G'-atlas* de X.

Puis, nous appellerons *espace fibré abstrait* à base X et à groupe structural G, l'ensemble (X, G, A), où A est un G-atlas de X.

Dans [6], on démontre le théorème fondamental suivant : soit (X, G, A) un espace fibré abstrait et Y l'espace d'une *réalisation* de G comme groupe de transformations ; alors, il y a un espace fibré, à base X, à groupe G et à fibre type Y, tel que ses transformations de coordonnées soient justement celles de A et cet espace est déterminé à une équivalence près. Il sera noté par (X, G, A, Y).

X sera dorénavant une variété différentiable V_n de classe C^∞, G un groupe de Lie et les conditions de continuité seront remplacées par des conditions de différentiabilité. De pareilles conditions peuvent être assu-