$$d\left(\sum_{h=1}^{r} \omega_h^{r+h}\right) = 0,$$

ce qui montre que $\sum \omega_h^{r+h}$ est une différentielle.

L'équation pfaffienne $\sum \omega_h^{r+h} = 0$ définit un sous-groupe invariant de Γ_{es} d'ordre $r^2 - 1$, son premier groupe dérivé; d'où il suit que le groupe Γ_{es} n'est pas simple. Pour $n = 4$ on vérifie immédiatement qu'il n'est pas ni semisimple ni intégrable *).

Si l'on considère le système $\omega' = 0$, la seconde des équations de structure (;) nous montre que celui-ci est complètement intégrable. Par conséquent, le groupe Γ_{es} contient un sous-groupe orthogonal d'ordre C_r^2.

Le système $\omega_i^k = \omega_k^{r+i} = 0$ $(k \neq i)$ à $2C_r^2$ équations pfaffiennes est de même complètement intégrable **), donc, ce système détermine un sous-groupe d'ordre r de Γ_{es}; de la relation (,,) il suit que ce sous-groupe est abelien.

SPAȚII CU DOUĂ METRICI DATE

Rezumat

Se cercetează problema dotării unui spațiu vectorial cu două metrici euclidiene sau simplectice nedegenerate și a grupurilor respective. Dotarea spațiului cu două metrici similare conduce la descompunerea lui în produse carteziene de spații de dimensiuni mai mici. Se observă că grupul Γ_{es} (euclidian și simplectic) acționează în spațiul euclidian generalizat și se fac observații asupra structurii grupului, determinîndu-se unele subgrupuri remarcabile.

---

* En notant $\omega_1^4 = \frac{1}{2}\omega^1$, $\bar{\omega}_1^2 = \frac{1}{2}\bar{\omega}^2$, $\omega_1^3 - \omega_2^4 = \bar{\omega}^3$, $\omega_1^3 + \omega_2^4 = \bar{\omega}^4$ les équations de structure deviennent $d\bar{\omega}^1 = \bar{\omega}^3 \wedge \bar{\omega}^2$, $d\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}^3$, $d\bar{\omega}^3 = \bar{\omega}^2 \wedge \bar{\omega}^1$, $d\bar{\omega}^4 = 0$ ce qui montre que le sous-groupe derivé $\Gamma_{es}^{[1]}$ de Γ_{es} est isomorphe au groupe orthogonal de E_3.

** Le système considéré peut s'écrire $\bar{\omega} = 0$, $\bar{\omega}^i - (\omega_{r+h}^h) I_r = 0$ où $[\omega_{r+h}^h]$ est la matrice unilinéaire, ce qui montre que, en vertu de (;), ce système satisfait au critère d'intégrabilité complète de Frobenius.

TENSEURS PROJECTIFS SUR UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE

PAR

IZU VAISMAN

Les remarques que nous voulons faire ici et qui sont évidemment importantes pour l'étude des structures projectives sur une variété différentiable, sont des conséquences immédiates de certains résultats donnés dans [6]. Pourtant nous ne les avons pas rencontrées explicitement chez d'autres auteurs.

1. Rappelons d'abord les notions et les résultats nécessaires de [6]. A cette occasion, nous introduirons aussi une terminologie qui nous semble convenable.

On appelle [6] système de transformations de coordonnées d'un espace topologique X, à valeurs dans un groupe topologique G, ou *G-atlas* de X, un recouvrement $\{V_i\}$ $(i \in I)$ de X et un système d'applications continues $g_{ji} : V_i \cap V_j \to G (i, j \in I)$, tels que

$$g_{kj}(x)\, g_{ji}(x) = g_{ki}(x), \tag{1}$$

pour tout $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$.

Évidemment, un G-atlas de X peut être toujours plongé dans un G-atlas maximal et cette opération sera sousentendue dans la suite (d'ailleurs, elle n'est pas essentielle).

Une remarque importante est que si $f : G \to G'$ est un homomorphisme continu, alors l'ensemble (V_i, fg_{ij}) constitue un *G'-atlas* de X.

Puis, nous appellerons *espace fibré abstrait* à base X et à groupe structural G, l'ensemble (X, G, A), où A est un G-atlas de X.

Dans [6], on démontre le théorème fondamental suivant: soit (X, G, A) un espace fibré abstrait et Y l'espace d'une *réalisation* de G comme groupe de transformations; alors, il y a un espace fibré, à base X, à groupe G et à fibre type Y, tel que ses transformations de coordonnées soient justement celles de A et cet espace est déterminé à une équivalence près. Il sera noté par (X, G, A, Y).

X sera dorénavant une variété différentiable V_n de classe C^∞, G un groupe de Lie et les conditions de continuité seront remplacées par des conditions de différentiabilité. De pareilles conditions peuvent être assu-

rées dans les considérations qui suivent [6]. Alors, on choisira pour $\{V_i\}$ un atlas de la structure différentielle de V_n.

Si $G = L_n$ (le groupe linéaire), alors [6] un espace fibré abstrait (V_n, L_n, A) s'obtient en prenant pour g_{ij} dans A les matrices de Jacobi $(a_{\alpha\beta})$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ des transformations de coordonnées sur V_n. Cet A sera appelé l'*atlas de Jacobi* de V_n.

Enfin, on a encore de [6] la définition suivante. Soit G un groupe topologique et Y l'espace d'une réalisation de G, soit $h: L_n \to G$ un homomorphisme continu et $A' = hA$, le G'-atlas obtenu de l'atlas de Jacobi. Alors si $B = (V_n, G, A', Y)$, on appelle *champ de tenseurs du type* (h, Y, G) sur V_n, une section de l'espace fibré B. La liaison avec la définition classique s'obtient en édifiant la section de B à l'aide des sections locales. Quant aux champs de tenseurs usuels, on les obtient de la manière suivante. Soit Y l'espace arithmétique à n^{p+q} dimensions, avec les éléments notés par $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ et soit G la réalisation de L_n comme groupe de transformations sur Y, définie par les formules

$$\tilde{T}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = l^{\alpha_1}_{\gamma_1} \ldots l^{\alpha_p}_{\gamma_p} \bar{l}^{\delta_1}_{\beta_1} \ldots \bar{l}^{\delta_q}_{\beta_q} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\delta_1 \ldots \delta_q}, \tag{2}$$

où $(l^\alpha_\beta) \in L_n$ et $(\bar{l}^\alpha_\beta)$ est l'inverse de (l^α_β). Soit ensuite h l'automorphisme identique de L_n, interprété comme application $h: L_n \to G$. On considère alors l'espace B correspondant : une section de celui-ci est un *champ de tenseurs du type* (p, q) sur V_n.

Si dans le second membre des formules (2) on multiplie par un facteur $\rho \neq 0$ arbitraire, on obtient les pseudotenseurs au sens usuel.

Ces tenseurs obtenus pour $G = L_n$ seront appelés *tenseurs affines* sur V_n.

Pour, plus de simplicité nous parlerons dans la suite de tenseurs au lieu de champ de tenseurs.

2. Considérons maintenant le groupe projectif réel à n dimensions P_n, c'est-à-dire le groupe des classes de matrices non dégénérées $(\rho p^r_\sigma)(\sigma, \tau = 1, \ldots, n+1)$, où $\rho \neq 0$ est un facteur arbitraire.

On sait bien qu'il y a une injection isomorphe $i: L_n \to P_n$ définie par

$$i(l^\beta_\alpha) = \begin{pmatrix} \rho l^\beta_\alpha & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Il en suit, que si A est l'atlas de Jacobi de V_n, alors iA est un P_n-atlas de V_n.

On obtient donc un espace fibré abstrait (V_n, P_n, iA), à base V_n et à groupe structural P_n, qui constitue la *structure projective canonique* de V_n. Les transformations de coordonnées de l'atlas iA sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \rho a_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \tag{4}$$

où $a_{\alpha\beta}$ est la matrice de Jacobi, considérée auparavant.

Si l'on considère maintenant une réalisation quelconque du groupe P_n comme groupe de transformations, on obtient l'espace fibré associé à la structure projective canonique et de tels espaces constituent l'objet de la géométrie projective sur la variété V_n; nous considérons que, compte tenu des observations ci-dessus, on peut obtenir une méthode naturelle pour étudier cette géométrie, au point de vue global.

Ainsi, si l'on prend $Y = \mathfrak{A}_n$—l'espace projectif à n dimensions, — on peut construire, par la méthode de [6], l'espace fibré $(V_n, P_n, iA, \mathfrak{A}_n)$ et ses fibres locales seront les espaces projectifs tangents de V_n; ce qu'on obtient ainsi, c'est justement une définition globale des „espaces projectifs associés aux points de V_n et dépendant régulièrement de ceux-ci" qui sont considérés dans les théories locales.

Si l'on prend $Y = P'_n$—l'espace des repères projectifs de $\mathfrak{A}'_n$ — on peut construire le fibré principal (V_n, P_n, iA, P'_n), qui est l'espace des repères projectifs de $\mathfrak{A}_n$ et alors une connexion projective sur V_n sera une connexion infinitésimale sur cet espace de repères. Remarquons aussi qu'en partant des repères affines naturels sur V_n on peut trouver des repères projectifs naturels, etc.

Nous nous contentons à faire quelques considérations sur les *tenseurs projectifs*. En général, ceux-ci seront par définition les tenseurs du type (i, Y, P_n) sur V_n au sens du § 1, Y étant l'espace d'une réalisation du groupe projectif P_n.

L'observation immédiate, mais importante que nous voulons faire est la suivante. Les tenseurs du type (i, Y, P_n) peuvent être encore interprétés comme des tenseurs affines du type (i, Y, L_n) où L_n est réalisé sur Y par la restriction de P_n aux éléments de la forme $i(l^\beta_\alpha)$. En effet, il n'est question ici que de la réduction du groupe structural de l'espace fibré respectif, les sections restant bien déterminées.

Nous allons donner maintenant deux exemples.

Considérons d'abord l'espace aritmétique à $(n+1)^{h+k}$ dimensions, dont les éléments seront notés par $t^{\sigma_1 \ldots \sigma_h}_{\tau_1 \ldots \tau_k}$ et prenons pour Y l'espace des classes $(\rho t^{\sigma_1 \ldots \sigma_h}_{\tau_1 \ldots \tau_k})$ $(\rho \neq 0$, arbitraire). Alors, on obtient une réalisation de P_n en posant

$$\rho \tilde{t}^{\sigma_1 \ldots \sigma_h}_{\tau_1 \ldots \tau_k} = p^{\sigma_1}_{\omega_1} \ldots p^{\sigma_h}_{\omega_h} \bar{p}^{\lambda_1}_{\tau_1} \ldots \bar{p}^{\lambda_k}_{\tau_k} t^{\omega_1 \ldots \omega_h}_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}, \tag{5}$$

où $(p^\sigma_\omega) \in P_n$ et $(\bar{p}^\sigma_\omega)$ est son inverse. Les tenseurs du type (i, Y, P_n) correspondants sont les *pseudotenseurs projectifs du type* (h, k).

Pour préciser la nature affine de ces pseudotenseurs projectifs dans le sens de l'interprétation annoncée, il faut remplacer en (5) (p^σ_ω) par une matrice de la forme

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} \rho l^{\beta}_{\alpha} & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Alors, on voit que les tenseurs affines respectifs se décomposent en plusieurs pseudotenseurs affines, précisément: $t^{\alpha_1 \dots \alpha_h}_{\beta_1 \dots \beta_k}$, $t^{n+1\,\alpha_2 \dots \alpha_h}_{\beta_1 \dots \beta_k}, \dots, t^{n+1 \dots n+1}_{n+1 \dots n+1}$, le dernier étant un pseudoscalaire.

Comme second exemple, soit $Y = \{t^{\sigma_1 \dots \sigma_h}_{\tau_1 \dots \tau_k}\}$ l'espace arithmétique considéré ci-dessus. Puis, remarquons que les éléments de P_n peuvent être normés par la condition det $(p^{\tau}_{\sigma}) = 1$, d'où il résulte que pour n pair P_n est isomorphe au groupe unimodulaire U_{n+1} et pour n impair P_n est isomorphe au groupe U_{n+1}/E, où E est le sousgroupe de U_{n+1}, formé par les matrices (δ^{τ}_{σ}) et $(-\delta^{\tau}_{\sigma})$. Alors on peut définir l'action de P_n sur Y par les formules (5) sans le facteur ρ et avec (p^{σ}_{ω}) normée. Les tenseurs du type (i, Y, P_n) qu'on obtiendra seront appelés des *tenseurs projectifs du type* (h, k). Ici, il est plus convenable d'arriver à des tenseurs affines par la voie suivante. L'action considérée de U_{n+1} sur Y, s'étend à une action de L_{n+1} sur Y, donc nous avons, de notre tenseur, un tenseur du type (i, Y, L_{n+1}) et en prenant maintenant la restriction à L_n, c'est-à-dire aux matrices (6) avec $\rho = 1$, on obtient des tenseurs affines du même type que les pseudotenseurs obtenus dans le premier exemple.

3. Voici maintenant une application de ces considérations. On dit qu'une variété V_{2m-1} est munie d'une structure symplectique projective si l'on a défini sur V_{2m-1} un champ de tenseurs projectifs antisymétriques, non dégénérés, $g_{\sigma\tau}(\sigma, \tau = 1, \dots, 2m)$ (tenseur selon la définition du second exemple ci-dessus) [7].

Alors, nous avons évidemment sur la variété, d'après les interprétations du second exemple, un tenseur affine antisymétrique $g_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, \dots, 2m-1)$ et un covecteur $g_{\alpha} = g_{\alpha, 2m}$.

Il est simple de voir que le rang de $g_{\alpha\beta}$ est égal à $2m-2$ et que g_{α} n'est pas nul (compte tenu du fait que $g_{\sigma\tau}$ est non dégénéré). Il en suit que notre variété possède une structure presque-cosymplectique [4].

Aussi, sur V_{2m-1} on trouve analoguement d'autres structures „affines". En effet, soit $g^{\sigma\tau}$ le tenseur réciproque (dans le sens connu) de $g_{\sigma\tau}$. Il nous conduit à un tenseur affine $g^{\alpha\beta}$ et à un vecteur $g^{\alpha} = g^{\alpha, 2m}$ et les relations $g_{\sigma\tau} g^{\sigma\omega} = \delta^{\omega}_{\tau}$ donnent

$$g_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} + g_{\beta} g^{\gamma} = \delta^{\gamma}_{\beta}, \quad g_{\alpha\beta} g^{\beta} = 0, \quad g_{\alpha} g^{\alpha\beta} = 0, \quad g_{\alpha} g^{\alpha} = 1.$$

Considérons alors le tenseur

$$g^{\beta}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha} - g_{\alpha} g^{\beta}.$$

Pour lui on trouve

$$g^{\beta}_{\alpha} g^{\alpha} = g^{\alpha}_{\beta} g_{\alpha} = 0, \quad g^{\beta}_{\alpha} g^{\alpha}_{\gamma} = g^{\beta}_{\gamma}, \quad g^{\alpha}_{\beta} g_{\alpha\gamma} = g_{\beta\alpha}, \text{ etc.}$$

Il est simple de voir que (g^{β}_{α}) a le rang $2m-2$. Il suit que les tenseurs ig^{β}_{α} (i = l'unité imaginaire), g_{α}, g^{β} constituent, sur V_{2m-1}, une structure presque de contact [5].

Enfin, on voit que l'espace linéaire tangent à V_{2m-1} se décompose en deux espaces complémentaires d'équations:

$$(T_1) \qquad g_{\alpha\beta} \xi^{\beta} = 0,$$
$$(T_2) \qquad g_{\alpha} \xi^{\alpha} = 0.$$

Il en suit qu'on a sur V_{2m-1} une structure presque-produit [3].

D'ailleurs on peut trouver par un calcul simple son tenseur fondamental [3], en remarquant que la décomposition d'un vecteur v^{α} d'après T_1 et T_2 est donnée par

$$v^{\alpha} = (g_{\beta} v^{\beta}) g^{\alpha} + g^{\alpha}_{\beta} v^{\beta}.$$

Soit maintenant l'opérateur linéaire F donné par

$$(Fv)^{\alpha} = g^{\alpha}_{\beta} v^{\beta} - (g_{\beta} v^{\beta}) g^{\alpha}.$$

Le tenseur qu'il définit est

$$F^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha}_{\beta} - g^{\alpha} g_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - 2 g^{\alpha} g_{\beta}.$$

Ce tenseur vérifie les relations

$$F^{\alpha}_{\beta} F^{\beta}_{\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$$

et il est le tenseur fondamental cherché.

4. Terminons avec quelques remarques plus générales. La définition des tenseurs d'après Steenrod a été généralisée dans la définition des objets géométriques de Haantjes et Laman [2]. A ce but les auteurs cités ont remplacé le groupe linéaire L_n par son prolongement L^i_n [2]. Il nous semble donc naturel de parler d'objets géométriques ou de tenseurs, par rapport à un groupe G quelconque. Pour les obtenir, il faut avoir un espace fibré abstrait de base V_n et de groupe structural G. Puis, on considérera l'ensemble des réalisations du groupe G comme groupe de transformations et on obtiendra les espaces fibrés associés. Les sections de ces espaces seront les objets géométriques du groupe G.

Vu l'importance de l'ensemble des réalisations de G dans une pareille théorie, nous considérons utile à en préciser la structure. On peut voir immédiatement que cet ensemble peut être organisé comme une catégorie. En effet, les objets de cette catégorie seront les réalisations $M_1, M_2, \dots$ de G et les morphismes seront des applications $\xi: M_1 \to M_2$, telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\xi} & M_2 \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ M_1 & \xrightarrow{\xi} & M_2 \end{array}$$

soit commutatif pour toutes les transformations $g \in G$. Les axiomes des catégories sont alors immédiatement vérifiés.

Remarquons encore que les isomorphismes de la catégorie envisagée donnent justement les *groupes semblables* de E. Cartan [1].

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartan E. — *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitée par la méthode du repère mobile.* Paris 1937.
2. Haantjes J. and Laman G. — *On the definition of geometric objects.* Indagationes Mathematicae, XV, 1953, p. 208—222.
3. Legrand G. — *Etude d'une généralisation des structures presque-complexes sur les variétés différentiables.* Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 7, 1958, p. 323—354.
4. Lichnerowicz A. — *Théorèmes de réductibilité sur des algèbres d'automorphismes.* Rend. di Mat. pura ed appl. Roma. 22, 1963, p. 197—224.
5. Sasaki S. — *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost-contact structures.* I. Tôhoku Math. Journal, 1960, p. 459—476.
6. Steenrod N. — *The topology of fibre bundles.* Princeton 1951.
7. Vaisman I. — *Courbes, configurations de Myller et distributions dans les espaces à connexion symplectique.* I. An. şt. Univ. Iaşi, t. X, 1964, p. 417—436.

TENSORI PROIECTIVI PE O VARIETATE DIFERENŢIABILĂ

Rezumat

Plecînd de la definiţia generală a tensorilor, dată de Steenrod [6], se consideră tensorii proiectivi şi se fac unele observaţii asupra legăturii acestora cu tensorii afini.

ASUPRA TEORIEI CURBELOR ÎN GEOMETRIA BICENTRALĂ TRIDIMENSIONALĂ

DE

E. MACOVEICIUC

Numim spaţiu bicentral cu trei dimensiuni, un spaţiu Klein simplu al cărui grup fundamental este grupul proiectiv care păstrează două puncte, numite centrele spaţiului.

Un reper în spaţiul bicentral tridimensional este un reper proiectiv A_0, A_1, A_2, A_3, U, format din cinci puncte dintre care două, spre exemplu A_2 şi A_3, coincid cu centrele spaţiului. Dreapta $A_2 A_3$ o numim axa spaţiului.

Considerînd un asemenea reper, ca reper natural al spaţiului, ecuaţiile grupului fundamental sînt:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \rho x_0 = a_{00} x_0 + a_{10} x_1, \\ \rho x_1 = a_{01} x_0 + a_{11} x_1, \\ \rho x_2 = a_{02} x_0 + a_{12} x_1 + a_{22} x_2, \\ \rho x_3 = a_{03} x_0 + a_{13} x_1 + a_{33} x_3 \end{cases}
$$

şi se observă că acest grup depinde de nouă parametri; presupunînd că acest reper este ataşat punctelor unei curbe C, parametrii care determină poziţia punctelor A_0, A_1, U în spaţiu sînt parametrii secundari, iar cel care determină poziţia punctelor pe curbă este parametrul principal.

Mişcarea reperului considerat este dată de formulele:

$$
(2) \qquad dA_i = \omega_{ij} A_j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3)
$$

cu condiţiile

$$
(3) \qquad \begin{cases} \omega_{20} = \omega_{21} = \omega_{23} = 0, \\ \omega_{30} = \omega_{31} = \omega_{32} = 0, \\ \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0. \end{cases}
$$