soit commutatif pour toutes les transformations $g \in G$. Les axiomes des catégories sont alors immédiatement vérifiés.

Remarquons encore que les isomorphismes de la catégorie envisagée donnent justement les *groupes semblables* de E. Cartan [1].

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartan E. — *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitée par la méthode du repère mobile.* Paris 1937.
2. Haantjes J. and Laman G. — *On the definition of geometric objects.* Indagationes Mathematicae, XV, 1953, p. 208—222.
3. Legrand G. — *Etude d'une généralisation des structures presque-complexes sur les variétés différentiables.* Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 7, 1958, p. 323—354.
4. Lichnerowicz A. — *Théorèmes de réductivité sur des algèbres d'automorphismes.* Rend. di Mat. pura ed appl. Roma. 22, 1963, p. 197—224.
5. Sasaki S. — *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost-contact structures.* I. Tôhoku Math. Journal, 1960, p. 459—476.
6. Steenrod N. — *The topology of fibre bundles.* Princeton 1951.
7. Vaisman I. — *Courbes, configurations de Myller et distributions dans les espaces à connexion symplectique.* I. An. şt. Univ. Iaşi. t. X. 1964, p. 417—436.

TENSORI PROIECTIVI PE O VARIETATE DIFERENŢIABILĂ

Rezumat

Plecînd de la definiţia generală a tensorilor, dată de Steenrod [6], se consideră tensorii proiectivi şi se fac unele observaţii asupra legăturii acestora cu tensorii afini.

ASUPRA TEORIEI CURBELOR ÎN GEOMETRIA BICENTRALĂ TRIDIMENSIONALĂ

DE

E. MACOVEICIUC

Numim spaţiu bicentral cu trei dimensiuni, un spaţiu Klein simplu al cărui grup fundamental este grupul proiectiv care păstrează două puncte, numite centrele spaţiului.

Un reper în spaţiul bicentral tridimensional este un reper proiectiv A_0, A_1, A_2, A_3, U, format din cinci puncte dintre care două, spre exemplu A_2 şi A_3, coincid cu centrele spaţiului. Dreapta $A_2 A_3$ o numim axa spaţiului.

Considerînd un asemenea reper, ca reper natural al spaţiului, ecuaţiile grupului fundamental sînt:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \rho x_0 = a_{00} x_0 + a_{10} x_1, \\ \rho x_1 = a_{01} x_0 + a_{11} x_1, \\ \rho x_2 = a_{02} x_0 + a_{12} x_1 + a_{22} x_2, \\ \rho x_3 = a_{03} x_0 + a_{13} x_1 + a_{33} x_3 \end{cases}
$$

şi se observă că acest grup depinde de nouă parametri; presupunînd că acest reper este ataşat punctelor unei curbe C, parametrii care determină poziţia punctelor A_0, A_1, U în spaţiu sînt parametrii secundari, iar cel care determină poziţia punctelor pe curbă este parametrul principal.

Mişcarea reperului considerat este dată de formulele:

$$
(2) \qquad dA_i = \omega_{ij} A_j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3)
$$

cu condiţiile

$$
(3) \qquad \begin{cases} \omega_{20} = \omega_{21} = \omega_{23} = 0, \\ \omega_{30} = \omega_{31} = \omega_{32} = 0, \\ \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0. \end{cases}
$$

Formele Pfaff ω_{ij} satisfac de asemenea ecuaţiile de structură ale spaţiului:

$$(4)\qquad \begin{cases} D\omega_{ik} = [\omega_{ih},\ \omega_{hk}], \quad (i,h,k = 0,1,2,3) \\ D\omega_{2k} = 0, \\ D\omega_{3k} = 0, \qquad (\text{pentru } k = 0,1,2,3), \\ D\omega_{01} = [\omega_{01},\ \omega_{11} - \omega_{00}]. \end{cases}$$

Considerăm un punct M, de coordonate x_0, x_1, x_2, x_3 faţă de reperul ales, deci:

$$(5)\qquad M = x_0 A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3;$$

la o deplasare a reperului, variaţiile acestor coordonate satisfac condiţiile de fixitate:

$$(6)\qquad \begin{cases} dx_1 = -\omega_{01} + (\omega_{00} - \omega_{11})x_1 + \omega_{10} x_1^2, \\ dx_2 = -\omega_{02} - \omega_{12} x_1 + (\omega_{00} - \omega_{22}) x_2 + \omega_{10} x_1 x_2, \\ dx_3 = -\omega_{03} - \omega_{13} x_1 + (\omega_{00} - \omega_{33}) x_3 + \omega_{10} x_1 x_3. \end{cases}$$

Fie (C) o curbă definită faţă de un reper natural prin ecuaţiile

$$(7)\qquad x_i = x_i(t) \quad (i = 0,1,2,3),$$

unde $b_1(t)$ sînt funcţii analitice de t pe intervalul (t_0, t_1).

Asociem curbei C familia reperelor de ordinul zero, formată din mulţimea reperelor pentru care un vîrf, de exemplu A_0, coincide cu punctul generic al curbei. Această familie depinde de şase parametri secundari şi de un parametru principal.

Formele $\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$ depind atunci numai de diferenţiala parametrului principal şi avem:

$$(8)\qquad \omega_{02} = a_1 \omega_{01}, \quad \omega_{03} = b_1 \omega_{01},$$

unde a_1, b_1 depind de toţi parametrii reperului de ordinul zero şi sînt funcţii de ordinul întîi diferenţial.

Diferenţiind exterior relaţiile (8) şi ţinînd seama de ecuaţiile de structură (4), după lema lui Cartan, obţinem:

$$(9)\qquad \begin{cases} da_1 + a_1(\omega_{22} - \omega_{11}) + \omega_{12} = a_2 \omega_{01}, \\ db_1 + b_1(\omega_{33} - \omega_{11}) + \omega_{13} = b_2 \omega_{01}, \end{cases}$$

unde coeficienţii a_2 şi b_2 sînt funcţii de ordinul al doilea diferenţial.

La o deplasare δ, datorită numai parametrilor secundari, notăm $e_{ij} = \omega_{ij}(\delta)$ şi din (9) deducem:

$$(10)\qquad \begin{cases} \delta a_1 + a_1(e_{22} - e_{11}) + e_{12} = 0, \\ \delta b_1 + b_1(e_{33} - e_{11}) + e_{13} = 0. \end{cases}$$

Acest sistem este complet integrabil şi putem fixa doi parametri secundari astfel ca

$$(11)\qquad a_1 = 0, \quad b_1 = 0.$$

Geometric, condiţia (11) exprimă faptul că vîrful A_1 al reperului este situat pe tangenta la curba (C) în A_0.

Prin această particularizare, din familia reperelor de ordinul zero am extras familia reperelor de ordinul întîi care este caracterizată de relaţiile

$$(12)\qquad \omega_{02} = 0, \quad \omega_{03} = 0, \quad \omega_{12} = a_2 \omega_{01}, \quad \omega_{13} = b_2 \omega_{01}.$$

Diferenţierea exterioară a ultimelor două relaţii (12) ne conduce la

$$(13)\qquad \begin{cases} da_2 + a_2(\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{22}) = a_3 \omega_{01}, \\ db_2 + b_2(\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{33}) = b_3 \omega_{01}, \end{cases}$$

unde a_3, b_3 sînt funcţii de ordinul al treilea diferenţial.

Trecerea de la un reper de ordinul întîi al curbei la alt reper din aceeaşi clasă determină, pentru funcţiile a_2 şi b_2, variaţii exprimate prin relaţiile

$$(14)\qquad \begin{cases} \delta a_2 = -a_2(e_{00} - 2e_{11} + e_{22}), \\ \delta b_2 = -b_2(e_{00} - 2e_{11} + e_{33}). \end{cases}$$

Sistemul (14) este complet integrabil şi soluţia sa este $a_2 = \text{const.}$, $b_2 = \text{const.}$ Observăm că dacă considerăm $a_2 = 0$ sau $b_2 = 0$, planul osculator al curbei (C) în A_0 trece prin unul din centrele spaţiului, A_3 sau A_2 şi atunci curba este situată pe un con.

Dacă $a_2 = b_2 = 0$, tangenta $A_0 A_1$ rămîne fixă la deplasarea lui A_0 pe curba (C) şi punctele respective sînt punctele de inflexiune ale curbei. Excluzînd din consideraţii punctele de inflexiune şi curbele situate pe un con, fixăm doi parametri secundari astfel ca

$$(15)\qquad a_2 = 1, \quad b_2 = 1.$$

Determinăm astfel familia reperelor de ordinul doi care se caracterizează prin relaţiile

$$(16)\qquad \begin{cases} \omega_{02} = 0, \quad \omega_{03} = 0, \quad \omega_{12} = \omega_{01}, \quad \omega_{13} = \omega_{01}, \\ \omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{22} = a_3 \omega_{01}, \quad \omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{33} = b_3 \omega_{01}. \end{cases}$$

Diferenţiind exterior ultimele două relaţii din (16) găsim

$$(17)\qquad \begin{cases} da_3 + a_3(\omega_{00} - \omega_{11}) + 3\omega_{10} = a_4 \omega_{01}, \\ db_3 + b_3(\omega_{00} - \omega_{11}) + 3\omega_{10} = b_4 \omega_{01}, \end{cases}$$

unde a_4 şi b_4 sînt funcţii de ordinul al patrulea diferenţial.

La o deplasare datorită numai parametrilor secundari avem

$$(18)\qquad \begin{cases} \delta a_3 = -a_3(e_{00}-e_{11}) - 3e_{10}, \\ \delta b_3 = -b_3(e_{00}-e_{11}) - 3e_{10}, \end{cases}$$

de unde rezultă

$$(19)\qquad \delta(a_3 - b_3) = (a_3 - b_3)(e_{11} - e_{00})$$

și găsim invariantul

$$(20)\qquad a_3 - b_3.$$

Sistemul (18) este complet integrabil și, excluzînd punctele planare, putem fixa doi parametri secundari punînd

$$a_3 = 0,\ b_3 = 1.$$

Familia reperelor obținute prin această particularizare este de ordinul trei și se caracterizează prin relațiile

$$(21)\qquad \begin{cases} \omega_{02}=0,\ \omega_{03}=0,\ \omega_{12}=\omega_{01},\ \omega_{13}=\omega_{01},\ \omega_{00}-2\omega_{11}+\omega_{22}=0, \\ \omega_{00}-2\omega_{11}+\omega_{33}=\omega_{01},\ 3\omega_{10}=a_4\,\omega_{01},\ \omega_{00}-\omega_{11}+3\omega_{10}=b_4\,\omega_{01}, \\ \omega_{00}+\omega_{11}+\omega_{22}+\omega_{33}=0. \end{cases}$$

Toți pfaffienii ω_{ij} care intră în formulele de mișcare (2) sînt determinați ca funcții de pfaffianul principal de ordinul întîi $\omega_{01}=ds$ și de invarianții diferențiali de ordinul patru a_4, b_4 prin formulele:

$$(22)\qquad \begin{cases} \omega_{02}=0,\ \omega_{03}=0,\ \omega_{12}=\omega_{01},\ \omega_{13}=\omega_{01},\ \omega_{10}=\dfrac{a_4}{3}\,\omega_{01}, \\ \omega_{00}=\dfrac{5(b_4-a_4)-1}{4}\,\omega_{01},\ \omega_{11}=\dfrac{(b_4-a_4)-1}{4}\,\omega_{01}, \\ \omega_{22}=\dfrac{-3(b_4-a_4)-1}{4}\,\omega_{01},\ \omega_{33}=\dfrac{-3(b_4-a_4)+3}{4}\,\omega_{01}. \end{cases}$$

Dacă notăm cu:

$$(23)\qquad K_1=\frac{(b_4-a_4)-1}{4},\quad K_2=\frac{a_4}{3},$$

K_1, K_2 fiind curburile proiective ale spațiului proiectiv bicentral, atunci ecuațiile de mișcare (2) în raport cu reperul de ordinul trei intrinsec legat de curba (C) au forma:

$$(24)\qquad \begin{cases} dA_0=(5K_1+1)\,\omega_{01}A_0+\omega_{01}A_1, \\ dA_1=K_2\,\omega_{01}A_0+K_1\,\omega_{01}A_1+\omega_{01}A_2+\omega_{01}A_3, \\ dA_2=\qquad\qquad -(3K_1+1)\,\omega_{01}A_2, \\ dA_3=\qquad\qquad\qquad -3K_1\,\omega_{01}A_3 \end{cases}$$

T e o r e m ă f u n d a m e n t a l ă. *Date funcțiile $K_1(s)$, $K_2(s)$ analitice pe intervalul (s_0, s_1), există o curbă C determinată pînă la o transformare proiectiv bicentrală pentru care ele sînt curburi proiectiv bicentrale, iar s este arcul proiectiv bicentral.*

Pentru a găsi interpretările geometrice ale elementelor reperului canonic de ordinul trei considerăm fascicule de conuri pătratice care au contact de ordinul doi cu curba și care conțin încă alte elemente ale reperului. Fasciculul de conuri pătratice (C_2) cu vîrful în A_2, cu contact de ordinul doi cu curba C și care trec prin A_3 are ecuația

$$(25)\qquad x_1^2-2x_0x_3+2\lambda x_1x_2=0.$$

Fasciculul de conuri pătratice (C_3) cu vîrful în A_3, care trec prin A_2 și au contact de același ordin cu C este dat de

$$(26)\qquad x_1^2-2x_0x_2+2\mu x_1x_2=0.$$

Planul osculator al curbei C în punctul A_0 este

$$(27)\qquad x_2-x_3=0.$$

Intersecția fasciculului (25) cu planul (27) este fasciculul de conice din acest plan reprezentat prin ecuațiile

$$(28)\qquad \begin{cases} x_1^2-2x_0x_3+2\lambda x_1x_3=0, \\ x_2-x_3=0. \end{cases}$$

Pentru a fixa poziția punctului A_1 pe tangenta la curba C generată de A_0, alegem din fasciculul (28) conica care trece prin punctul de intersecție al axei spațiului cu planul osculator

$$(29)\qquad P_1(0,0,1,1)$$

și care are ecuația

$$(30)\qquad \begin{cases} x_1^2-2x_0x_3=0, \\ x_2-x_3=0. \end{cases}$$

Intersecția fasciculului (26) cu planul (27) este fasciculul de conice

$$(31)\qquad \begin{cases} x_1^2 - 2x_0 x_2 + 2\mu x_1 x_2 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

care conţine o singură conică ce trece prin punctul (29) şi anume

$$(30')\qquad \begin{cases} x_1^2 - 2x_0 x_2 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Fasciculele de conice (25) şi (26) au în comun conica (30) care are o poziţie determinată faţă de curba C în fiecare punct al său.

Tangenta la conica (30) în punctul (29) intersectează tangenta la curba C în A_0 (muchia $A_0 A_1$) în punctul A_1.

Considerăm planul osculator al curbei C într-un punct infinit vecin lui A_0; el are ecuaţia

$$(32)\qquad x_3 (1 + K_1 \omega_{01}) - x_2 (1 + \omega_{01} + 3K_1 \omega_{01}) = 0.$$

Axa spaţiului taie acest plan în punctul

$$(33)\qquad P_2 (0, 0, 1 + 3K_1 \omega_{01}, 1 + 3K_1 \omega_{01} + \omega_{01}).$$

Invariantul diferenţial de ordinul întîi $\omega_{01} = ds$ este partea principală a biraportului format cu punctele A_2, A_3 şi P_1, P_2.

Familia conurilor pătratice cu vîrful în A_2 respectiv în A_3 şi cu contact de ordinul trei cu curba C în A_0, este reprezentată prin ecuaţia

$$(34)\qquad x_1^2 - 2x_0 x_2 - \frac{2}{3} x_1 x_3 + \lambda x_3^2 = 0,$$

respectiv

$$(35)\qquad x_1^2 - 2x_0 x_3 + \mu x_2^2 = 0.$$

Fasciculul (34) conţine un singur con care trece prin A_3:

$$(36)\qquad 3x_1^2 - 6x_0 x_3 - 2x_1 x_3 = 0,$$

şi fasciculul (35) conţine un singur con care trece prin A_2, anume:

$$(37)\qquad x_1^2 - 2x_0 x_2 = 0.$$

Fasciculele (34) şi (35) conţin cîte un singur con cu contact de ordinul patru cu curba C în A_0, anume:

$$(38)\qquad 2x_1 x_3 - 6x_0 x_3 + 3x_1^2 + (4K_1 - 3K_2 - \frac{2}{3}) x_3^2 = 0,$$

şi

$$(39)\qquad x_1^2 - 2x_0 x_1 + K_2 x_2^2 = 0.$$

Planele osculatoare în punctele A_3 şi A_2 la cubica de intersecţie a conurilor (36) şi (37) sînt

$$(40)\qquad \begin{cases} 6x_1 + 9x_0 + 2x_3 = 0 & (\pi_3) \\ x_1 - x_0 = 0 & (\pi_2). \end{cases}$$

Planul osculator al curbei C (27) şi planul (π_2) intersectează conul (37) în puncte care dau interpretarea punctului unitate al reperului.

Punctele de intersecţie ale conului (39) cu muchia $A_1 A_2$ şi ale conului (38) cu muchia $A_1 A_3$ determină pe dreptele $A_1 A_2$ respectiv $A_1 A_3$ biraporte ale căror valori principale sînt tocmai curburile spaţiului K_1 şi K_2.

Reperul proiectiv invariant se caracterizează geometric astfel:

A_0 este punctul generic al curbei C; A_1 este la intersecţia tangentei $A_0 A_1$ cu tangenta la conica (30) în punctul (29); A_2 şi A_3 sînt centrele spaţiului, iar punctul unitate U este unul din punctele de intersecţie ale planelor (27) şi (π_2) cu conul (37).

În raport cu reperul de ordinul trei curba C admite dezvoltările

$$(41)\qquad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{a_1}{24} x_1^4 + (5), \\ x_3 = \frac{1}{6} x_1^3 + \frac{b_1}{24} x_1^4 + (5). \end{cases} \qquad (C)$$

Făcînd proiecţia curbei C din A_3 pe planul $A_0 A_1 A_2$ găsim curba

$$(42)\qquad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{a_1}{24} x_1^4 + (5), \\ x_3 = 0. \end{cases} \qquad (C')$$

În planul $x_3 = 0$ există un fascicul de conice care au contact de ordinul patru cu curba (C'), anume:

$$(43)\qquad \begin{cases} x_1^2 - 2x_0 x_2 + \lambda x_2^2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Muchia $A_1 A_2$ este intersectată de conicele fasciculului în două puncte diferite armonic conjugate cu punctele A_1 şi A_2

Fasciculul (43) conţine o singură conică cu contact de ordinul cinci cu curba (C'), numită conică osculatoare şi anume

$$(44)\qquad \begin{cases} 3x_1^2 + a_1 x_2^2 - 6x_0 x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Conica osculatoare (44) se poate defini şi ca curbă de intersecţie a planului $A_0 A_1 A_2$ cu conul de ordinul doi cu vîrful în A_3, care conţine muchia $A_0 A_3$ şi are contact de ordinul patru cu curba C, anume conul:

$$(45)\qquad 3x_1^2 + a_1 x_2^2 - 6x_0 x_2 = 0.$$

Pentru $a_4 = 0$, conica osculatoare (44) are contact de ordin superior lui cinci cu curba (C) și trece printr-un centru al spațiului.

Fasciculul de conuri pătratice cu vîrful în A_0 și contact de ordinul șase cu curba (C) are ecuația

$$4x_2^2 - 6x_1 x_3 + 3b_4 x_2 x_3 + \lambda x_3^2 = 0. \tag{46}$$

Conurile fasciculului (46) taie planul axial prin A_0 după fasciculul de drepte

$$\begin{cases} 4x_2^2 + 3b_4 x_2 x_3 + \lambda x_3^2 = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Pentru $b_4 = 0$ fasciculul (47) formează un fascicul armonic cu muchiile $A_0 A_2$, $A_0 A_3$.

Fasciculul (46) conține un singur con cu contact de ordinul șapte cu curba C numit conul osculator și reprezentat prin ecuația

$$8x_2^2 - 12x_1 x_3 + 6b_4 x_2 x_3 + 3(8a_4 + 3b_4^2) x_3^2 = 0. \tag{48}$$

În punctele în care $b_4 = 0$, conul osculator (48) are cu curba C contact de ordin superior lui șapte.

Complexul liniar cu contact riglat de ordinul patru cu curba C, numit complex liniar osculator al curbei C, are ecuația

$$2(\pi_{03} - \pi_{12}) + b_4 \pi_{31} + (3b_4^2 + 2a_4) \pi_{23} = 0. \tag{49}$$

În punctele cu $b_4 = 0$, complexul (48) are cu curba (C) contact de ordin mai mare ca patru și ecuația sa devine:

$$\pi_{03} - \pi_{12} + a_4 \pi_{23} = 0. \tag{50}$$

Aceste puncte se numesc puncte de coincidență și curba care are toate punctele de coincidență se numește curbă de complex.

Punctele de coincidență pentru care și $a_4 = 0$ se caracterizează prin proprietatea că dezvoltările (41) se reduc la

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + (5) \\ x_3 = \frac{1}{6} x_1^3 + (5) \end{cases} \tag{51}$$

Deci clasa curbelor de complex conține ca elemente singulare cubicele care sînt excluse din considerațiile noastre.

Pentru $K_1 = K_2 =$ const. din ecuațiile (23) și (24) se determină o clasă de curbe cu proprietatea că există un punct fix în spațiu care are coordonatele fixe față de reperul Frenet al curbei C. Aceste curbe le numim curbe H proiectiv-bicentrale.

BIBLIOGRAFIE

1. Mihăilescu T. — *Geometrie diferențială proiectivă*. Editura Academiei R. S. România, București 1958

О ТЕОРИИ КРИВЫХ В БИЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Резюме

Изучается теория кривых в простом трёхмерном пространстве Клейна, для которого проэктивная группа сохраняющая две точки (центры пространства), является фундаментальной группой. Используя метод подвижного репера, определяются репер Френе ассоциированный одной кривой в этом пространстве и инварианты этой кривой. Приводятся в дальнейшем соответствующие геометрические интерпретации и указываются различные классы специальных кривых.