SUPRAFEȚE ÎN SPAȚIUL BICENTRAL TRIDIMENSIONAL

DE

ELENA MACOVEICIUC

Definim spațiul bicentral tridimensional ca un spațiu Klein simplu cu grupul fundamental un grup proiectiv care păstrează două puncte numite centrele spațiului. Dreapta care unește centrele o numim axa spațiului și atunci toate dreptele și planele care trec prin axă le numim respectiv drepte și plane axiale. Dreptele și planele care trec prin centrele spațiului le numim respectiv drepte și plane centrale.

Pentru studiul suprafețelor în acest spațiu considerăm ca reper mobil un reper proiectiv A_0, A_1, A_2, A_3, U, pentru care punctele A_2 și A_3 sînt armonic conjugate cu centrele spațiului.

Mișcarea reperului ales este dată de ecuațiile

$$dA_i = \omega_i^j A_j; \quad (i, j = 0, 1, 2, 3) \tag{1}$$

formele Pfaff ω_i^j satisfac condițiile

$$\begin{cases} \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_2^1 = \omega_3^1 = 0, \\ \omega_3^2 = \omega_2^3, \\ \omega_3^2 = \omega_2^2, \\ \omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

și ecuațiile de structură ale spațiului proiectiv bicentral

$$\begin{cases} D\,\omega_i^j = [\omega_i^k, \omega_k^j], \\ D\,\omega_i^j = 0, \qquad (i = 2, 3;\ j = 0, 1) \\ D\,\omega_0^1 = [\omega_0^0 - \omega_1^1, \omega_0^1], \\ D\,\omega_0^2 = -[\omega_1^2, \omega_0^1] + [\omega_0^0 - \omega_2^2, \omega_0^2] + [\omega_0^3, \omega_3^2]. \end{cases} \tag{3}$$

Condiţiile de fixitate a unui punct $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ în raport cu reperul mobil ales au forma

$$(3)\quad \frac{dx_0 + x_0(\omega_0^0 + \omega_1^1)}{x_0} = \frac{dx_1 + x_1(\omega_0^1 + \omega_1^1)}{x_1} = \frac{dx_2 + x_2(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_2^3)}{x_2} = \frac{dx_3 + x_3(\omega_0^3 + \omega_1^3 + \omega_2^3 + \omega_2^2)}{x_3}.$$

Fie S o suprafaţă analitică definită faţă de un reper fix prin ecuaţiile

$$(5)\qquad x_i = x_i(u, v) \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

unde $x_i(u, v)$ sînt funcţii analitice într-un domeniu Ω de variaţie a parametrilor u şi v şi satisfac încă condiţia:

$$(x_0)_u - (x_1)_u \neq 0 \text{ sau } (x_0)_v - (x_1)_v \neq 0,$$

care exprimă faptul că planul tangent la suprafaţă în fiecare punct nu este un plan axial.

Familia reperelor de ordin zero, acele pentru care vîrful A_0 coincide cu un punct arbitrar al suprafeţei, depinde de doi parametri principali şi de şase parametri secundari.

Considerînd punctele A_1 şi A_2 în planul tangent suprafeţei în A_0 se fixează doi parametri secundari şi obţinem familia reperelor de ordinul întîi, în raport cu care suprafaţa S satisface ecuaţia locală

$$(7)\qquad \omega_0^3 = 0.$$

Diferenţiind exterior (7) şi aplicînd ecuaţiile de structură (3), în virtutea lemei lui Cartan se obţin relaţiile

$$(8)\qquad \begin{cases} \omega_1^3 = a_2\omega^1 + b_2\omega^2, \\ \omega_2^3 = b_2\omega^1 + c_2\omega^2, \end{cases} \qquad \text{cu } \omega^1 = \omega_0^1,\ \omega^2 = \omega_0^2.$$

Coeficienţii a_2, b_2, c_2 din (8) sînt funcţii de toţi parametri de care depinde reperul, de ordinul diferenţial doi în aceşti parametri. Repetînd aceleaşi operaţii asupra ecuaţiilor (8), găsim:

$$(9)\qquad \begin{cases} da_2 + a_2(\omega_0^0 - 2\omega_1^1 + \omega_2^2) - 2b_2\omega_1^2 = -a_3\omega^1 - b_3\omega^2, \\ db_2 + b_2(\omega_0^0 - \omega_1^1) - c_2\omega_1^2 = -b_3\omega^1 - b_3'\omega^2, \\ dc_2 + c_2(\omega_0^0 - \omega_2^2) = -b_3'\omega^1 - c_3\omega^2. \end{cases}$$

Dacă notăm cu δ simbolul diferenţierii în raport cu parametrii secundari şi cu $e_i^j = \omega_i^j(\delta)$, relaţiile (9) devin

$$(10)\qquad \begin{cases} \delta a_2 = 2b_2e_1^2 - a_2(e_0^0 - 2e_1^1 + e_2^2), \\ \delta b_2 = c_2e_1^2 - b_2(e_0^0 - e_1^1), \\ \delta c_2 = -c_2(e_0^0 - e_2^2). \end{cases}$$

Relaţiile (10) ne conduc la ecuaţiile invariante finite

$$(11)\qquad a_2c_2 - b_2^2 = 0 \quad \text{şi} \quad c_2 = 0$$

şi împreună cu

$$(12)\qquad \begin{cases} \delta\omega^1 = (e_0^0 - e_1^1)\omega^1, \\ \delta\omega^2 = -e_1^2\omega^1 + (e_0^0 - e_2^2)\omega^2, \end{cases}$$

la invarianţii infinitezimali

$$(13)\qquad \varphi_1 = b_2\omega^1 + c_2\omega^2, \quad \varphi_2 = \frac{(a_2c_2 - b_2^2)(\omega^1)^2}{b_2\omega^1 + c_2\omega^2},$$

$$\varphi_3 = b_2(a_2c_2 - b_2^2)^2(\omega^1)^3 + c_2(a_2c_2 - b_2^2)(\omega^1)^2\omega^2.$$

Relaţiile (11) caracterizează suprafeţele desfăşurabile şi clasa specială de suprafeţe pentru care tangentele unei familii de linii asimptotice se sprijină pe axa spaţiului (coincid cu muchia A_0A_2).

Excluzînd aceste clase de suprafeţe, putem fixa un parametru secundar punînd

$$(14)\qquad b_2 = 0,$$

şi obţinem familia reperelor de ordinul al doilea pentru care punctele A_1 şi A_2 sînt situate pe tangentele unei reţele conjugate arbitrare, prin A_0. Sistemul

$$(15)\qquad \begin{cases} \varpi_1 \equiv \delta a_2 + a_2(e_0^0 - 2e_1^1 + e_2^2) = 0, \\ \varpi_2 \equiv \delta c_2 + c_2(e_0^0 - e_2^2) = 0 \end{cases}$$

este complet integrabil în baza relaţiilor $D\varpi_i \equiv 0 \pmod{\varpi_1, \varpi_2}$ $(i = 1, 2)$ şi soluţia sa generală este $a_2 = \text{const}$ $c_2 = \text{const}$. Distingem următoarele cazuri particulare:

$a_2 = 0$, cînd o tangentă asimptotică coincide cu A_0A_1,

$c_2 = 0$, cînd o tangentă asimptotică coincide cu A_0A_2, adică regăsim suprafeţele cu o familie de tangente asimptotice care se sprijină pe axa spaţiului şi

$a_2 = c_2 = 0$ cînd suprafaţa se caracterizează prin aceea că planul său tangent în A_0 rămîne fix la o deplasare oarecare a lui A_0, deci suprafaţa se reduce la un plan.

Cum am luat în considerație numai suprafețele pentru care $a_2 c_2 - b_2^2 \neq 0$, putem fixa încă doi parametri secundari punînd:

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 1. \tag{16}$$

Pentru un asemenea reper de ordinul al doilea, rețeaua conjugată considerată este caracterizată de ecuația diferențială:

$$\varphi = 2\omega^1 \omega^2 = 0$$

și rețeaua asimptotică de ecuația diferențială

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = 0.$$

Cu aceste fixări, invarianții (13) devin

$$\varphi_1 = \omega^2, \quad \varphi_2 = \frac{(\omega^1)^2}{\omega^2}, \quad \varphi_3 = (\omega^1)^2 \omega^2. \tag{13'}$$

Relațiile caracteristice ale familiei reperelor de ordinul al doilea sînt

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \ \omega_1^3 = \omega^1, \ \omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega^2, \ \omega_2^2 = \omega_3^3, \ \omega_0^0 + \omega_1^1 = -2\omega_2^2, \\ \omega_1^2 = b_3 \omega^1 + b_3' \omega^2, \ \omega_0^0 - \omega_2^2 = b_3' \omega^1 - c_3 \omega^2, \ \omega_2^2 + \omega_0^0 - 2\omega_1^1 = \\ \quad = -a_3 \omega^1 - b_3 \omega^2. \end{cases} \tag{17}$$

Prin diferențierea exterioară a ultimelor trei relații din (17) se obține:

$$\begin{cases} da_3 + a_3(\omega_0^0 - \omega_1^1) - 3\omega_1^0 = a_4 \omega^1 + b_4 \omega^2, \\ db_3 - b_3(\omega_0^0 - \omega_2^2) - b_3' b_3 \omega^1 = b_4 \omega^1 + b_4' \omega^2, \\ db_3' + b_3'(\omega_0^0 - \omega_1^1) - \omega_1^0 = b_4' \omega^1 + c_4 \omega^2, \\ dc_3 + c_3(\omega_0^0 - \omega_2^2) - b_3' c_3 \omega^1 = c_4' \omega^1 + c_4 \omega^2. \end{cases} \tag{18}$$

Relațiile (17) determină pfaffienii ω_i^j $(i = 0, 1, 2, 3)$ prin formulele

$$\begin{cases} \omega_0^0 = -\frac{1}{8}(a_3 + 5b_3') \omega^1 + (b_3 + 5c_3) \omega^2, \\ \omega_1^1 = \frac{1}{8}(3a_3 - b_3') \omega^1 + (3b_3 - c_3) \omega^2, \\ \omega_2^2 = \frac{1}{8}(3b_3' - a_3) \omega^1 + (3c_3 - b_3) \omega^2. \end{cases} \tag{19}$$

Considerînd o variație datorită numai parametrilor secundari și ținînd seama de (19), găsim din (18)

$$\delta a_3 - 3e_1^0 = 0, \quad \delta b_3 = 0, \quad \delta b_3' - e_1^0 = 0, \quad \delta c_3 = 0. \tag{20}$$

Relațiile (20) determină invarianții finiți

$$3b_3' - a_3, \ b_3, \ c_3 \text{ și invarianții derivați } b_3 \pm c_3, \ c_3 - 3b_3. \tag{21}$$

Se observă din (17) și (19) că, punînd $b_3' = 0$, toate formele Pfaff ce intră în formulele de mișcare (1) sînt determinate ca funcții de pfaffienii principali ω^1, ω^2 și reperul astfel obținut este tocmai reperul canonic al suprafeței.

În adevăr, din

$$db_3' + b_3'(\omega_9^0 - \omega_1^1) - \omega_1^0 = b_4' \omega^1 + c_4' \omega^2,$$

rezultă pentru $b_3' = 0$, $-\omega_1^0 = b_4' \omega^1 + c_4' \omega^2$.

Dacă notăm prin

$$\begin{cases} \frac{a_3}{8} = a, \quad \frac{3b_3 - c_3}{8} = b, \quad \frac{3c_3 - b_3}{8} = c, \quad a_4 = 2\lambda, \\ b_4 = 2\mu, \quad c_4 = 2\nu, \quad b_4' = -\sigma, \quad c_4' = -\tau, \end{cases} \tag{22}$$

atunci familia reperelor de ordinul trei este caracterizată de relațiile

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \ \omega_1^3 = \omega^1, \ \omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega^2, \ \omega_1^2 = (3b + c)\omega^1, \ \omega_1^0 = \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \\ \omega_0^0 = -a\omega^1 - (b + 2c)\omega^2, \ \omega_1^1 = 3a\omega^1 + b\omega^2, \ \omega_2^2 = \omega_3^3 = -a\omega^1 + c\omega^2, \\ 8da + 8a(\omega_0^0 - \omega_1^1) - 3\omega_1^0 = 2\lambda\omega^1 + 2\mu\omega^2, \\ d(3b + c) + (3b + c)(\omega_0^0 - \omega_2^2) = 2\mu\omega^1 - \sigma\omega^2, \\ d(b + 3c) + (b + 3c)(\omega_0^0 - \omega_2^2) = -\tau\omega^1 + 2\nu\omega^2. \end{cases} \tag{23}$$

Sistemul exterior asociat relațiilor caracteristice (23) este

$$\begin{cases} D\omega^1 = 2(b + c)[\omega^1, \omega^2], \\ D\omega^2 = 0, \\ -[da, \omega^1] + [dc, \omega^2] - 2a(b + c)[\omega^1, \omega^2] = 0, \\ 3[db, \omega^1] + [dc, \omega^2] + \{(3b + c)^2 - \sigma - 1\}[\omega^1 \omega^2] = 0, \\ [d\sigma \omega^1] + [d\tau \omega^2] + 4\{\sigma(b + c) - a\tau\}[\omega^1 \omega^2] = 0, \\ [d\lambda \omega^1] + [d\mu \omega^2] + 16a[da \omega^1] + 8(b + c)[da \omega^2] + \{2a\tau + \\ \qquad + (b + c)(3\sigma + 2\lambda)\}]\omega^1 \omega^2] = 0, \\ 2[d\mu \omega^1] - [d\sigma \omega^2] + 3(3b + c)[db \omega^2] + (3b + c)[dc \omega^2] + \\ \qquad + \{(b + c)(4 - \tau) - 2\tau b\}[\omega^1 \omega^2] = 0, \\ [d\tau \omega^1] - 2[d\nu \omega^2] - (b + 3c)[db \omega^2] - 3(b + 3c)[dc \omega^2] + \\ \quad + \{2c\tau - \tau(b + c)\}[\omega^1 \omega^2] = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Formulele de mişcare (1) au forma următoare:

$$(25)\quad \begin{cases} dA_0 = \{-a\,\omega^1 - (b+2c)\,\omega^2\}\,A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2\,, \\ dA_1 = \{\sigma\,\omega^1 + \tau\,\omega^2\}\,A_0 + \{3a\,\omega^1 + b\omega^2\}\,A_1 + (3b+c)\,\omega^1 A_2 + \omega^1 A_3\,, \\ dA_2 = \{-a\,\omega^1 + c\,\omega^2\}\,A_2 + \omega^2 A_3\,, \\ dA_3 = \omega^2 A_2 + \{-a\,\omega^1 + c\,\omega^2\}\,A_3\,. \end{cases}$$

Teoremă fundamentală. *Cele două forme diferenţiale ω^1, ω^2, împreună cu invarianţii a, b, c, σ, τ legaţi prin condiţiile* (24) *determină o suprafaţă prin intermediul sistemului complet integrabil* (25) *pînă la o transformare proiectivă bicentrală. Sînt excluse suprafeţele desfăşurabile şi suprafeţele pentru care o tangentă asimptotică se sprijină pe axa spaţiului.*

Faţă de un reper de ordinul doi, din ecuaţiile (17) şi condiţiile de fixitate (4) obţinem pentru suprafaţa S dezvoltarea

$$(26)\qquad z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{6}(a_3 x^3 + 3b_3 x^2 y + 3b'_3 xy^2 + c_3 y^3) + (4),$$

iar pentru curbele reţelei $C_1\,(\omega^1 = 0)$ şi $C_2\,(\omega^2 = 0)$ dezvoltările

$$(27)\quad (C_1)\begin{cases} y = \frac{1}{2}\,a_3 x^2 + (3) \\ z = \frac{1}{2}\,a_3 x^2 + \frac{1}{6}\,a_3 x^3 + (4), \end{cases} \qquad (C_2)\begin{cases} x = \frac{1}{2}\,c_3 y^2 + (3), \\ z = \frac{1}{2}\,c_3 y^2 + \frac{1}{6}\,c_3 y^3 + (4). \end{cases}$$

Cuadricele osculatoare cu contact de ordinul doi cu suprafaţa în A_0 formează o familie cu trei parametri dată de ecuaţia

$$(28)\qquad x^2 + y^2 - 2z + 2\lambda\,xz + 2\mu\,yz + \nu z^2 = 0.$$

O cuadrică arbitrară a familiei (28) intersectează suprafaţa după o curbă cu un punct triplu în A_0. Tangentele în A_0 la această curbă au ecuaţia:

$$(29)\quad (a_3 - 3\lambda)\,x^3 + 3\,(b_3 - \mu)\,x^2 y + 3\,(b'_3 - \lambda)\,xy^2 + (c_3 - 3\mu)\,y^3 = z = 0.$$

Direcţiile pentru care aceste tangente sînt confundate, sînt direcţiile lui Darboux, date de ecuaţia

$$(30)\quad (3b'_3 - a_3)\,x^3 + 3\,(c_3 - 3b_3)\,x^2 y - 3\,(3b'_3 - a_3)\,xy^2 - (c_3 - 3b_3)\,y^3 = 0,$$

iar direcţiile Segre conjugate lor au ecuaţia:

$$(31)\qquad (c_3 - 3b_3)\,x^3 - 3\,(3b'_3 - a_3)\,x^2 y - 3\,(c_3 - 3b_3)\,xy^2 + (3b'_3 - a_3)\,y^3 = 0.$$

Cuadricele osculatoare din familia (28) care intersectează suprafaţa după o curbă ce are ca tangente în A_0 tocmai tangentele lui Darboux formează un fascicul numit fasciculul cuadricelor lui Darboux şi anume

$$(32)\qquad x^2 + y^2 - 2z + \frac{1}{2}\,(b'_3 + a_3)\,xz + \frac{1}{2}\,(b_3 + c_3)\,yz + \nu z^2 = 0.$$

Familia (28) conţine cuadrica generată de trei tangente asimptotice infinit vecine ale unei familii de linii asimptotice luate de-a lungul curbei asimptotice din a doua familie şi, prin calcul direct, se dovedeşte că este reprezentată prin ecuaţia

$$(33)\qquad x^2 + y^2 - 2z = 0$$

şi se numeşte cuadrica lui Lie a suprafeţei în punctul considerat.

Din familia (28) putem determina cuadricele osculatoare care trec prin A_3. Mulţimea acestor cuadrice formează o familie cu doi parametri

$$(34)\qquad x^2 + y^2 - 2z + 2\lambda\,xz + 2\mu\,yz = 0.$$

Planul polar al punctului A_2 faţă de o cuadrică a familiei (34) este

$$x_2 + \mu x_3 = 0.$$

Dacă acest plan coincide cu $A_0 A_1 A_3$, din familia (34) se determină un fascicul de cuadrice cu proprietatea că planul polar al lui A_2 faţă de orice cuadrică a fasciculului este acelaşi; ecuaţia fasciculului este

$$(35)\qquad x^2 + y^2 - 2z + 2\lambda\,xz = 0.$$

Polul planului $A_0 A_2 A_3$ faţă de o cuadrică din fasciculul (35) este punctul $P_\lambda\,(\lambda, 1, 0, 0)$. Vîrful A_1 al reperului $(P_{\lambda=0} = A_1)$ este polul planului $A_0 A_2 A_3$ faţă de cuadrica (33) care aparţine fasciculului (35) (pentru $\lambda = 0$).

În fasciculul (35) există o singură cuadrică faţă de care planul $A_0 A_2 A_3$ are polul P_1 (1, 1, 0, 0), anume

$$(36)\qquad x^2 + y^2 - 2z + xz = 0.$$

Considerînd din fasciculul de plane ce conţine tangenta conjugată $A_0 A_1$, planul $y = z$, găsim că polul său faţă de cuadrica (36) este punctul P_2 (1, 0, 1, 0). Dreapta $P_1 P_2$ taie cuadrica (33) în două puncte dintre care unul este chiar punctul unitate al reperului.

În raport cu cuadrica (33) se stabileşte o corespondenţă între dreptele trecînd printr-un punct şi dreptele situate în planul tangent în acel punct; corespondenţa are loc în raport cu orice cuadrică a fasciculului (32) şi se numeşte polaritate fundamentală. Muchiile $A_0 A_3$ şi $A_1 A_2$, respectiv $A_1 A_3$ şi $A_0 A_2$ se corespund în această polaritate. Numim, după Fubini, muchiile $A_0 A_3$ şi $A_1 A_2$, normală proiectivă de specia întîi şi normală proiectivă de specia a doua a suprafeţei considerate. Observăm că normala proiectivă de specia întîi în A_0 este dreapta care uneşte A_0 cu polul planului tangent în A_0, adică taie axa spaţiului; normala proiectivă de specia a doua este dreapta de intersecţie a planului tangent în A_0 cu planul polar al punctului de contact.

Pentru reperul de ordinul trei intrinsec legat de suprafață avem următoarele interpretări geometrice:

Vîrful A_0 coincide cu punctul generic al suprafeței; vîrfurile A_2 și A_3 sînt armonic conjugate cu centrele spațiului $C_1 = A_2 + A_3$ și $C_2 = A_2 - A_3$. Vîrful A_1 este polul unui plan axial prin A_0 față de cuadrica (33) și punctul unitate U este unul din punctele de intersecție ale dreptei P_1P_2 (determinată mai înainte) cu cuadrica (33).

Pentru invarianții diferențiali (13') se dau interpretări geometrice considerînd proiecția punctelor curbelor (C_1) și (C_2) pe planul tangent în A_0 făcută din vîrful A_3. Un punct din vecinătatea lui A_0 în planul tangent este $A_0 + dA_0 = (1 + \omega_0^0) A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2$ și deci $x = \dfrac{\omega^1}{1 + \omega_0^0} = \omega^1 + \cdots$, $y = \dfrac{\omega^2}{1 + \omega_0^0} = \omega^2 + \cdots$ Avem următoarele interpretări: $\varphi_1 = \omega^2$ este coordonata punctului de intersecție a tangentei la curba (C_2) cu a doua normală proiectivă a suprafeței; $\varphi_2 = \dfrac{(\omega^1)^2}{\omega^2}$ este partea principală a biraportului determinat de muchiile A_1A_0, A_1A_2 și dreptele ce unesc vîrful A_1 cu punctele infinit vecine lui A_0 pe curbele de proiecție din planul tangent; $\varphi = 2\omega^1\omega^2$ este partea principală a biraportului determinat de tangentele conjugate A_0A_1, A_0A_2 și dreptele ce unesc A_0 cu punctele infinit vecine lui A_0 pe curbele de proiecție din planul tangent; invariantul $\varphi_3 = (\omega^1)^2\omega^2 = \dfrac{\varphi^2}{4\varphi_1}$ este determinat prin interpretările precedente.

Considerînd dezvoltările (27) ale curbelor rețelei, se determină coordonatele plückeriene locale ale tangentelor A_0A_1 și A_0A_2 într-un punct din vecinătatea lui A_0. Tangentele curbei (C_1) aparțin complexului liniar de ecuație locală

$$\pi_{02} - a_3(\pi_{03} - \pi_{12}) = 0, \tag{37}$$

care are un contact riglat de ordinul patru cu (C_1) în A_0 și care se numește complex liniar osculator al curbei (C_1).

Ecuația locală a complexului liniar osculator al curbei (C_2) este

$$\pi_{01} - c_3(\pi_{03} + \pi_{12}) = 0 \qquad (K_2). \tag{38}$$

Fasciculul determinat de aceste două complexe liniare are ecuația

$$\pi_{02} + \lambda\pi_{01} - (a_3 + \lambda c_3)\pi_{03} + (a_3 - \lambda c_3)\pi_{12} = 0 \tag{39}$$

și complexele sale speciale sînt

$$\begin{cases} c_3\pi_{02} - 2a_3c_3\pi_{03} + a_3\pi_{01} = 0 & (K_1'), \\ c_3\pi_{02} + 2a_3c_3\pi_{12} - a_3\pi_{01} = 0 & (K_2'). \end{cases} \tag{40}$$

Intersecția suprafeței cu un plan axial prin A_0 este curba axială

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}c_3y^3 + (4). \end{cases} \tag{41}$$

Fasciculul de conice din planul axial cu contact de ordinul trei cu curba axială în A_0 are ecuația

$$\begin{cases} x = 0, \\ 2z - y^2 + \frac{1}{3}(b_3 + c_3)yz + hz^2 = 0. \end{cases} \tag{42}$$

Intersecția fasciculului Darboux (32) cu același plan axial este un fascicul de conice, reprezentat prin ecuațiile

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 - 2z + \frac{1}{2}(b_3 + c_3)yz - \nu z^2 = 0. \end{cases} \tag{43}$$

Considerăm familiile liniare de conice din planul tangent care au contact de ordinul doi cu curbele rețelei în A_0; pentru curbele (C_1) avem familia de conice cu doi parametri

$$\begin{cases} z = 0, \\ -b_3x^2 + 2\lambda_1xy + \mu_1y^2 + 2y = 0 \end{cases} \tag{44}$$

care conțin un fascicul de conice ce trec prin A_2, anume:

$$\begin{cases} z = 0, \\ -b_3x^2 + 2\lambda_1xy - y^2 + 2y = 0. \end{cases} \tag{45}$$

Clasificarea proiectivă a conicelor din fasciculul (45) depinde de semnul lui b_3, pentru că $I.\Delta = -b_3(2 + b_3)$.

Pentru curbele (C_2) avem familia de conice cu doi parametri

$$\begin{cases} z = 0, \\ \lambda_2x + 2\mu_2xy - \frac{1}{8}(3c_3 - b_3)y_2 + 2x = 0 \end{cases} \tag{46}$$

care conține un fascicul de conice ce trec prin A_1, de ecuație

$$\begin{cases} z = 0, \\ -2x^2 + 2\mu_2xy - \frac{1}{8}(3c_3 - b_3)y^2 + 2x = 0 \end{cases} \tag{47}$$

și a căror clasificare proiectivă depinde de semnul cantității $(3c_3 - b_3)$, pentru că $I.\Delta = \frac{1}{8}(3c_3 - b_3)$.

Pentru curbele reţelei conjugate considerate, planele osculatoare în punctul A_0 sînt

$$(48)\qquad \begin{cases} y - b_3 z = 0, & \text{pentru } (C_1), \\ x = 0, & \text{pentru } (C_2). \end{cases}$$

Invarianţii finiţi (21) ne conduc la următoarele clase de suprafeţe :

Suprafeţele pentru care $3b'_3 - a_3 = 0$ se caracterizează prin proprietatea că familia (C_1) este formată din curbe Darboux şi atunci familia (C_2) este formată din curbe Segre.

Suprafeţele cu $c_3 - 3b_3 = 0$ au familia curbelor (C_2) formată din curbe Darboux şi atunci (C_1) sînt curbele Segre conjugate lor.

Dacă $3b'_3 - a_3 = c_3 - 3b_3 = 0$, tangentele lui Darboux sînt nedeterminate şi suprafaţa S este o cuadrică.

Suprafeţele pentru care $b_3 + c_3 = 0$ se caracterizează prin proprietăţile:

— planul polar al punctului A_2 faţă de orice cuadrică a fasciculului Darboux (32) aparţine stelei de plane de centru A_3 ;

— fasciculul de conice din planul axial, cu contact de ordinul trei cu curba axială, (42), coincide cu fasciculul de conice determinat de intersecţia fasciculului cuadricelor Darboux (32) cu acelaşi plan axial, fasciculul (43).

Suprafeţele pentru care $b'_3 + a_3 = 0$ se bucură de proprietatea că planul polar al punctului A_1 faţă de orice cuadrică a fasciculului Darboux (32) este un plan axial.

Suprafeţele pentru care $b'_3 + a_3 = b_3 + c_3 = 0$ sînt caracterizate prin aceea că planul polar al punctului A_3 faţă de cuadrica (33) este un plan axial prin A_1.

Suprafeţele pentru care $b_3 = 0$ se bucură de una din proprietăţile :

— fasciculul de conice (45) este format din conice degenerate;

— planul osculator al curbei (C_1) coincide cu planul $A_0 A_1 A_3$.

Suprafeţele pentru care $a_3 = 0$ au următoarele proprietăţi :

— complexul osculator (K_1) se confundă cu complexul special (K'_1) şi are ecuaţia locală : $\pi_{02} = 0$, adică directoarea sa este $A_1 A_3$;

— directoarele complexelor speciale (K'_1) şi (K'_2) se intersectează ;

— planele polare ale punctelor A_0, A_1 şi respectiv A_2, A_3 faţă de complexul liniar (K_1) coincid cu planele $A_0 A_1 A_3$ şi respectiv $A_1 A_2 A_3$.

Suprafeţele pentru care $c_3 = 0$ le caracterizăm astfel :

— complexul liniar osculator (K_2) se confundă cu complexul special (K'_2) şi are ecuaţia: $\pi_{01} = 0$, adică directoarea sa este $A_2 A_3$;

— directoarele complexelor speciale (K'_1) şi (K'_2) se taie ;

— planele polare ale punctelor A_0, A_2 şi respectiv A_1, A_3 faţă de complexul liniar osculator (K_2) sînt planul $A_0 A_2 A_3$ respectiv planul $A_1 A_2 A_3$.

Pentru $a_3 = c_3 = 0$ complexele liniare osculatoare ale curbelor (C_1) şi (C_2) sînt

$$(49)\qquad \pi_{02} = 0 \text{ şi } \pi_{01} = 0,$$

iar complexele lor speciale sînt nedeterminate. În acest caz punctele A_1 şi A_2 au aceleaşi plane polare în raport cu complexele liniare (K_1) şi (K_2).

Pentru $b_3 = c_3 = 0$ conicele fasciculului (47) sînt degenerate.

Cazul de excepţie. Faţă de un reper de ordinul întîi, a doua ecuaţie (11), adică $c_2 = 0$, caracterizează clasa de suprafeţe pentru care o tangentă asimptotică coincide cu muchia $A_0 A_2$, adică se sprijină pe axa spaţiului. Cealaltă direcţie asimptotică se poate considera $A_0 A_1$ şi atunci se fixează un parametru secundar, luînd $a_2 = 0$. Atunci, din (10) găsim

$$(50)\qquad \delta b_2 = b_2 (e^1_1 - e^0_0)$$

şi excluzînd suprafeţele desfăşurabile se fixează încă un parametru punînd $b_2 = 1$.

Reperul de ordinul doi astfel obţinut este caracterizat de relaţiile

$$(51)\qquad \begin{cases} \omega^3_0 = 0, \ \omega^3_1 = \omega^2, \ \omega^3_2 = \omega^2_3 = \omega^1, \ \omega^2_1 = a_3 \omega^1 + b_3 \omega^2, \\ \omega^1_1 - \omega^0_0 = 2b_3 \omega^1 + 2b'_3 \omega^2. \end{cases}$$

Diferenţiind exterior ultimele două relaţii (51) şi ţinînd seama de ecuaţiile de structură, după lema lui Cartan obţinem

$$(52)\qquad \begin{cases} da_3 + a_3 (\omega^0_0 - 2\omega^1_1 + \omega^2_2) - \omega^2 = a_4 \omega^1 + b_4 \omega^2, \\ db_3 + b_3 (\omega^0_0 - \omega^1_1) - \omega^0_1 + b^2_3 \omega^1 = b_4 \omega^1 + b'_4 \omega^2, \\ db'_3 + b'_3 (\omega^0_0 - \omega^2_2) + b_3 b'_3 \omega^1 = b'_4 \omega^1 + c'_4 \omega^2. \end{cases}$$

Ţinînd seama de (2) şi (51) la o variaţie datorită numai parametrilor secundari (52) dau

$$(53)\qquad \delta a_3 = 0, \ \delta b_3 - e^0_1 = 0, \ \delta b'_3 = 0,$$

deci avem invarianţii finiţi

$$(54)\qquad a_3, \ b'_3.$$

Tot din (53) se observă că putem fixa ultimul parametru secundar punînd $b_3 = 0$ şi atunci reperul de ordinul trei este tocmai reperul canonic al suprafeţei. Relaţiile caracteristice sînt

$$(55)\qquad \begin{cases} \omega^3_0 = 0, \ \omega^3_1 = \omega^2, \ \omega^3_2 = \omega^2_3 = \omega^1, \ \omega^2_1 = a_3 \omega^1, \ \omega^0_1 = \mu\omega^1 + \tau\omega^2, \\ \omega^0_0 = -\frac{1}{2}\left\{\lambda\omega^1 + (-\mu + 5b'_3)\,\omega^2\right\}, \\ \omega^1_1 = -\frac{1}{2}\left\{\lambda\omega^1 - (\mu + b'_3)\,\omega^2\right\}, \ \omega^2_2 = \omega^3_3 = \frac{1}{2}\left\{\lambda\mu^1 + (b'_3 - \mu)\,\omega^2\right\}, \\ da_3 + a_3 (\omega^0_0 - 2\omega^1_1 + \omega^2_2) = \lambda\omega^1 + (1 - \mu)\,\omega^2, \\ db'_3 + b'_3 (\omega^0_0 - \omega^2_2) = -\tau\omega^1 + \sigma\omega^2. \end{cases}$$

Sistemul exterior asociat relaţiilor (55) este

$$
\begin{aligned}
&D\omega^1 = 2b_3'[\omega^1\omega^2], \quad D\omega^2 = -2\lambda[\omega^1\omega^2],\\
&[da_3\,\omega^1] + \{2a_3 b_3' - \mu(1+2b_3')\}[\omega^1\omega^2] = 0,\\
&[d\mu\,\omega^1] + [d\tau\,\omega^2] + 2(2\mu b_3' - \lambda\tau)[\omega^1\omega^2] = 0,\\
&[d\lambda\,\omega^1] - [d\mu\,\omega^2] + 5[db_3'\,\omega^2] + 2(\tau - 4\lambda b_3' + \lambda\mu)[\omega^1\omega^2] = 0,\\
(56)\qquad &[db_3'\,\omega^2] + (2\lambda\mu + \tau - 4\lambda b_3')[\omega^1\omega^2] = 0,\\
&[da_3\,\omega^2](\mu - b_3') + [d\mu\,\omega^2] - [d\lambda\,\omega^1] + 2\lambda\{\mu(b_3' - a_3 - 1) -\\
&- b_3'(a_3 + 1) + \tau\}[\omega^1\omega^2] = 0,\\
&-\lambda[db_3'\,\omega^1] + [d\tau\,\omega^1] - [d\sigma\,\omega^2] + \{b_3'(10\lambda\mu - 12\lambda b_3' + 5\tau) -\\
&\qquad - 2\lambda\mu(\mu+1) + 2\lambda(\sigma + 3b_3')\}[\omega^1\omega^2] = 0.
\end{aligned}
$$

Teoremă fundamentală. *Cele două forme diferenţiale invariante ω^1 şi ω^2 împreună cu invarianţii a_3, b_3', λ, μ, τ, legaţi prin relaţiile (56) determină o suprafaţă cu o familie de linii asimptotice cu tangente ce se sprijină pe axă, pînă la o transformare a grupului proiectiv bicentral. Faţă de un reper de ordinul doi suprafaţa admite dezvoltarea*

$$
(57)\qquad z = xy - \frac{1}{3}(a_3x^3 + 3b_3x^2y + 3b_3'xy^2 + c_3'y^3) + (4)
$$

iar liniile asimptotice (c_1) şi (c_2) au dezvoltările

$$
(58)\qquad
\begin{aligned}
&(C_1)\quad \begin{cases} y = \dfrac{a_3}{2}x^2 + \dfrac{a_4}{6}x^3 + (4),\\[2mm] z = \dfrac{a_3}{6}x^3 + \dfrac{a_4 - a_3b_3}{12}x_4 + (5),\end{cases}\\
&(C_2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{c_3}{2}y^2 + \dfrac{c_4}{6}y^3 + (4),\\[2mm] z = \dfrac{c_3}{6}y^3 + \dfrac{c_4 - b_3'c_3}{12}y^4 + (5).\end{cases}
\end{aligned}
$$

Cuadricele osculatoare cu contact de ordinul doi cu suprafaţa în A_0 sînt reprezentate prin ecuaţia

$$
(59)\qquad z - xy + \lambda xz + \mu yz + \nu z^2 = 0.
$$

Direcţiile Darboux şi direcţiile conjugate lor Segre sînt

$$
(60)\qquad a_3x^3 + b_3'y^3 = 0 \text{ şi } a_3x^3 - b_3'y^3 = 0.
$$

Fasciculul cuadricelor Darboux are ecuaţia

$$
(61)\qquad z - xy + b_3xz + b_3'yz + \nu z^2 = 0.
$$

Pentru $b_3' = 0$ suprafaţa se caracterizează prin proprietatea că fasciculul lui Darboux (61) conţine o singură cuadrică care trece prin A_3, anume

$$
(62)\qquad z - xy = 0
$$

Această caudrică se numeşte cuadrica lui Lie a suprafeţei în punctul considerat şi se bucură de proprietatea că conţine toate vîrfurile reperului: A_0, A_1, A_2, A_3 şi muchiile: A_0A_1, A_0A_2, A_1A_3 şi A_2A_3.

În polaritatea fundamentală definită în raport cu fasciculul Darboux (61) muchiei A_0A_3 îi corespunde muchia A_1A_2; aceste două muchii coincid în acelaşi timp şi cu directoarele lui Wilczynski ale suprafeţei. Dacă $a_3 = 0$, variaţia coordonatelor plückeriene ale tangentelor asimptotice arată că la o deplasare a lui A_0 pe suprafaţă aceste drepte rămîn fixe, curbele (C_1), (C_2) sînt atunci rectilinii şi suprafaţa este o cuadrică. În aceeaşi ipoteză $(a_3 = 0)$ tangentele familiei (C_1) aparţin complexului liniar $\pi_{02} = 0$, iar tangentele familiei (C_2) complexului liniar $\pi_{01} = 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. Mihăilescu T. — *Geometrie diferenţială proiectivă*. Editura Academiei R.S. România, Bucureşti, 1958.
2. Щербаков Р. Н. — *Курс аффиной и проективной дифференциальной геометрии*. Томск 1960.

ПОВЕРХНОСТИ В БИЦЕНТРАЛЬНОМ ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Резюме

Рассматривается теория поверхностей в простом трёхмерном пространстве Клейна для которого проективная группа сохраняющая две точки, является фундаментальной группой. Используя метод Э. Картана определяются инварианты поверхности и его канонческий репер.

Приводятся, в дальнейшем, соответствующие геометрические интерпретации и изучаются некоторые замечательные поверхности характеризуемые различными простыми геометрическими свойствами.