LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES VARIÉTÉS UNIPARAMÉTRIQUES DE CÔNES QUADRATIQUES DANS L'ESPACE PROJECTIF À TROIS DIMENSIONS

PAR

D. RIMER

Introduction

L'étude de la géométrie des cônes a été initiée par Sophus Lie [12]. Elle a été continuée et développée par de nombreux géomètres, parmi lesquels mentionnons V. Wagner [21], qui a utilisé systématiquement le calcul de Burali-Forti, le transport parallèle et la déviation du parallélisme de Levi-Civita.

A l'aide de la méthode du repère mobile de Cartan, Gh. Gheorghiev [3, 8] et Gh. Gheorghiev et I. Popa [5, 7] ont obtenu diverses généralisations ainsi que des résultats nouveaux pour le cas des variétés à trois dimensions de cônes quadratiques dans l'espace projectif, affine et euclidien. En même temps, Gh. Gheorghiev a étudié divers aspects du problème, du point de vue de la hydrodynamique [4].

La géométrie différentielle des variétés de cônes quadratiques n'a pas été étudiée systématiquement jusqu'ici. Ces variétés ont été considérées en passant par Gh. Gheorghiev, mais seulement comme variétés à trois dimensions de P_3, A_3 et E_3.

Le problème dual, la géométrie différentielle des variétés de sections coniques a été abordée pour la première fois par A. Kawaguchi [11] en utilisant la méthode tensorielle. Récemment I. G. Touganov [19] et V. S. Malakhovski [13] ont examiné les congruences de coniques, en employant la méthode du repère mobile, soit sous la forme donnée par Cartan, soit sous celle du répérage, de Chtcherbakov.

L'aspect algébrique du problème des variétés de coniques et de quadriques, et en particulier celui des variétés de cônes quadratiques a été considéré par Spottiswoode, Reye [18], Montesano, de Vries, L. Godeaux, R. Johnson [10] etc. Reye et, après lui, Johnson

représentent les quadriques comme des points dans l'espace projectif à neuf dimensions, les dix coordonnées d'une quadrique en P_3 déterminant un point de P_9. Mentionnons encore que l'Académie Royale de Belgique a institué en 1908 un prix pour l'étude de ces variétés, ce qui constitue une preuve de l'importance qu'on leur a accordée [10, 11].

Nous nous sommes proposé une étude systématique de la géométrie différentielle des variétés de cônes quadratiques de P_3, A_3 et E_3. En développant une idée de Johnson, nous avons attaché à l'espace projectif à trois dimensions P_3 un espace projectif à neuf dimensions que nous avons noté par S_9; nous avons étudié des variétés de cônes quadratiques à un ou deux paramètres de P_3, à l'aide des variétés ponctuelles correspondantes de S_9 — courbes ou surfaces. Nous avons utilisé la méthode du repère mobile de Cartan, appliquée à l'espace S_9.

Dans cette Note nous nous occupons des variétés uniparamétriques de P_3. Nous établissons le repère canonique, nous donnons des intérprétations au repère et aux invariants, nous étudions diverses figures associées à la variété, ainsi que diverses variétés particulières, nous esquissons, par notre méthode, dans des conditions plus avantageuses, les résultats obtenus par A. Kawaguchi pour les variétés uniparamétriques de coniques.

§ 1. *Généralités sur l'espace des quadriques de P_3 et l'espace attaché S_9*

Dans l'étude que nous entreprenons il est nécessaire que nous nous occupions premièrement de la construction de l'espace engendré par les quadriques de l'espace projectif à trois dimensions P_3, ainsi que de l'espace attaché S_9.

L'espace projectif à trois dimensions P_3 étant rapporté à un repère $\{A_\alpha, U\}$ $(\alpha = 0,1,2,3)$, un point générique $M(x^\alpha)$ de P_3 sera donné par $M = x^\alpha A_\alpha$ et une quadrique sera représentée par l'équation

$$Q \equiv a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \tag{1.1}$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont définis à un facteur arbitraire non nul près. Ces coefficients seront considérés comme les coordonnées de la quadrique. Évidemment, la quadrique est déterminée d'une manière unique par le système des coefficients $a_{\alpha\beta}$, donnés à un facteur non nul près et, réciproquement, une quadrique détermine les coordonnées à un facteur près, par rapport au repère fixé.

En considérant les dix nombres $a_{\alpha\beta}$ comme coordonnées homogènes d'un point $\bar{Q}$ d'un espace projectif à neuf dimensions S_9 [10, 18], rapporté à un repère $(A^{\alpha\beta}, E)$ *) $(\alpha, \beta = 0,1,2,3;\ A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha})$, le point $\bar{Q}$ sera écrit

*) On voit aisément que cette notation des sommets du repère fondamental de P_9 et des coordonnées d'un point est plus commode que la notation habituelle $A_\alpha\ x^\alpha$ $(\alpha = 0,1,\ldots,9)$.

$$\bar{Q} \equiv a_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}. \tag{1.2}$$

Il apparaît ainsi la possibilité d'interpréter les variétés de quadriques de P_3 comme des variétés ponctuelles de S_9 et de les étudier par l'intermédiaire de cette interprétation. Ainsi, par exemple, les points de S_9 se groupent en huit classes, correspondant à la classification projective des quadriques de P_3. En particulier, les points qui correspondent aux cônes quadratiques de P_3 forment une hypersurface $C_8^4 \subset S_9$, dont l'équation s'obtient en annulant le déterminant de la matrice des coefficients de l'équation de la quadrique; on voit aussi qu'un faisceau de quadriques de P_3 a pour image une droite de S_9, un réseau de quadriques de P_3 — un plan de S_9, une famille de quadriques de P_3, à 1,2,... paramètres a pour correspondant en S_9 une courbe, une surface,...; le contact et les enveloppes de S_9 peuvent avoir des interprétations importantes en P_3.

Nous entreprendrons l'étude différentielle des variétés de quadriques de P_3 à l'aide de l'étude différentielle des variétés ponctuelles correspondantes de S_9; en particulier aux variétés uniparamétriques de P_3 correspondent les courbes de S_9. Nous attribuerons à l'espace S_9 comme groupe fondamental, le groupe projectif de P_3 réalisé comme groupe de transformations sur les quadriques. Afin de trouver ses équations, considérons une transformation projective en P_3

$$x^{\alpha'} = p^{\alpha'}_{\beta} x^\beta \tag{1.3}$$

et son inverse

$$x^\alpha = p^\alpha_{\beta'} x^{\beta'}, \tag{1.3'}$$

$(p^{\alpha'}_\beta p^\beta_{\gamma'} = \delta^{\alpha'}_{\gamma'})$ où nous avons utilisé la convention relative aux indices muets et $\delta^{\alpha'}_{\gamma'}$ est le symbole de Kronecker.

Avec (1.3'), l'équation (1.1) devient

$$a_{\alpha\beta} p^\alpha_{\lambda'} p^\beta_{\mu'} x^{\lambda'} x^{\mu'} = 0$$

et, par suite, les nouveaux coefficients de l'équation de la quadrique sont

$$a_{\lambda'\mu'} = p^\alpha_{\lambda'} p^\beta_{\mu'} a_{\alpha\beta}. \tag{1.4}$$

La relation entre le repère donné $(A^{\alpha\beta}, E)$ et celui transformé $(A^{\lambda'\mu'}, E')$ résulte en représentant un point générique $\bar{Q}$ dans les deux repères

$$\bar{Q} = a_{\lambda'\mu'} A^{\lambda'\mu'} = p^\alpha_{\lambda'} p^\beta_{\mu'} a_{\alpha\beta} A^{\lambda'\mu'} = a_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}$$

d'où il résulte

$$A^{\alpha\beta} = p^\alpha_{\lambda'} p^\beta_{\mu'} A^{\lambda'\mu'}. \tag{1.5}$$

On obtient d'ici

$$A^{\lambda'\mu'} = p^{\lambda'}_{\alpha} p^{\mu'}_{\beta} A^{\alpha\beta}. \tag{1.5'}$$

Les équations (1.4) et (1.5) sont les équations du groupe cherché.

Établissons encore les équations de mouvement pour ce groupe.

Soit, en P_3 une transformation voisine à la transformation identique, donnée par

$$dA_{\alpha} = \omega^{\beta}_{\alpha} A_{\beta}.$$

En notant

$$A_{\alpha'} = A_{\alpha} + dA_{\alpha},$$

nous avons

$$A_{\alpha'} = (\delta^{\beta}_{\alpha} + \omega^{\beta}_{\alpha}) A_{\beta}.$$

Il s'ensuit

$$p^{\beta}_{\alpha'} = \delta^{\beta}_{\alpha} + \omega^{\beta}_{\alpha}$$

et, donc, jusqu'à des infiniment petits d'ordre supérieur:

$$p^{\beta'}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha} - \omega^{\beta}_{\alpha},$$

vu que $p^{\lambda}_{\alpha'} p^{\beta'}_{\lambda} \approx \delta^{\beta'}_{\alpha'}$.

En appliquant (1.5'), on trouve

$$A^{\lambda'\mu'} = p^{\lambda'}_{\alpha} p^{\mu'}_{\beta} A^{\alpha\beta} \approx A^{\lambda\mu} - \omega^{\lambda}_{\alpha} A^{\alpha\mu} - \omega^{\mu}_{\beta} A^{\beta\lambda}.$$

Si l'on pose

$$dA^{\lambda\mu} = A^{\lambda'\mu'} - A^{\lambda\mu}$$

on obtient les équations de mouvement du repère en S_9

$$dA^{\lambda\mu} = -\omega^{\lambda}_{\alpha} A^{\alpha\mu} - \omega^{\mu}_{\beta} A^{\beta\lambda}. \tag{1.6}$$

Les équations de structure conservent la forme habituelle

$$d\,\omega^{\beta}_{\alpha} = [\omega^{\lambda}_{\alpha}, \omega^{\beta}_{\lambda}] \quad \text{avec} \quad \sum_{\alpha=0}^{3} \omega^{\alpha}_{\alpha} = 0, \tag{1.7}$$

parce que ω^{β}_{α} sont les composantes du déplacement infinitésimal d'un repère projectif à trois dimensions. D'ailleurs, on obtient le même résultat en appliquant à (1.6) la différentiation extérieure.

Faisons encore quelques précisions relatives à la correspondance entre les éléments de P_3 et ceux de S_9. De ce qu'il a été dit plus haut, il résulte qu'étant choisi un repère en P_3, on lui attache implicitement un repère en S_9, défini par les quadriques dégénérées en couples de plans

$$x^{\alpha} x^{\beta} = 0. \tag{1.8}$$

Ce deux premiers repères sont choisis arbitrairement et puis, en appliquant le groupe projectif en P_3 et le groupe (1.5') en S_9, on obtient tous les repères de P_3 et tous les repères qui leurs sont associés en S_9. Il est clair aussi qu'étant donné le repère en S_9 on détermine son associé en P_3, ses sommets étant les intersections des quadriques dégénérées, données par (1.8). Il y a donc une corespondance biunivoque entre les repères de P_3 et les repères mobiles du groupe des quadriques en S_9 et cette correspondance s'étend aisément aux autres éléments géométriques.

§2. *Variétés uniparamétriques de cônes quadratiques en P_3. Le repère canonique. Le théorème fondamental*

Soit V une variété uniparamétrique de cônes quadratiques en P_3 et la courbe correspondante $\overline{V}$ dans l'espace attaché S_9. Nous devons fixer le repère canonique de la variété V et, implicitement, le repère canonique de la courbe $\overline{V}$. A cet effet nous appliquerons la méthode de Cartan.

Nous considérons comme repères d'odre zéro en P_3, associés à un cône fixé de V, les repères par rapport auxquels ce cône est

$$C \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0.$$

Parce que dans l'équation du cône C nous avons : $a_{11} = a_{22} = -a_{33} = 1$, et les autres $a_{\alpha\beta}$ sont nuls, ce cône aura comme correspondant en S_9 le point $\overline{C} \equiv a_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} = A^{11} + A^{22} - A^{33}$. Les repères d'ordre zéro en S_9 sont les correspondants des repères d'ordre zéro en P_3 et ils sont associés au point $\overline{C}$ de la courbe $\overline{V}$.

Nous nous occupons ensuite de la courbe $\overline{V}$ de S_9. En représentant par δ un déplacement dans la famille des repères d'ordre zéro, la condition de fixité du point $\overline{C}$ est $\delta(A^{11} + A^{22} - A^{33}) = \rho(A^{11} + A^{22} - A^{33})$.

Compte tenu des équations de mouvement (1.6) et notant $\omega^{\beta}_{\alpha}(\delta) = \pi^{\beta}_{\alpha}$, cette relation devient $-2(\pi^1_{\alpha} A^{\alpha 1} + \pi^2_{\alpha} A^{\alpha 2} - \pi^3_{\alpha} A^{\alpha 3}) = \rho(A^{11} + A^{22} - A^{33})$.

En identifiant les coefficients de $A^{\alpha\beta}$ des deux membres et en tenant compte que $A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$, on obtient

$$\pi^1_0 = \pi^2_0 = \pi^3_0 = \pi^2_1 + \pi^1_2 = \pi^3_1 - \pi^1_3 = \pi^3_2 - \pi^2_3 = \pi^2_2 - \pi^1_1 = \pi^3_3 - \pi^1_1 = 0.$$

Les pfaffiens principaux d'ordre zéro sont donc les suivants:

$$\omega^1_0,\ \omega^2_0,\ \omega^3_0,\ \omega^2_1 + \omega^1_2,\ \omega^3_1 - \omega^1_3,\ \omega^3_2 - \omega^2_3,\ \omega^2_2 - \omega^1_1,\ \omega^3_3 - \omega^1_1.$$

Parce que le groupe projectif de P_3 est d'ordre 15, il suit qu'il y a sept pfaffiens secondaires d'ordre zéro.

Considérons maintenant ω^1_0 comme pfaffien principal de la courbe $\overline{V}$, ce qui signifie que le plan $A_0 A_2 A_3$ n'est pas tangent à la courbe Γ_9 décrite par le sommet du cône local C. Exprimons les autres sept pfaffiens principaux d'ordre zéro à l'aide de ω^1_0:

$$
(2.1)\qquad
\begin{aligned}
&\omega_0^2 = \alpha\,\omega_0^1, && \omega_0^3 = \beta\,\omega_0^1, && \omega_1^2 + \omega_2^1 = \gamma\,\omega_0^1,\\
&\omega_1^3 - \omega_3^1 = \varepsilon\,\omega_0^1, && && \omega_2^3 - \omega_3^2 = \eta\,\omega_0^1,\\
&\omega_2^2 - \omega_1^1 = \lambda\,\omega_0^1, && && \omega_3^3 - \omega_1^1 = \mu\,\omega_0^1.
\end{aligned}
$$

On introduit ainsi sept coefficients, fonctions des paramètrs secondaires d'ordre zéro dont dépendent les repères d'ordre zéro.

Pour déterminer maintenant les repères du premier ordre, nous calculons, par le procédé bien connu de Cartan — c'est-à-dire par différentiation extérieure (2.1) et en utilisant les équations de structure (1.7) et le lemme de Cartan — les variations des coefficients $\alpha, \ldots, \mu$ à un déplacement δ dans le groupe des repères d'ordre zéro. En utilisant les notations antérieures, on trouve

$$
(2.2)\qquad
\begin{aligned}
&\delta\alpha + (1+\alpha^2)\,\pi_1^2 - \alpha\beta\,\pi_1^3 + \beta\,\pi_2^3 = 0,\\
&\delta\beta + \alpha\beta\,\pi_1^2 + (1-\beta^2)\,\pi_1^3 + \alpha\,\pi_2^3 = 0,\\
&\delta\gamma - 4\gamma\,\pi_1^1 + (\alpha\gamma - 2\lambda)\,\pi_1^2 - (\beta\gamma - \eta)\,\pi_1^3 - \alpha\,\pi_1^0 + \varepsilon\,\pi_2^3 - \pi_2^0 = 0,\\
&\delta\varepsilon - 4\varepsilon\,\pi_1^1 + (\alpha\varepsilon - \eta)\,\pi_1^2 - (\beta\varepsilon + 2\mu)\,\pi_1^3 - \beta\,\pi_1^0 + \gamma\,\pi_2^3 + \pi_3^0 = 0,\\
&\delta\eta - 4\eta\,\pi_1^1 + (\alpha\eta + \varepsilon)\,\pi_1^2 - (\beta\eta - \gamma)\,\pi_1^3 + 2(\lambda - \mu)\,\pi_2^3 - \beta\,\pi_2^0 + \alpha\,\pi_3^0 = 0.\\
&\delta\lambda - 4\lambda\,\pi_1^1 + (\alpha\lambda + 2\gamma)\,\pi_1^2 - (\beta\lambda + \varepsilon)\,\pi_1^3 + \pi_1^0 + \eta\,\pi_2^3 - \alpha\,\pi_2^0 = 0,\\
&\delta\mu - 4\mu\,\pi_1^1 + (\alpha\mu + \gamma)\,\pi_1^2 - (\beta\mu + 2\varepsilon)\,\pi_1^3 + \pi_1^0 - \eta\,\pi_2^3 - \beta\,\pi_3^0 = 0.
\end{aligned}
$$

Pour $\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = 0$, les quatre premières relations de (2.2) donnent: $\pi_1^2 = \pi_1^3 = \pi_2^0 = \pi_3^0 = 0$. Pour $\eta = 0$ et $\lambda \neq \mu$, on obtient $\pi_2^3 = 0$.

Le cas d'exception $\lambda = \mu$ sera exclu de nos considérations ultérieures. Néanmoins, nous ferons quelques considérations sur ce cas. Écrivons les trois dernières équations de (2.2) après avoir obtenu $\pi_1^2 = \pi_1^3 = \pi_2^0 = \pi_3^0 = 0$.

$$
(2.2')\qquad
\begin{aligned}
&\delta\eta - 4\eta\,\pi_1^1 + 2(\lambda - \mu)\,\pi_2^3 = 0,\\
&\delta\lambda - 4\lambda\,\pi_1^1 + \pi_1^0 + \eta\,\pi_2^3 = 0,\\
&\delta\mu - 4\mu\,\pi_1^1 + \pi_1^0 - \eta\,\pi_1^3 = 0.
\end{aligned}
$$

En sommant les deux premières relations et en retranchant la dernière, on obtient

$$\delta(\eta + \lambda - \mu) = 2(\eta + \lambda - \mu)(2\pi_1^1 - \pi_2^3).$$

Il suit que l'équation

$$\eta + \lambda - \mu = 0$$

est invariante aux automorphismes projectifs de la famille de repères du premier ordre, et par suite, elle exprime une propriété de la variété.

Pour les variétés qui satisfont à cette condition, on ne peut pas fixer le repère canonique. En effet, si l'on donne à λ et μ les valeurs 0 et 1 respectivement, on obtient $\eta = 1$. Pour ces valeurs, les équations (2.2') donnent

$$-4\pi_1^1 - 2\pi_2^3 = 0, \quad \pi_1^0 + \pi_2^3 = 0, \quad -4\pi_1^1 + \pi_1^0 - \pi_2^3 = 0,$$

qui conduisent à $\pi_1^0 = -\pi_2^3$ et $\pi_1^1 = -\frac{1}{2}\pi_2^3$.

Par conséquent, un paramètre secondaire reste indéterminé. Il suit que la variété qui constitue le cas d'exception admet un groupe à un paramètre de mouvements en soi-même.

Revenons au cas général. Pour $\lambda = 0$, les équations (2.2) donnent: $\pi_1^0 = 0$ et, à cause de $\mu \neq \lambda$, nous prenons $\mu = 1$; on obtient alors $\pi_1^1 = 0$. On voit ainsi que les valeurs données aux coefficients $\alpha, \ldots, \mu$ déterminent tous les paramètres secondaires; $\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^0, \omega_3^0, \omega_2^3, \omega_1^0, \omega_1^1$ deviennent des pfaffiens principaux du premier ordre, donc proportionnels à ω_0^1.

En introduisant dans (2.1) les valeurs établies des coefficients, nous obtenons

$$(2.3)\qquad \omega_0^2 = \omega_0^3 = \omega_1^2 + \omega_2^1 = \omega_1^3 - \omega_3^1 = \omega_2^3 - \omega_3^2 = \omega_2^2 - \omega_1^1 = 0$$

et $\omega_3^3 - \omega_1^1 = \omega_0^1$.

Notons $\omega_0^1 = d\sigma$. σ sera un paramètre invariant pour la courbe $\bar{V}$ ou la variété V. En introduisant les invariants $\varkappa, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_6$ pour exprimer les divers pfaffiens ω_α^β en fonction de $d\sigma$, on peut écrire

$$
(2.4)\qquad
\begin{aligned}
&\omega_0^2 = 0, \quad \omega_0^3 = 0, \quad \omega_1^2 = -\omega_2^1 = \varkappa_1\,d\sigma, \quad \omega_1^3 = \omega_3^1 = \varkappa_2\,d\sigma,\\
&\omega_2^3 = \omega_3^2 = \varkappa_3\,d\sigma, \quad \omega_2^2 = \omega_1^1 = \varkappa\,d\sigma, \quad \omega_3^3 = (\varkappa + 1)\,d\sigma,\\
&\omega_1^0 = \varkappa_4\,d\sigma, \quad \omega_2^0 = \varkappa_5\,d\sigma, \quad \omega_3^0 = \varkappa_6\,d\sigma, \quad \omega_0^0 = -(3\varkappa + 1)\,d\sigma.
\end{aligned}
$$

Le repère cononique de la courbe $\bar{V}$ de P_9 est ainsi déterminé. Il est un repère du premier ordre, $\varkappa, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_6$ étant sept invariants finis du deuxième ordre.

En même temps avec le repère canonique de la courbe $\bar{V}$, nous avons obtenu le repère canonique de la variété V de cônes quadratiques de l'espace P_3. Nous pouvons écrire donc les formules de Frenet de la variété V:

$$
(2.5)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dA_0}{d\sigma} &= -(3\varkappa+1)A_0 + A_1,\\
\frac{dA_1}{d\sigma} &= \varkappa_1 A_0 + \varkappa A_1 + \varkappa_1 A_2 + \varkappa_2 A_3,\\
\frac{dA_2}{d\sigma} &= \varkappa_5 A_0 - \varkappa_1 A_1 + \varkappa A_2 + \varkappa_3 A_3,\\
\frac{dA_3}{d\sigma} &= \varkappa_6 A_0 + \varkappa_2 A_1 + \varkappa_3 A_2 + (\varkappa+1)A_3,
\end{aligned}
$$

$$
(2.6)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dA^{00}}{d\sigma} &= 2(3\varkappa+1)A^{00} - 2\varkappa_1 A^{01} - 2\varkappa_5 A^{02} - 2\varkappa_6 A^{03},\\
\frac{dA^{01}}{d\sigma} &= -A^{00} + (2\varkappa+1)A^{01} + \varkappa_1 A^{02} - \varkappa_2 A^{03} - \varkappa_1 A^{11} - \varkappa_5 A^{12} - \varkappa_6 A^{13},\\
\frac{dA^{02}}{d\sigma} &= -\varkappa_1 A^{01} + (2\varkappa+1)A^{02} - \varkappa_3 A^{03} - \varkappa_1 A^{12} - \varkappa_5 A^{22} - \varkappa_6 A^{23},\\
\frac{dA^{03}}{d\sigma} &= -\varkappa_2 A^{01} - \varkappa_3 A^{02} + 2\varkappa A^{03} - \varkappa_1 A^{13} - \varkappa_5 A^{23} - \varkappa_6 A^{33},\\
\frac{dA^{11}}{d\sigma} &= -2A^{01} - 2\varkappa A^{11} + 2\varkappa_1 A^{12} - 2\varkappa_2 A^{13},\\
\frac{dA^{12}}{d\sigma} &= -A^{02} - \varkappa_1 A^{11} - 2\varkappa A^{12} - \varkappa_3 A^{13} + \varkappa_1 A^{22} - \varkappa_2 A^{23},\\
\frac{dA^{13}}{d\sigma} &= -A^{03} - \varkappa_2 A^{11} - \varkappa_3 A^{12} - (2\varkappa+1)A^{13} + \varkappa_1 A^{23} - \varkappa_2 A^{33},\\
\frac{dA^{22}}{d\sigma} &= -2\varkappa_1 A^{12} - 2\varkappa A^{22} - 2\varkappa_3 A^{23},\\
\frac{dA^{23}}{d\sigma} &= -\varkappa_2 A^{12} - \varkappa_1 A^{13} - \varkappa_3 A^{22} - (2\varkappa+1)A^{23} - \varkappa_3 A^{33},\\
\frac{dA^{33}}{d\sigma} &= -2\varkappa_2 A^{13} - 2\varkappa_3 A^{23} - 2(\varkappa+1)A^{33}.
\end{aligned}
$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème fondamental pour la variété V:

Une famille uniparamétrique de cônes quadratiques en P_3 est déterminée d'une manière unique à une transformation projective près, si l'on

connaît les sept courbures $\varkappa, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_6$, comme fonctions continues du paramètre σ.

Un théorème analogue peut être énoncé pour la courbe $\bar{V}$ de S_9.

§ 3. *Interprétations géométriques du repère et des invariants*

A l'aide des formules de Frenet (2.5) et (2.6) nous examinerons la géométrie différentielle de la variété V. A cet effet nous utiliserons son image en S_9, la courbe $\bar{V}$. Un premier élément essentiel attaché à la courbe $\bar{V}$ est sa tangente $\bar{T}$ en un point. Elle est déterminée par les points $\bar{C}$ et $\frac{d\bar{C}}{d\sigma}$.

Compte tenu des formules (2.6), on obtient

$$
(3.1)\qquad \frac{d\bar{C}}{d\sigma} = -2\varkappa\bar{C} + 2\bar{B},
$$

où nous avons noté

$$
(3.2)\qquad \bar{B} = A^{33} - A^{01}.
$$

La tangente à $\bar{V}$ est déterminée, donc, par les points $\bar{C}$ et $\bar{B}$.

Aux points $\bar{C}$ et $\bar{B}$ de la tangente, correspondent en P_3 deux quadriques: le cône local de V, $C \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ et le cône B $(x^3)^2 - x^1x^0 = 0$.

Le faisceau de quadriques qui correspond en P_3 à la tangente de $\bar{V}$, ayant C et B comme quadriques de base, sera nommé le *faisceau tangent à la variété V au cône C* et sera noté par T. Il constitue pour la variété V, l'analogue de la tangente pour la courbe. On peut le considérer comme la limite à laquelle tend le faisceau de quadriques déterminé par les cônes infiniment voisins $C(\sigma)$ et $C(\sigma+d\sigma)$, lorsque $d\sigma$ tend vers zéro. Comme dans la théorie des courbes, nous dirons que la variété V et le faisceau T ont un „contact du premier ordre" au cône C, c'est-à-dire que C représente un cône commun, double, pour le faisceau T et la variété V.

L'équation locale du faisceau T est

$$
(3.3)\qquad \lambda[(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2] + \mu[(x^3)^2 - x^1x^0] = 0.
$$

Pour les valeurs des paramètres λ et μ qui annulent le discriminant

$$
\Delta = \lambda\mu^2(\mu - \lambda)
$$

de (3.3), on obtient les cônes du faisceau:

pour $\mu_1 = \mu_2 = 0$, le cône $C \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$, cône double,

(3.4) pour $\lambda = 0$, le cône $B \equiv (x^3)^2 - x^1 x^0 = 0$,

pour $\mu = \lambda$, le cône $D \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - x^1 x^0 = 0$.

Le cône C a son sommet en A_0, B en A_2 et D en A_3

Le plan $A_0 A_2 A_3$, d'équation $x^1 = 0$, a comme droite de pôles, par rapport au cône local C, la droite $A_0 A_1$. Le plan $x^3 = 0$ (déterminé par la droite $A_0 A_1$ et le sommet A_2) coupe le cône B suivant les droites

$$x^3 = x^1 = 0 \text{ et } x^3 = x^0 = 0,$$

c'est-à-dire suivant $A_0 A_2$ et $A_1 A_2$. L'intersection des droites $A_0 A_1$ et $A_1 A_2$ est le sommet A_1.

Nous avons ainsi une interprétation géométrique des sommets du repère canonique de la variété V. Pour l'interprétation du point unitaire U, nous utiliserons le birapport de quatre quadriques du faisceau. Déterminons, donc, dans le faisceau T, la quadrique F, harmoniquement conjuguée à C, par rapport au couple de quadriques B et D, c'est-à-dire $[B, D; C, F] = -1$. (De cette manière, nous aurons en S_9, sur la tangente $\overline{T}$, le point $\overline{F}$ tel que $[\overline{B}, \overline{D}; \overline{C}, \overline{F}] = -1$). En remarquant que $C = -B + D$, on obtient $F = B + D$, donc

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 2x^1 x^0 = 0. \tag{3.5}$$

En coupant, successivement, la quadrique F par les plans $x^3 = 0$, et $x^2 = 0$, nous obtenons les coniques

$$\begin{aligned} x^3 &= (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^1 x^0 = 0, \\ x^2 &= (x^1)^2 + (x^3)^2 - 2x^1 x^0 = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Les cônes ayant les sommets en A_3 et A_2 respectivement, et pour directrices les coniques (3.6) se coupent suivant une courbe. Celle-ci est intersectée par le plan $x^1 - x^0 = 0$, (le plan polaire du point A_1 par rapport à la quadrique F) en quatre points: $U(1, 1, 1, 1)$ et $(1, -1, 1, 1)$, $(1, 1, -1, 1)$, $(1, -1, -1, 1)$.

Donnons maintenant une interprétation pour l'invariant différentiel $d\sigma$. Soit M un point de la courbe Γ des sommets du cône C : $M = A_0 + dA_0 + \frac{1}{2} d^2 A_0 + \ldots$ Compte tenu des formules (2.5), nous avons:

$$M = \left\{ 1 - (3\varkappa + 1) d\sigma + \frac{1}{2} [-3\varkappa + (3\varkappa + 1)^2 + \varkappa_4] d\sigma^2 + \ldots \right\} A_0 +$$
$$+ \left[d\sigma + \frac{1}{2} (-2\varkappa - 1) d\sigma^2 + \ldots \right] A_1 + \left(\frac{1}{2} \varkappa_1 d\sigma^2 + \ldots \right) A_2 + \left(\frac{1}{2} \varkappa_2 d\sigma^2 + \ldots \right) A_3 .$$

Notons par φ le birapport de la quaterne de plans qui passent par $A_2 A_3$ et, respectivement par les points A_1, A_0, U et M. Nous obtenons:

$$\varphi = \frac{d\sigma \left[1 - \frac{1}{2} (2\varkappa + 1) d\sigma + \cdots \right]}{1 - (3\varkappa + 1) d\sigma + \frac{1}{2} [-3\varkappa + (3\varkappa + 1)^2 + \varkappa_4] d\sigma^2 + \cdots}$$

d'où il suit que $d\sigma$ est la partie principale de φ.

Pour d'autres interprétations, nous ferons d'abord la remarque qu'à un réseau de quadriques de P_2 correspond, en S_9, un plan et réciproquement. En particulier, au plan osculateur à la courbe $\overline{V}$ au point $\overline{C}$ correspondra *le réseau* que nous appellerons *osculateur à la variété* V au cône C. Il peut être conçu de la manière suivante. Désignons par réseau tangent à la variété V au cône C, chaque réseau qui contient le faisceau tangent. Il a, comme le faisceau tangent T, deux cônes d'intersection confondus avec V. Considérons un réseau qui contient trois quadriques de V, C_1, C_2 et C_3, correspondant à trois valeurs σ_1, σ_2 et σ_3 du paramètre σ. Si C_2 tend vers C_1, alors le réseau tendra vers le réseau tangent en C_1, qui contient la quadrique C_3. Si C_3 tend aussi vers C_1 alors le réseau obtenu est le réseau osculateur à la variété V au cône C_1. Il sera noté par R.

Cherchons maintenant l'équation du réseau osculateur R ou, ce qui est la même chose, déterminons le plan osculateur à la courbe $\overline{V}$ en $\overline{C}$. Comme l'on sait, ce plan est déterminé par les points $\overline{C}$, $\frac{d\overline{C}}{d\sigma}$ et $\frac{d^2\overline{C}}{d\sigma^2}$. En faisant les calculs et considérant des combinaisons linéaires convenables de ces points, on constate que le plan en question est déterminé par les points $\overline{C}$, $\overline{B}$ et $\overline{G}$, où

$$\begin{aligned} \overline{G} = \frac{d\overline{B}}{d\sigma} &= \varkappa_4 A^{11} + \varkappa_5 A^{12} + (\varkappa_6 - 2\varkappa_2) A^{13} - (2\varkappa + 1) A^{01} - \\ &- 2\varkappa_3 A^{23} - \varkappa_1 A^{02} - 2(\varkappa + 1) A^{33} + \varkappa_2 A^{03} + A^{00}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

On déduit que le réseau R de P_3 a l'équation locale

$$\begin{aligned} &\lambda[(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2] + \mu[(x^3)^2 - x^0 x^1] + \nu[\varkappa_4 (x^1)^2 + \varkappa_5 x^1 x^2 + \\ &+ (\varkappa_6 - 2\varkappa_2) x^1 x^3 - (2\varkappa + 1) x^1 x^0 - 2\varkappa_3 x^2 x^3 - \varkappa_1 x^2 x^0 - 2(\varkappa + 1)(x^3)^2 + \\ &\varkappa_2 x^3 x^0 + (x^0)^2] = 0, \end{aligned}$$

ou, symboliquement

$$\lambda C + \mu B + \nu G = 0. \tag{3.8'}$$

Pour d'autres interprétations des invariants nous extrairons du réseau osculateur (3.8') trois faisceaux, en considérant comme quadriques de base, deux à deux des trois quadriques C, B, G qui déterminent le réseau. Ces faisceaux seront nommés faisceaux principaux et, plus précisement:

$\lambda C + \mu B = 0$, I-er faisceau principal, c'est le faisceau tangent T, dont nous nous sommes déjà occupé,

$\lambda C + \nu G = 0$, II-ème faisceau principal,
$\mu B + \nu G = 0$, III-ème faisceau principal.

Ces faisceaux ont des significations géométriques déterminées parce que C, B et G ont de telles significations.

Considérons encore la tangente à la courbe décrite par $\bar{F}$ en S_9. Elle est déterminée par les points.

$$\bar{F} = A^{11} + A^{22} + A^{33} - 2A^{10}$$

et

$$\frac{d\bar{F}}{d\sigma} = 2[A^{00} - 2(\varkappa + 1)A^{01} - \varkappa_1 A^{02} + \varkappa_2 A^{03} + (\varkappa_4 - \varkappa)A^{11} + \varkappa_5 A^{12} + \tag{3.9}$$
$$+ (\varkappa_6 - 2\varkappa_2)A^{13} - \varkappa A^{22} - 2\varkappa_3 A^{23} - (\varkappa + 1)A^{33}].$$

A la courbe décrite par $\bar{F}$ correspond, en P_3, un faisceau de quadriques. A la tangente à cette courbe, correspond un faisceau tangent à cette variété. En notant

$$H \equiv \frac{dF}{d\sigma} \tag{3.9}$$

son équation sera

$$\lambda[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^0] + \mu[(x^0)^2 - 2(\varkappa + 1)x^0x^1 - \varkappa_1 x^0x^2 + \tag{3.10}$$
$$+ \varkappa_2 x^0x^3 + (\varkappa_4 - \varkappa)(x^1)^2 + \varkappa_5 x^1x^2 + (\varkappa_6 - 2\varkappa_2)x^1x^3 - \varkappa(x^2)^2 -$$
$$- 2\varkappa_3 x^2x^3 - (\varkappa + 1)(x^3)^2] = 0.$$

Symboliquement il sera noté

$$\rho_1 F + \rho_2 H = 0 \tag{3.10'}$$

et nommé *IV-ème faisceau principal.*

Chacun de ces quatre faisceaux détermine sur chacune des arêtes $A_\alpha A_\beta$ du repère canonique une involution. L'équation de l'involution s'obtient en considérant le système formé par l'équation du faisceau et les équations de l'arête $A_\alpha A_\beta$. Les valeurs des paramètres qui annulent le discriminant fournissent les deux quadriques tangentes à l'arête $A_\alpha A_\beta$ et, implicitement, permettent de trouver les points unis de l'involution qui sont les points de contact de l'arête $A_\alpha A_\beta$ à ces deux quadriques tangentes. La valeur du birapport de quatre points, dont deux sont A_α et A_β et les autres deux sont, soit le couple des points unis de l'involution soit l'un des points unis et le point unitaire $U_{\alpha\beta}$ sur l'arête $A_\alpha A_\beta$, conduisent à une interprétation géométrique pour certains des invariants.

Les interprétatios ainsi trouvées sont comprises dans le tableau suivant :

(3.11)

Le faisceau principal	L'arête	Points unis de l'involution	Interprétations pour les invariants
II	A_0A_1	$A_0, M_1(2\varkappa + 1, 2, 0, 0)$	$[A_0, A_1; U_{01}, M_1] = \varkappa + \frac{1}{2}$
	A_0A_2	$A_0, M_2(\varkappa_1, 0, 2, 0)$	$[A_0, A_2; U_{02}, M_2] = \frac{\varkappa_1}{2}$
	A_0A_3	$A_3, M_3(\varkappa_2, 0, 0, -2)$	$[A_0, A_3; U_{03}, M_3] = -\frac{\varkappa_2}{2}$
	A_1A_2	$M_4\left(0, 1, -\frac{\varkappa_4}{\varkappa_5} + \sqrt{1 + \left(\frac{\varkappa_4}{\varkappa_5}\right)^2}, 0\right)$ $M_5\left(0, 1, -\frac{\varkappa_4}{\varkappa_5} - \sqrt{1 + \left(\frac{\varkappa_4}{\varkappa_5}\right)^2}, 0\right)$	$[A_1, A_2; M_4, M_5] =$ $= -\left(-\frac{\varkappa_4}{\varkappa_5} + \sqrt{1 + \left(\frac{\varkappa_4}{\varkappa_5}\right)^2}\right)^2$
III	A_0A_1	$N_{1,2}(\pm\sqrt{\varkappa_4}, 1, 0, 0)$	$[A_0, A_1; U_{01}, N_2] = \sqrt{\varkappa_4}$
	A_0A_3	$A_0, N_3(\varkappa_2, 0, 0, -2)$	$[A_0, A_3; U_{03}, N_3] = -\frac{\varkappa_2}{2}$
IV	A_0A_2	$A_0, L_1(\varkappa_1, 0, 2, 0)$	$[A_0, A_2; U_{02}, L_1] = \frac{\varkappa_1}{2}$
	A_0A_3	$A_0, L_2(\varkappa_2, 0, 0, -2)$	$[A_0, A_3; U_{03}, L_2] = -\frac{\varkappa_2}{2}$

En même temps nous obtenons des interprétations géométriques pour quelques-uns des points simples existant dans ces involutions.

(3,12)

Le faisceau principal	L'arête	Points en involution	Interprétations géométriques
III	A_0A_2	$A_0, S_1(\varkappa_1, 0, 1, 0)$	$[A_0, A_2; U_{02}, S_1] = \varkappa_1$
	A_1A_2	$A_2, S_2(0, \varkappa_5, -\varkappa_4, 0)$	$[A_1, A_2; U_{12}, S_2] = -\frac{\varkappa_5}{\varkappa_4}$
	A_2A_3	$A_2, A_3(0, 0, \varkappa, -\varkappa_3)$	$[A_2, A_3; U_{23}, S_3] = -\frac{\varkappa}{\varkappa_3}$

Une autre interprétation pour l'invariant $\varkappa$ résulte en considérant le plan polaire de A_0, par rapport à la quadrique H (3.9'): son intersection avec l'arête $A_0 A_1$ donne un point $Z(\varkappa+1, 1, 0, 0)$ et nous avons ainsi

$$[A_0, A_1, U_{01}, Z] = \varkappa + 1. \tag{3.13}$$

Pour les invariants $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_6$ on obtient encore des interprétations en utilisant la notion de déviation du parallélisme au sens de Myller, élargie pour l'espace projectif par Gh. Gheorghiev et I. Popa [3]. On trouve

$$\begin{aligned}
\rho^3_{20} &= \left| A_3, A_2, A_0, \frac{dA_2}{d\sigma} \right| = \varkappa_1, \\
\rho^0_{12} &= \left| A_0, A_1, A_2, \frac{dA_1}{d\sigma} \right| = \varkappa_2, \\
\rho^0_{21} &= \left| A_0, A_2, A_1, \frac{dA_2}{d\sigma} \right| = -\varkappa_3, \\
\rho^2_{13} &= \left| A_2, A_1, A_3, \frac{dA_1}{d\sigma} \right| = -\varkappa_4, \\
\rho^3_{21} &= \left| A_3, A_2, A_1, \frac{dA_2}{d\sigma} \right| = \varkappa_5, \\
\rho^2_{31} &= \left| A_2, A_3, A_1, \frac{dA_3}{d\sigma} \right| = -\varkappa_6.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

On établit aussi

$$\rho^1_{02} = \rho^1_{03} = \rho^2_{01} = \rho^3_{01} = 0, \tag{3.15}$$

c'est-à-dire, les arêtes $A_1 A_0$ sont parallèles au sens de Myller par rapport aux arêtes $A_1 A_2$. D'une manière analogue les arêtes $A_1 A_0$ sont parallèles par rapport à $A_1 A_3$, $A_2 A_0$ par rapport à $A_2 A_1$, $A_3 A_0$ par rapport à $A_3 A_1$.

§ 4. *Figures associées. Classes particulières de variétés*

Il est utile de considérer maintenant quelques figures géométriques associées à la variété V. On pourra établir ainsi d'autres propriétés intéressantes.

Commençons par l'enveloppe de la famille de cônes V. La courbe caractéristique du cône local C est donnée par son équation

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0 \tag{+}$$

et par l'équation obtenue en dérivant (+) par rapport à σ:

$$x^1 \dot{x}^1 + x^2 \dot{x}^2 - x^3 \dot{x}^3 = 0,$$

où nous avons noté $\dot{x}^i = \dfrac{dx^i}{d\sigma}$.

Pour $\dot{x}^i$ nous utiliserons les relations

$$\dot{x}^\beta = -x^\alpha \omega^\beta_\alpha + \rho x^3 \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \tag{++}$$

obtenues de la condition d'immobilité d'un point $M: dM = \rho M$ et en tenant compte de $M = x^\alpha A_\alpha$ et de $dA_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta$. En faisant les calculs, on obtient pour la courbe caractéristique du cône local, les équations

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0, \quad (x^3)^2 - x^1 x^0 = 0. \tag{4.1}$$

On peut trouver une représentation paramétrique de la courbe caractéristique en posant $x^0 = 1$ et $x^1 = \cos^2\varphi$ *). Nous obtiendrons $x^3 = \pm \cos\varphi$ et $x^2 = \pm \cos\varphi \sin\varphi$. On observe aisément que, vu le double signe, la courbe caractéristique a quatre branches, donc l'enveloppe a quatre nappes. Nous nous occuperons seulement de l'une d'elles, l'étude des autres étant similaire. L'équation de cette branche de la courbe caractéristique ou, ce qui est la même chose, l'équation d'une nappe de l'enveloppe est

$$P = A_0 + \cos^2\varphi\, A_1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\, A_2 + \cos\varphi\, A_3. \tag{4.2}$$

Examinons quelques aspects géométriques liés à l'enveloppe.

La condition pour que l'enveloppe passe par A_0 est $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$. Elle se détermine en écrivant $P = \rho A_0$, ce qui conduit à $\cos\varphi = 0$. Parce que pour aucune valeur de φ, le terme en A_0 de (4.2) ne s'annule pas, il suit que l'enveloppe ne passe pas par aucun autre sommet du tétraèdre de référence.

On trouve aussi que pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$, la courbe caractéristique coupe le plan $a_2 = A_0 A_1 A_3$. En effet, pour ces valeurs, le coefficient de A_2 de (4.2) s'annule. Les points d'intersection avec le plan a_2 sont:

$P_1 = A_0 + A_1 + A_3$, le point unitaire du plan a_2 (pour $\varphi = 0$),

$P_2 = A_0 + A_1 - A_3$ (pour $\varphi = \pi$).

*) Nous prenons $x^0 = 1$, parce que sur la courbe (4.1) il n'y a pas de points réels avec $x^0 = 0$.

Le plan tangent à l'enveloppe en un de ses points P est: $|M, P, P_\varphi, P_\sigma| = 0$, où M est un point générique du plan, $P_\varphi = \frac{\partial P}{\partial \varphi}$ et $P_\sigma = \frac{\partial P}{\partial \sigma}$. En notant $P = a^\beta A_\beta$, nous obtenons

$$P_\varphi = \frac{da^\gamma}{d\varphi} A_\gamma \quad \text{et} \quad P_\sigma = a^\eta \frac{\omega_\eta^\lambda}{d\sigma} A_\lambda \quad (\eta, \gamma, \lambda = 0, 1, 2, 3).$$

a^β a les valeurs données par (4.2): 1, $\cos^2\varphi$, $\frac{1}{2}\sin 2\varphi$, $\cos\varphi$; les valeurs de $\frac{da^\gamma}{d\varphi}$ sont:

$$0, \ -\sin 2\varphi, \ \cos 2\varphi, \ -\sin\varphi. \tag{4.3}$$

En notant,

$$\frac{\omega_\eta^\lambda}{d\sigma} = p_\eta^\lambda,$$

l'équation du plan tangent devient $\left| x^\alpha A_\alpha, a^\beta A_\beta, \frac{da^\gamma}{d\varphi} A_\gamma, a^\eta p_\eta^\lambda A_\lambda \right| = 0$, ou

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} a^\beta a^\eta \frac{da^\gamma}{d\varphi} p_\eta^\lambda x^\alpha = 0, \tag{4.4}$$

où $\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\gamma} = \pm 1$, selon que la permutation $(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)$ des indices $(0, 1, 2, 3)$ est de classe paire ou impaire.

Nous avons établi plus haut que le point A_0 appartient à l'enveloppe et correspond aux valeurs $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ du paramètre φ. En introduisant dans (4.4) pour a^β et $\frac{da^\gamma}{d\varphi}$ les valeurs qui correspondent à $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, nous obtenons les équations de deux plans tangents à l'enveloppe, en A_0:

$$\begin{aligned} x^2 - x^3 &= 0, \\ x^2 + x^3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Les deux plans tangents déterminent un faisceau d'axe $A_0 A_1$.

Pour $\varphi = 0$ et π, on obtient avec (4.4) les équations des plans tangents à l'enveloppe en P_1 et P_2 respectivement:

$$\begin{aligned} x^1 - x^3 &= 0, \\ x^1 + x^3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

et déterminent donc un faisceau d'arête $A_0 A_2$.

Rapportons-nous de nouveau à la courbe caractéristique (σ=const.). La tangente à la courbe en $P = A_0\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ est déterminée par les points A_0 et $(P_\varphi)_{\varphi=\pi/2}$; elle a donc les équations

$$x^1 = x^2 - x^3 = 0. \tag{4.7}$$

L'autre tangente en A_0, en considérant $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ est

$$x^1 = x^2 + x^3 = 0. \tag{4.7'}$$

D'une manière analogue on trouve que les tangentes à cette courbe en P_1 et P_2 ont les coordonnées plückeriennes

$$[P_1, (P_1)_\varphi]_{\varphi=0} = [A_0, A_2] + [A_1, A_2] - [A_3, A_2], \tag{4.8}$$

et respectivement

$$[P_2, (P_2)_\varphi]_{\varphi=\pi} = [A_0, A_2] + [A_1, A_2] + [A_3, A_2]. \tag{4.8'}$$

Elles appartiennent, donc à l'étoile de droites de centre A_2.

Pour aucune valeur de φ, cette courbe ne peut pas être une droite. Cela résulte en imposant la condition d'immobilité pour la tangente

$$d[P, P_\varphi] = \rho[P, P_\varphi],$$

c'est-à-dire $[P, P_{\varphi^2}] = \rho[P, P_\varphi]$. Mais P_φ a pour coordonnées: 0, $-\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$, $-\sin\varphi$, tandis que les coordonnées de P_{φ^2} sont: 0, $-2\cos 2\varphi$, $-2\sin 2\varphi$, $-\cos\varphi$, et l'on constate que les deux groupes de six coordonnées plückeriennes ne sont pas proportionnels.

Le plan osculateur à la courbe caractéristique est déterminé par $P, P_\varphi, P_{\varphi^2}$. Son équation est

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} a^\beta \frac{da^\gamma}{d\varphi} \frac{d^2 a^\lambda}{d\varphi^2} x^\alpha = 0. \tag{4.9}$$

On établit aisément que les plans osculateurs en P_1 et P_2 respectivement ont les équations

$$x^0 + x^1 - 2x^3 = 0, \tag{4.10}$$

$$x^0 + x^1 + 2x^3 = 0, \tag{4.10'}$$

c'est-à-dire qu'ils passent par A_2, ce qu'on pouvait prévoir à cause du fait que les tangentes à la courbe σ = const, en P_1 et en P_2 passent par le point A_2.

Remarquons encore que l'arête de rebroussement de l'enveloppe de la famille de cônes est donnée par les équations (4.1) et par

$$(4.11)\qquad \varkappa_4 (x^1)^2 - (4\varkappa + 3)(x^3)^2 + (x^0)^2 + \varkappa_5 x^1 x^2 + (\varkappa_6 - 2\varkappa_2) x^1 x^3 - \\ - 2\varkappa_3 x^2 x^3 - \varkappa_1 x^2 x^0 + \varkappa_2 x^3 x^0 = 0$$

obtenue de la deuxième équation (4.1) par dérivation et en tenant compte de (++). On peut constater ainsi que l'arête de rebroussement ne passe pas par A_0 et les conditions qu'elle contienne le point P_1 et P_2 respectivement sont :

$$(4.12)\qquad \varkappa_4 + \varkappa_6 = \varkappa_2 + 4\varkappa + 2,$$

$$(4.12')\qquad \varkappa_4 + \varkappa_2 = \varkappa_6 + 4\varkappa + 2;$$

pour

$$\varkappa_2 = \varkappa_6$$

elle contient les deux points P_1 et P_2.

Les quadriques osculatrices aux surfaces réglées décrites par $A_0 A_2$ et $A_0 A_3$ respectivement, lorsque A_0 décrit la courbe Γ_0 présentent aussi un intérêt géométrique. Soit $M = A_0 + \lambda A_2$ un point courant de la génératrice de la première surface réglée $(\Gamma_0, A_0 A_2)$. Pour obtenir la quadrique osculatrice à la surface $(\Gamma_0, A_0 A_2)$ au point M, partons de l'équation

$$\varphi(M, M) = a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

d'une quadrique quelconque et imposons les conditions de contact du deuxième ordre. La condition de contact d'ordre zéro, $\varphi(M, M) = 0$ conduit à : $\varphi(A_0, A_0) = 0$, $\varphi(A_0, A_2) = 0$ et $\varphi(A_2, A_2) = 0$ qui donnent : $a_{00} = a_{02} = a_{22} = 0$.

La condition de contact du premier ordre : $\varphi(M, dM) = 0$ conduit à : $\varphi(A_0, dA_0) = 0$, $\varphi(A_0, dA_2) + \varphi(dA_0, A_2) = 0$ et $\varphi(A_2, dA_2) = 0$ qui donnent :

$$a_{01} = 0,\ a_{03} = -1,\ a_{12} = \varkappa_3,\ a_{23} = \varkappa_1.$$

Enfin, la condition de contact du deuxième ordre : $\varphi(M, d^2 M) + \varphi(dM, dM) = 0$ conduit aux relations : $\varphi(A_0, d^2 A_0) + \varphi(dA_0, dA_0) = 0$; $2\varphi(dA_0, dA_2) + \varphi(A_0, d^2 A_2) + \varphi(A_2, d^2 A_0) = 0$, et $\varphi(dA_2, dA_2) + \varphi(A_2, d^2 A_2) = 0$, qui donnent :

$$a_{11} = \varkappa_2,\ a_{13} = \frac{\dot{\varkappa}_3}{2\varkappa_3} - 2\varkappa,\ a_{33} = -\varkappa_2 - \frac{2\varkappa\varkappa_1}{\varkappa_3} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3}\right) + \frac{\dot{\varkappa}_1}{\varkappa_3} - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_3}.$$

On obtient ainsi l'équation de la quadrique osculatrice à la surface réglée $(\Gamma_0, A_0 A_2)$:

$$(4.13)\qquad \varkappa_2 (x^1)^2 + 2\varkappa_3 x^1 x^2 + \left(\frac{\dot{\varkappa}_3}{\varkappa_3} - 4\varkappa\right) x^1 x^3 + 2\varkappa_1 x^2 x^3 - \\ - 2\left(\varkappa_2 + 2\varkappa\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3} - \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3}\right) - \frac{\dot{\varkappa}_1}{\varkappa_3} + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_3}\right)(x^3)^2 - 2x^3 x^0 = 0.$$

L'intersection de cette quadrique avec le plan $x^3 = 0$ est formée de deux droites : $x^1 = x^3 = 0$, c'est-à-dire $A_0 A_2$ et une autre droite (D), d'équations

$$\varkappa_2 x^1 + 2\varkappa_3 x^2 = x^3 = 0.$$

La droite (D), située dans le plan $x^3 = 0$, coupe l'arête $A_1 A_2$ au point $L(0, 2\varkappa_3, -\varkappa_2, 0)$. Nous obtenons ainsi immédiatement une interprétation du rapport $\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}$:

$$(4.14)\qquad [A_1, A_2, U_{12}, L] = -2\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}.$$

D'une manière analogue nous trouvons l'équation de la quadrique osculatrice à la surface réglée $(\Gamma_0, A_0 A_3)$

$$(4.15)\qquad \varkappa_1 (x^1)^2 + \left(\varkappa_1 + 2\frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} + \frac{2\varkappa\varkappa_2}{\varkappa_3} - \frac{\dot{\varkappa}_2}{\varkappa_3} + \frac{\varkappa_6}{\varkappa_3}\right)(x^2)^2 + \\ + 2\left(\frac{\dot{\varkappa}_3}{2\varkappa_3} - 2\varkappa - 1\right) x^1 x^2 + 2\varkappa_3 x^1 x^3 - 2\varkappa_2 x^2 x^3 - 2x^2 x^0 = 0.$$

La section de cette quadrique avec le plan $x^2 = 0$ donne la droite $A_0 A_3$ et une autre droite (D') d'équations

$$\varkappa_1 x^1 + 2\varkappa_3 x^3 = x^2 = 0.$$

La droite (D') coupe l'arête $A_1 A_3$ au point $L'(0, 2\varkappa_3, 0, -\varkappa_1)$, ce qui fournit une interprétation du rapport $\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}$:

$$(4.16)\qquad [A_1, A_3 ; U_{13}, L'] = -2\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}.$$

Considérons aussi la surface réglée $(\Gamma_1, A_1 A_2)$ engendrée par la droite $A_1 A_2$ lorsque A_1 décrit la courbe Γ_1. Si $M = A_1 + \lambda A_2$ est un point courant de la génératrice $A_1 A_2$, le plan tangent à $(\Gamma_1, A_1 A_2)$ en M est déterminé par A_1, A_2 et dM, et la condition que cette surface réglée soit développable est équivalente à la condition d'existence d'un point M pour lequel

$$dM = \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2,$$

où ρ_1, ρ_2 sont des formes de Pfaff. En faisant les calculs, on obtient : $\lambda = -\frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} = -\frac{\varkappa_4}{\varkappa_5}$ et, implicitement, la condition

$$\frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} = \frac{\varkappa_4}{\varkappa_5}. \tag{4.17}$$

Un autre type intéressant de variétés V sont celles dont la courbe Γ_0 décrite par A_0 est une droite. Cela signifie que la tangente à la courbe Γ_0 dans chacun de ses points est stationnaire, c'est-à-dire

$$d^2 A_0 = \lambda A_0 + \mu\, dA_0.$$

En ayant égard aux formules (2.5), la condition est

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0. \tag{4.18}$$

Il nous semble intéressant aussi de chercher les variétés V pour lesquelles, dans le réseau R (3.8), il y a des quadriques par rapport auxquels le tetraèdre canonique de référence soit autopolaire. Cela revient à annuler — dans l'équation (3.8) — les coefficients des termes en $x^i x^j$, avec $i \neq j$. On obtient les conditions

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa_5 = \varkappa_6 = 0, \quad \nu(2\varkappa + 1) = -\mu. \tag{4.19}$$

Il suit que les variétés cherchées sont caractérisées par (4.19) et les quadriques respectives de R forment le faisceau

$$\lambda[(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2] + \nu[\varkappa_4 (x^1)^2 - (4\varkappa + 3)(x^3)^2 + (x^0)^2] = 0. \tag{4.20}$$

Nous déterminons maintenant les cônes de ce faisceau :

$$\begin{aligned} &(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0, \text{ pour } \nu = 0, \\ &-\varkappa_4 (x^2)^2 + (\varkappa_4 - 4\varkappa - 3)(x^3)^2 + (x^0)^2 = 0, \text{ pour } \lambda = -\nu\varkappa_4, \\ &\varkappa_4 (x^1)^2 - (4\varkappa + 3)(x^3)^2 + (x^0)^2 = 0, \text{ pour } \lambda = 0, \\ &(\varkappa_4 - 4\varkappa - 3)(x^1)^2 - (4\varkappa + 3)(x^2)^2 + (x^0)^2 = 0, \text{ pour } \lambda = -\nu(4\varkappa - 3) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Ils ont leurs sommets, respectivement en A_0, A_1, A_2, A_3. Nous avons obtenu ainsi une interprétation des sommets du repère canonique pour ce type particulier de variétés.

§ 5. *Variétés uniparamétriques de coniques*

La théorie construite aux paragraphes antérieurs s'applique, évidemment, aussi à l'étude des variétés engendrées par des coniques — il s'agit d'une simple traduction par dualité. Voilà pourquoi nous considérons utile de considérer ces variétés et d'esquisser, par notre méthode, les résultats, obtenus par une autre voie, de A. Kawaguchi [11].

Nous pouvons considérer comme coordonnées de la conique les coefficients de son équation tangentielle dans l'espace. A cet effet, rapportons l'espace projectif planaire à trois dimensions P_3, au repère $\{a^\alpha, u\}$

$(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ associé par dualité au repère $\{A_\alpha, U\}$; un plan générique $m(\xi_\alpha)$ de P_3 sera donné par $m = \xi_\alpha a^\alpha$, et une conique sera représentée par l'équation

$$q = B^{\alpha\beta}\xi_\alpha \xi_\beta = 0 \quad \text{avec} \quad |B^{\alpha\beta}| = 0. \tag{5.1}$$

Dans l'espace S_9^* associé à P_3 planaire, nous avons le repère $b = \{b_{\alpha\beta}, e\}$ $(b_{\beta\alpha} = b_{\alpha\beta})$ et un point générique de S_9^* est

$$q = B^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}. \tag{5.2}$$

A la transformation projective infinitésimale ponctuelle de P_3, $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$, correspond, par dualité, la transformation infinitésimale projective planaire $da^\alpha = -\omega_\beta^\alpha a^\beta$, la matrice de cette transformation, $-\{\omega_\beta^\alpha\}$ étant obtenue de la matrice $\{\omega_\alpha^\beta\}$ en prenant sa transposée et changeant les signes [15]. Il suit que les équations de mouvement du repère correspondant de S_9^* sont

$$db_{\lambda\mu} = \omega_\lambda^\alpha b_{\alpha\mu} + \omega_\mu^\beta b_{\lambda\beta}. \tag{5.3}$$

Si l'on considère maintenant une variété V_1 de coniques à un paramètre, son repère Frenet sera le dual de celui de la variété V de cônes quadratiques, et les formules de Frenet seront

$$\begin{aligned} \frac{da^0}{d\sigma} &= (3\varkappa + 1)a^0 - \varkappa_4 a^1 - \varkappa_5 a^2 - \varkappa_6 a^3, \\ \frac{da^1}{d\sigma} &= -a^0 - \varkappa a^1 + \varkappa_1 a^2 - \varkappa_2 a^3, \\ \frac{da^2}{d\sigma} &= -\varkappa_1 a^1 - \varkappa a^2 - \varkappa_3 a^3, \\ \frac{da^3}{d\sigma} &= -\varkappa_2 a^1 - \varkappa_3 a^3 - (\varkappa + 1)a^3. \end{aligned} \tag{5.4}$$

En S_9^* les formules de Frenet sont

$$\frac{db_{00}}{d\sigma} = -2(3\varkappa + 1)b_{00} + 2b_{01},$$

$$\frac{db_{01}}{d\sigma} = \varkappa_4 b_{00} - (2\varkappa + 1)b_{01} + \varkappa_1 b_{02} + \varkappa_2 b_{03} + b_{11},$$

$$\frac{db_{02}}{d\sigma} = \varkappa_5 b_{00} - \varkappa_1 b_{01} - (2\varkappa + 1)b_{02} + \varkappa_3 b_{03} + b_{12},$$

$$
(5.5)\quad
\begin{aligned}
\frac{db_{03}}{d\sigma} &= \varkappa_6\, b_{00} + \varkappa_2\, b_{01} + \varkappa_3\, b_{02} - 2\varkappa b_{01} + b_{13}\,,\\
\frac{db_{11}}{d\sigma} &= 2\varkappa_4\, b_{01} + 2\varkappa b_{11} + 2\varkappa_1\, b_{12} + 2\varkappa_2\, b_{13}\,,\\
\frac{db_{12}}{d\sigma} &= \varkappa_5\, b_{01} + \varkappa_4\, h_{02} - \varkappa_1\, b_{11} + 2\varkappa\, b_{12} + \varkappa_3\, b_{13} + \varkappa_1\, b_{22} + \varkappa_2\, b_{23}\,,\\
\frac{db_{13}}{d\sigma} &= \varkappa_6\, b_{01} + \varkappa_4\, b_{03} + \varkappa_2\, b_{11} + \varkappa_3\, b_{12} + (2\varkappa + 1)\, b_{13} + \varkappa_1\, b_{23} + \varkappa_2\, b_{33}\,,\\
\frac{db_{22}}{d\sigma} &= 2\varkappa_5\, b_{02} - 2\varkappa_1\, b_{12} + 2\varkappa b_{22} + 2\varkappa_3\, b_{23}\,,\\
\frac{db_{23}}{d\sigma} &= \varkappa_6\, b_{02} + \varkappa_5\, b_{03} + \varkappa_2 b_{12} - \varkappa_1\, b_{13} + \varkappa_3\, b_{22} + (2\varkappa + 1)\, b_{23} + \varkappa_3\, b_{33}\,,\\
\frac{db_{23}}{d\sigma} &= 2\varkappa_6\, b_{03} + 2\varkappa_2\, b_{13} + 2\varkappa_3\, b_{23} + 2\,(\varkappa + 1)\, b_{33}\,.
\end{aligned}
$$

A. Kawaguchi démontre que, pour la transformation projective unimodulaire

$$\bar{a}_\nu = l^\mu_\nu\, a_\mu\,,$$

où

$$\det |l^\mu_\nu| = 1\,,$$

tous les déterminants du type

$$|a_\nu,\ da_\nu,\ d^2 a_\nu,\ d^r a_\nu| \qquad (r \geqslant 3)$$

sont invariants. Il calcule ensuite quelques expressions différentielles invariantes, à l'aide desquelles il trouve deux invariants associés à la surface développable engendrée par le plan de la conique.

Calculons, nous aussi, ces expressions invariantes. A cet effet remarquons qu'au cône local $C \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ de sommet A_0 correspond, par dualité, une conique locale située dans le plan a^0. Nous calculerons les expressions invariantes pour le plan a^0 de la conique locale. Considérons, premièrement, l'expression ψ_3 donnée par la relation

$$(\psi_3)^2 \equiv (g\, d\sigma)^6 = \varepsilon \left| a^0,\ \frac{da^0}{d\sigma},\ \frac{d^2 a^0}{d\sigma^2},\ \frac{d^3 a^0}{d\sigma^3} \right| d\sigma^6, \qquad \varepsilon^2 = 1,$$

où $g = g(\sigma)$ est une fonction d'un argument σ. Parce que $da^0 = -\omega^0_\alpha a^\alpha$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$, nous avons

$$\frac{da^0}{d\sigma} = -\frac{\omega^0_\alpha}{d\sigma} a^\alpha = p^0_\alpha a^\alpha,$$

où nous avons noté $p^0_\alpha = -\dfrac{\omega^0_\alpha}{d\sigma}$.

En général, nous poserons:

$$(5.6)\qquad p^\mu_\nu = -\frac{\omega^\mu_\nu}{d\sigma}\,,$$

ceux-ci étant justement les coefficients des formules (5.4), ainsi que

$$(5.7)\qquad \frac{da^\mu}{d\sigma} = \dot{a}^\mu = p^\mu_\nu a^\nu\,.$$

Nous pouvons supposer aussi avoir attaché à $\dfrac{da^0}{d\sigma}$ le „vecteur" p^0_α.

Ensuite nous avons

$$\frac{d^2 a^2}{d\sigma^2} = \dot{p}^0_\alpha a^\alpha + p^0_\alpha \frac{da^\alpha}{d\sigma} = (\dot{p}^0_\beta + p^0_\alpha p^\alpha_\beta)\, a^\beta\,.$$

En notant

$$(5.8)\qquad \nabla p_\beta = \dot{p}^0_\beta + p^0_\alpha p^\alpha_\beta\,,$$

nous obtenons

$$\ddot{a}^0 = \nabla p_\beta a^\beta = q_\beta a^\beta\,,$$

où nous avons noté

$$(5.8')\qquad q_\beta = \nabla p_\beta\,.$$

D'une manière analogue

$$\frac{d^3 a^0}{d\sigma^3} = (\dot{q}_\gamma + q_\beta p^\beta_\gamma)\, a^\gamma = \nabla q_\gamma a^\gamma\,,$$

où

$$(5.9)\qquad \nabla \dot{q}_\gamma = q_\gamma + q_\beta p^\beta_\gamma.$$

Donc $\dfrac{d^3 a^0}{d\sigma^3} = \nabla q_\gamma a^\gamma = \nabla^{(2)} p_\gamma a^\gamma = \rho_\gamma a^\gamma$; nous avons ainsi:

$$g = (\varepsilon\, |a^0,\ p^0_\alpha a^\alpha,\ \nabla p_\beta a^\beta,\ \nabla^{(2)} p_\gamma a^\gamma|)^{1/6} =$$

$$= (p^0_\alpha\, \nabla p_\beta\, \nabla^{(2)} p_\gamma\, \varepsilon\, |a^0,\ a^\alpha,\ a^\beta,\ a^\gamma|)^{1/6} = (p^0_\alpha\, \nabla p_\beta\, \nabla^{(2)} p_\gamma\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma})^{1/6}$$

et, à cause du fait que $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ est totalement antisymétrique, nous avons

$$g = (\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\, p^0_{[\alpha}\, \nabla p_\beta\, \nabla^{(2)} p_{\gamma]})^{1/6}.$$

D'ici il résulte

$$(5.10) \qquad (\psi_3)^2 = (g\, d\sigma)^6 = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\, p^0_{[\alpha}\, \nabla p_\beta\, \nabla^{(2)} p_{\gamma]}\, d\sigma^6 .$$

D'une manière analogue, avec la notation $\dfrac{d^5 a^0}{d\sigma^5} = \nabla^{(4)} p_\delta\, a^\delta$, on obtient

$$(5.11) \qquad \psi'_5 = \varepsilon\, |\, a^0,\ da^0,\ d^2 a^0, d^3 a^0\, | = \varepsilon^{\alpha\beta\delta}\, p^0_{[\alpha}\, \nabla p_\beta\, \nabla^{(4)} p_{\delta]}\, d\sigma^8 = A\, d\sigma^8$$

où nous avons noté par A une fonction qui contient les dérivées de a^0 jusqu'au V-ième ordre.

Kawaguchi considère une autre forme différentielle, dont l'expression, avec nos notations, est

$$(5.12) \qquad \psi_5 = \frac{1}{\psi_3}\left[\psi'_5 + \frac{5}{9}(d\psi_3)^2\right] - \frac{10}{3}\, d^2\psi_3 .$$

On observe qu'elle peut être mise sous la forme symbolique $\psi_5 = B\, d\sigma^5$, où nous avons noté par B une fonction qui contient les dérivées jusqu'au V-ième ordre. Évidemment, nous avons tous les éléments pour le calcul effectif de ψ_5.

En notant par y^λ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) les coordonnées d'un point courant de l'arête de rebroussement de la surface développable et par l_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3$) les coordonnées tangentielles du plan a^0 de la conique, Kawaguchi donne l'expression de y^λ sous la forme $y^\lambda = \dfrac{\varepsilon}{g^3}\left(l_\nu, \dfrac{dl_\nu}{d\sigma}, \dfrac{d^2 l_\nu}{d\sigma^2}\right)$. Il considère ensuite la forme différentielle $\psi_6 = d^3 y^\lambda\, d^3 l_\lambda$. Après divers calculs, nous pouvons obtenir pour ψ_6 une expression

$$(5.13) \qquad \psi_6 = C\, d\sigma^6$$

où l'on a noté par C une fonction qui contient les dérivées de a^0 jusqu'au VI-ième ordre.

Notons, avec Kawaguchi,

$$(5.14) \qquad \psi_3 = g^3\, d\sigma^3,\ \frac{\psi_6}{\psi_3} = -\theta\, d\sigma^3,\ \frac{\psi_5}{\psi_3} = -q\, d\sigma^2 .$$

Parce que tous les ψ_i sont invariants aux transformations projectives et parce que, par la façon dont ils ont été obtenus, ils sont attachés au plan a^0, donc à la surface développable déterminée par la famille uniparamétrique de plans $a^0(\sigma)$, il suit que θ et q sont des invariants qui dépendent de cette surface développable et qui peuvent être calculés effectivement, par l'intermédiare des formules (5.14). Introduisons, d'après Kawaguchi, un nouveau paramètre σ^*, tel que

$$(5.15) \qquad g\, d\sigma = \sigma^*$$

et désignons par σ^*, la „longueur projective" de la surface développable, calculée à partir d'une origine σ^*_0. Pour la commodité de la notation, on peut noter ce paramètre seulement par σ, en renonçant à l'astérisque.

Maintenant, on peut déterminer, dans le plan $a^0(\sigma)$ le triangle de référence considéré par Kawaguchi, dont les côtés sont les droites :

(T) l'intersection des plans $a^0(\sigma)$ et $da^0(\sigma)$ — la tangente à l'arête de rebroussement de la surface développable ;

(N) l'intersection des plans $a^0(\sigma)$ et $\xi(\sigma) = \dfrac{q}{2} a^0(\sigma) + \dfrac{d^2 a^0(\sigma)}{d\sigma^2}$ la normale projective à l'arête de rebroussement ;

(C) l'intersection des plans $a^0(\sigma)$ et

$$\eta(\sigma) = \frac{\theta}{2} a^0(\sigma) + \frac{q}{2}\frac{da^0(\sigma)}{d\sigma} + \frac{d^3 a^0(\sigma)}{d\sigma^3} .$$

Par la manière dont elles ont été obtenues, on voit clairement que les côtés de ce repère sont invariantes aux transformations projectives, c'est donc un repère attaché intrinsèquement à la surface développable.

Les autres cinq invariants considérés par Kawaguchi sont, par définition, les coefficients I^{ab} qui interviennent dans l'équation tangentielle de la conique (située dans le plan a^0), rapportée au repère (T, N, C), normés par la condition

$$(5.16) \qquad \det |\, I^{ab}\, | = 1 .$$

Si le repère du plan a^0 est quelconque, alors ils peuvent être trouvés de la façon suivante :

Soit $a_{ik}\, x^i x^k = 0$, l'équation de la conique dans le plan et $\lambda_i^{(m)}$ ($i, m = 1, 2, 3$) les coordonnées des droites (T), (N), (C), rapportées au repère quelconque considéré et normés convenablement. Si nous notons $\Delta = |\, a_{ik}\, |$ et si A^{ik} sont les compléments algébriques divisés par Δ des éléments a_{ki} de Δ, alors l'équation de la conique rapportée au repère (T, N, C) est

$$(5.17) \qquad A^{ik}\lambda_i^{(a)}\lambda_k^{(b)}\xi'_a\xi'_b = 0 ,$$

d'où il résulte

$$(5.18) \qquad I^{ab} = A^{ik}\lambda_i^{(a)}\lambda_k^{(b)} \quad (i, k, a, b = 1, 2, 3)$$

et la relation

$$\det |\, I^{ab}\, | = 1$$

résulte de la normalisation convenablement choisie plus haut.

Il est clair maintenant qu'on peut procéder aussi en ordre inverse, en traduisant, par dualité, les résultats de Kawaguchi pour la variété V de cônes quadratiques.

On remarque qu'en n'utilisant pas une construction directe du repère canonique et en employant un double système de coordonnées homogènes: les coefficients a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ — coordonnées de la conique dans le plan — et les coefficients a_ν $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ — coordonnées tangentielles du plan de la conique — le repère trouvé par Kawaguchi est d'ordre plus élevé — le VI-ième — tandis que le repère trouvé par nous, en utilisant la méthode du repère mobile de Cartan, est du premier ordre. Les sept invariants trouvés par Kawaguchi sont d'ordre plus élevé que les nôtres.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bogdan C. P. — *Sur les familles de coniques de l'espace ordinaire.* Bull. de l'Ec. Polyt. de Jassy, t. I, fasc. 2, 1946, p. 84—86.
2. Cartan E. — *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitée par la méthode du repère mobile.* Paris, 1937.
3. Gheorghiev Gh. — *Sulla geometria dei coni dell' S_3 euclideo.* An. şt. Univ. Iaşi, t. III, (1957), p. 125—132.
4. Георгиев Г. — *Нестационарные движения идеальной жидкости вдоль линейной неголономной поверхности.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. V (1959), p. 51—65.
5. Gheorghiev Gh. et Popa I. — *Géométrie projective différentielle des variétés de cônes* (I, II), C. R. Acad. Sci. Paris, T. 251 (1960), p. 1208—1210; 1268—1269.
6. Gheorghiev Gh. et Popa I. — *Sur une variété unidimensionnelle non holonome de A. Myller.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. VI (1960), p. 59—75.
7. Георгиев Г. и Попа И. — *Проективно-дифференциальная геометрия многообразий конусов.* Известия на маг. институт Бълг. Акад. на науките, т. V (1961), стр. 83—99.
8. Георгиев Г. — *Дифференциальная геометрия многообразий конусов в трехмерном пространстве.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. VIII (1962), fasc. 2, p. 353—367.
9. Haimovici Adolf — *Sur la notion de quadrique dans un espace à connexion projective.* Bull. Math. de la Soc. Roum. des Sciences, t. 46 (1—2), 1944.
10. Johnson A. Roger — *The conic as a space element.* Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. 15, (1914), p. 335—368.
11. Kawaguchi A. — *Über die Differentialgeometrie von Kegelschnitten im dreidimensionalen projektiven Raume.* Journ. of the Fac. of Science Hokkaido Imperial University, ser. I, vol. I, (1930), p. 1—15.
12. Lie S., Scheffers G. — *Geometrie der Berührungstransformationen,* Leipzig, 1896.
13. Малаховский В. С. — *Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проэктивном пространстве.* Труды Томск. ун-та, 162 (1963), стр. 43—53.
14. Mayer O. — *Curs de geometrie.* Partea I. *Geometrie proiectivă.* Iaşi, 1944.
15. Mihăilescu Tiberiu — *Geometrie diferenţială proiectivă.* Bucureşti, 1958.
16. Miron R. — *Geometria unor configuraţii Myller.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. VI (1960), fasc. 3, p. 681—704.
17. Myller A. — *Le parallélisme au sens Levi-Civita dans un système de plans.* Ann. sci. Univ. Jassy, t. XIII, (1924), p. 20—34.
18. Reye Th. — *Über lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades.* Crelle's Journal für Math. vol. 82 (1877), p. 54—83.

19. Туганов Н. Г. — *О конгруэнции линий второго порядка в трехмерном проективном пространстве.* ДАН СССР, 100, II, (1955), стр. 13—15.
20. Vaisman I. — *La théorie des surfaces dans l'espace symplectique à trois dimensions.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. X (1964), fasc. 1, p. 129—158.
21. Wagner V. — *Differential geometry of non-linear non-holonomic manifolds in the three-dimensional Euclidean space.* Математический сборник, 8 (50), (1940), стр. 3—40.

VARIETĂŢI UNIPARAMETRICE DE CONURI PĂTRATICE ÎN SPAŢIUL PROIECTIV TRIDIMENSIONAL

Rezumat

Considerînd cei zece coeficienţi din ecuaţia unui con din spaţiul proiectiv tridimensional P_3, drept coordonate ale unui punct în spaţiul proiectiv cu nouă dimensiuni S_9, varietăţii uniparametrice V de conuri pătratice din P_3 îi corespunde în S_9 o curbă V. Studiul varietăţii V din P_3 este făcut prin intermediul studiului curbei V din P_9. Folosind metoda reperului mobil a lui Cartan, se determină reperul canonic al varietăţii şi se stabileşte invariantul diferenţial şi cei şapte invarianţi finiţi. Se dau interpretări geometrice reperului şi invarianţilor. Se studiază apoi unele figuri asociate varietăţii V, precum şi diverse varietăţi particulare. În ultimul paragraf se schiţează, prin metoda autorului, în condiţii mai avantajoase, rezultatele obţinute pe altă cale de A. Kawaguchi pentru varietăţile uniparametrice de conice.