CONGRUENCES DE DROITES A GROUPES CONTINUS DE DÉFORMATIONS OU COLLINÉATIONS PROJECTIVES EN ELLES-MÊMES

PAR

F. MARCUS

On a étudié jusque maintenant les déformations infinitésimales des surfaces mais d'après ce que nous connaissons on n'a pas encore posé le même problème pour les congruences de droites. C'est ce que nous nous proposons de faire dans le présent travail.

Nous dirons qu'une congruence de droites, à nappes focales distinctes et non-dégénérées, admet une déformation projective en elle-même (d.p.), si la transformation infinitésimale qui porte en lui-même l'élément linéaire de Fubini d'une des nappes focales porte en lui-même l'élément linéaire de Terracini de la congruence.

D'après Fubini [1] une surface peut posséder tout au plus un groupe continu G_2 de déformations projectives en elle-même.

Une congruence de droites peut donc admettre tout au plus un groupe continu à deux paramètres de déformations projectives en elle-même.

Soit $x(u, v)$ la première nappe focale d'une congruence Γ, que nous supposons rapportée aux lignes asymptotiques et suffisamment régulière. D'après A. Terracini [2], l'élément linéaire de la congruence est dans ce cas

$$E = \frac{1}{4}\,\frac{[2W(B\,du + A\,dv)^2 - N\,du\,dv]\,du\,dv}{B^2\,du^2 - A^2\,dv^2}, \tag{1.1}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} W &= \left(\frac{A_v + B\gamma}{A}\right)_u - \left(\frac{B_u + A\beta}{B}\right)_v, \\ N &= \lambda\mu + 2A\left(\mu_u + 2Ap_{11} - \mu\,\frac{B_u - A\beta}{B}\right) - \\ &\qquad - 2B\left(\mu_v + 2Bp_{22} - \mu\,\frac{A_v + B\gamma}{A}\right), \end{aligned}\right. \tag{1.2}$$

$$\left|\begin{array}{l} \mu = -A_u - A\theta_u - B_v - B\theta_v + A\dfrac{B_u + A\beta}{B} - B\dfrac{A_v + B\gamma}{A}, \\ \lambda = -A_u - A\theta_u - B_v - B\theta_v - A\dfrac{B_u + A\beta}{B} - B\dfrac{A_v + B\gamma}{A}, \end{array}\right.$$

et

$$\frac{du}{A} = \frac{dv}{B} \tag{1.3}$$

étant le système de courbes enveloppées par les rayons de Γ sur $x(u, v)$, β, γ, θ_u, θ_v, p_{11}, p_{22} les coefficients de la théorie des surfaces [3].

2. Une transformation infinitésimale asymptotique d'une surface en elle-même est représentée par le symbole

$$X = 2k(u)\frac{\partial}{\partial u} + 2l(v)\frac{\partial}{\partial v}, \tag{2.1}$$

ou par les équations

$$\bar{u} = u + 2\varepsilon k(u), \quad \bar{v} = v + 2\varepsilon l(v), \tag{2.2}$$

où ε est un paramètre indépendant de u, v, dont on néglige le carré.

Si la surface admet un groupe G_1 de d.p. en elle-même alors on peut, par un changement convenable des paramètres u, v, réduire dans notre cas le symbole X à la forme

$$X = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}. \tag{2.3}$$

Les trajectoires et les transformations du groupe deviennent alors

$$\left\{\begin{array}{l} u - v = \text{const.} \\ \bar{u} = u + t, \ \bar{v} = v + t. \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Les surfaces qui admettent ∞^1 déformations projectives en elles-mêmes sont nommées par Fubini-Čech [3] surfaces d'espèce A_i et B_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ et elles sont énumérées dans [3] pages 447 — 456.

Si la surface admet un groupe G_2 de d.p. en elle-même, alors on peut réduire le symbole X à la forme

$$X = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}. \tag{2.5}$$

Les surfaces qui admettent un groupe G_2 de déformations projectives en elles-mêmes sont données dans [3], p. 393 — 394.

Supposons tout d'abord que la nappe focale de la congruence admet un groupe G_1 de déformations projectives en elle-même. Les nappes focales

de la congruence étant distinctes, il résulte que $x(u, v)$ peut appartenir seulement aux surfaces d'espèce B_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. De (2.3) et (2.4) il résulte $k = l = 1$, $d\bar{u} = du$, $d\bar{v} = dv$. La transformation infinitésimale (2.3) devant porter en lui-même l'élément linéaire (1.1) de la congruence, il résulte, en observant que $AB \neq 0$,

$$\overline{W} = W \text{ et } \overline{N} = N. \tag{2.6}$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{ll} W_u + W_v = 0, & N_u + N_v = 0, \\ A_u + A_v = 0, & B_u + B_v = 0. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Par conséquent, W, N, A, B sont comme β et γ fonctions de l'argument $u - v$.

Si l'on cherche les conditions afin que la congruence formée par les courbes conjuguées aux trajectoires de $x(u, v)$ admette une déformation projective en elle-même, on trouve

$$\left\{\begin{array}{ll} W'_u + W'_v = 0; & N'_u + N'_v = 0, \\ A_u + A_v = 0; & B_u + B_v = 0, \end{array}\right. \tag{2.8}$$

où W' et N' s'obtiennent de W et N en changeant B en $-B$.

Dans ce travail nous nous occupons seulement des congruences déterminées par les tangentes aux trajectoires du groupe et aux courbes conjuguées aux trajectoires.

Congruences W

3. Une des plus intéressantes déformations projectives d'une surface en elle-même, est celle dans laquelle les points de la surface parcourent des distances infinitésimales de longueurs projectives égales dans la métrique définie par l'élément linéaire projectif de Fubini. Elle a été nommée par Bortolotti [4] *translation projective* (scorrimento proiettivo). D'après cet auteur, la condition nécessaire et suffisante afin qu'une déformation projective soit une *translation projective* est que les trajectoires du groupe correspondant soient des lignes pangéodésiques.

Dans [5] et [6] nous avons démontré le théorème suivant:

Pour qu'une déformation projective d'une surface en elle-même soit une translation projective il est nécessaire et suffisant que ses trajectoires appartiennent à une congruence W.

Ce théorème nous a permis de déterminer toutes les surfaces qui admettent des translations projectives. Ces surfaces satisfont aux conditions

$$\beta_v = \gamma_u; \quad \beta + \gamma = \delta \quad (\delta = \text{const.}) \tag{3.1}$$

et elles se trouvent parmi les classes B_1, B_2 et B_3 [6] auxquelles il faut ajouter les surfaces B_3 $n \cdot 22^\circ$ avec $n = \pm 1$ et les surfaces de coïncidence

B_3 $n.6°$ avec $F = k$; $b = 0$; $a = -\dfrac{3k+1}{2}$ et B_3 $n.8°$ avec $F = k$, $b = 6(1-a)k^2 - 2(1-a)k$ que nous avons omis dans [5] et [6].

Supposons, pour simplicité, que les coordonnées x soient normalisées d'après Wilczynski. Elles satisfont donc au système complètement intégrable

$$x_{uu} = \beta x_v + p_{11} x; \quad x_{vv} = \gamma x_u + p_{22} x. \tag{3.2}$$

Par conséquent les expressions bien connues L et M deviennent [3]

$$L = -\beta_v - 2p_{11}; \quad M = -\gamma_u - 2p_{22} \tag{3.3}$$

et de (1.2) on obtient

$$N = 4(p_{11} - p_{22}) + \gamma^2 - \beta^2 + 4(\gamma' + \beta'). \tag{3.4}$$

où l'accent indique la dérivation en rapport avec l'argument $u - v$. Mais N est une fonction de $u - v$. Donc

$$p_{11u} + p_{11v} = p_{22u} + p_{22v}. \tag{3.5}$$

Réciproquement, si la condition (3.5) est satisfaite, alors on déduit que N dépend seulement de l'argument $u - v$.

La condition (3.5) est identiquement satisfaite si $p_{11} = p_{11}(u - v)$, $p_{22} = p_{22}(u - v)$. Mais alors les expressions L et M sont aussi fonctions de l'argument $u - v$, et ça veut dire que le groupe G_1 est un groupe de collinéations [1].

Nous dirons dans ce cas *que la congruence admet un groupe G_1 de collinéations en elle-même*. Quoique le groupe G_1 de collinéations en elle-même est considéré dans [3] comme trivial, remarquons que *les seules congruences qui admettent ∞^1 collinéations en elles-mêmes sont celles dont une de leurs nappes focales est une des surfaces d'espèce B_3 $n.$ 12°, 13°, 23° avec $b = 0$, 22° avec $a = \pm 1$, $b = 0$ et les surfaces de coïncidence ($F = k \neq 0$) d'espèce B_1 $n.6°$ avec $b = 0$, $a = -\dfrac{3k+1}{2}$.*

Excluons le groupe de collinéations. De (2.3), par intégration nous aurons

$$p_{11} - p_{22} = 2\varphi(u - v), \tag{3.6}$$

et de (3.3)

$$L - M = \varphi(u - v), \tag{3.7}$$

sans que L et M soient des fonctions du même argument.

En tenant compte des expressions β, γ qui déterminent les surfaces qui admettent des translations projectives [5] et [6] et les expressions L et M correspondantes [3], il résulte que ces conditions sont remplies seulement par les surfaces d'espèce B_2 $n.$ 8° (surfaces de coïncidence) avec

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \beta = 2k + b; \quad \gamma = -k, \quad (k = \text{const.}) \\ L = u - \dfrac{b^2}{2} - 3k^2 - 2bk, \\ M = v - 3k^2 - bk, \\ 12k^2 - 4k - b = 0 \end{cases}$$

et toutes les surfaces d'espèce B_2 $n.$ 9° déterminées par

$$(\sigma)\quad \begin{cases} \beta = -\dfrac{a}{u-v} + b; \quad \gamma = \dfrac{a}{u-v} + b; \\ L = u - \dfrac{3}{2}\dfrac{a^2}{(u-v)^2} + \dfrac{ab}{u-v} + \dfrac{1}{2}b^2, \\ M = v - \dfrac{3}{2}\dfrac{a^2}{(u-v)^2} - \dfrac{ab}{u-v} + \dfrac{1}{2}b^2. \end{cases}$$

Nous avons donc le résultat:

Les seules congruences W qui admettent un groupe G_1 de déformations projectives proprement dites en elles-mêmes sont déterminées par les trajectoires du groupe G_1 de translations projectives des surfaces (α) et (σ).

Congruences non W

4. Dans ce cas $W = \beta' + \gamma' \neq 0$. De (1.2) nous avons

$$N = \gamma^2 - \beta^2 + 4(\beta' + \gamma') + 4(p_{11} - p_{22}). \tag{4.1}$$

En tenant compte de (2.7) il résulte, comme plus haut

$$p_{11u} + p_{11v} - p_{22u} - p_{22v} = 0. \tag{4.2}$$

En excluant les collinéations, nous avons dans ce cas aussi

$$L - M = \varphi(u - v) \tag{4.3}$$

sans que L et M soient des fonctions du même argument. Il nous reste à vérifier s'il existe des surfaces $x(u, v)$ qui satisfont à ces conditions.

On trouve [3] que ces conditions sont satisfaites par les surfaces d'espèce B_2 $n.8°$, $a = -1$, c'est-à-dire par les surfaces

$$\beta = 2F + b, \quad \gamma = -F,$$

$$L = u - 3F^2 - 2bF - \frac{b^2}{2}, \quad M = v - 3F^2 - bF, \tag{4.4}$$

où F est une fonction de $x = u - v$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^3F}{dx^3} - 6bF\frac{dF}{dx} - 4x\frac{dF}{dx} + 12F^2 - 4F - b = 0. \tag{4.5}$$

Nous avons donc le résultat suivant :

Les seules congruences non W qui admettent un groupe G_1 de d.p. en elles-mêmes, sont déterminées par les tangentes aux trajectoires du groupe G_1 de d.p. des surfaces (4.4), (4.5) *en elles-mêmes, qui dépendent de 4 constantes arbitraires.*

5. Considérons maintenant la congruence déterminée par les tangentes aux courbes conjuguées aux trajectoires du groupe de d.p. de la nappe focale $x(u, v)$ en elle-même. Son élément linéaire s'obtient de (1.1) en posant

$$\begin{cases} A = 1, \ B = -1, \ W' = -\gamma' - \beta', \\ N' = \gamma^2 - \beta^2 + 4(p_{11} - p_{22}), \end{cases} \tag{5.1}$$

et l'on voit tout de suite que si la congruence est W, alors les trajectoires appartiennent aussi à une congruence W.

Nous avons donc le résultat :

Les congruences déterminées par les tangentes aux courbes $u + v = const.$ des surfaces (α) *et* (σ) *admettent, elles aussi, des d.p. propres en elles-mêmes.*

Ce résultat était à prévoir, parce qu'on a montré dans [5] ou [6] que les surfaces qui admettent des translations projectives sont de type Terracini-Cartan et, par conséquent, [7] les tangentes aux courbes $du^2 - dv^2 = 0$ déterminent deux congruences qui ont le même élément linéaire de Terracini.

Supposons maintenant $W_1 \neq 0$. Les conditions (2.7) sont vérifiées dans ce cas aussi. Par conséquent

$$p_{11u} + p_{11v} = p_{22u} + p_{22v}, \tag{5.2}$$

d'où

$$L - M = \varphi(u - v). \tag{5.3}$$

Nous avons donc le résultat suivant :

Les surfaces (4.4) *avec* (4.5) *sont des nappes focales de deux congruences non W qui admettent un groupe G_1 de d.p. propres en elles-mêmes. Ces deux congruences ne sont pas projectivement applicables entre elles.*

Groupe à deux paramètres

6. Supposons que la nappe focale $x(u, v)$ admet un groupe G_2 de d.p. en elle-même. De (2.5) il résulte $A = u$, $B = v$. La transformation infinitésimale (2.5) porte u, v, W, N respectivement en

$$\begin{aligned} &\bar{u} = u(1 + 2\varepsilon), \ \bar{v} = v(1 + 2\varepsilon), \\ &\bar{W} = W + 2\varepsilon(uW_u + vW_v), \ \bar{N} = N + 2\varepsilon(uN_u + vN_v). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Comme l'élément linéaire de la congruence doit être porté en lui même par la transformation (2.5), il résulte

$$\begin{aligned} &2W + uW_u + vW_v = 0, \\ &uN_u + vN_v = 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

De (1.2) on a

$$W = \left(\frac{v}{u}\gamma\right)_u - \left(\frac{u}{v}\beta\right)_v,$$

et l'on doit vérifier si β et γ qui déterminent l'élément linéaire projectif des surfaces qui admettent un G_2 de d.p. en elles mêmes satisfait à la condition (6.2_1).

On vérifie tout de suite qui cette condition ne peut pas être vérifiée par $\beta = \gamma = 1$. *Donc les surfaces de coïncidence doivent être exclues de ces considérations.*

Il reste donc à considerer les autres deux classes de surfaces qui admettent un groupe G_2 de d.p. en elles-mêmes, c'est-à-dire, les surfaces avec

$$\beta = \frac{1}{\alpha(u - v)}, \ \gamma = -\frac{\alpha}{u - v} \ (\alpha = \text{const}) \tag{6.3}$$

et

$$\beta = \frac{\delta}{u - v}, \ \gamma = -\frac{\delta}{u - v}\left(\delta = \sqrt{\frac{2}{|K|}}\right) = K < 0. \tag{6.4}$$

De (1.2_1) il résulte $\alpha = 1$. En intégrant les conditions d'intégrabilité bien connues on trouve dans le premier cas

$$\begin{aligned} L &= -\frac{3}{2(u - v)^2} + au^2 + a_1 u + a_2, \\ M &= -\frac{3}{2(u - v)^2} + av^2 + a_1 v + a_2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

De (3.3) nous obtenons les valeurs correspondantes de p_{11} et p_{22}. De (1.2) il résulte

$$\begin{aligned} \mu &= -2 + \frac{u^2}{v(u - v)} - \frac{v^2}{u(u - v)}, \\ \lambda &= \frac{u^2}{v(u - v)} + \frac{v^2}{u(u - v)}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Par conséquent

$$N = \frac{8}{u-v}\left(\frac{u^2}{v}+\frac{v^2}{u}\right)+\frac{1}{(u-v)^2}\left[\frac{v^6-u^6+v^4u^2-u^4v^2+2v^5u-2u^5v}{u^2v^2}\right]- \tag{6.7}$$
$$2au^4-2a_1u^3-2a_2v^4+2a_1v^3+2a_2v.$$

En imposant maintenant à cette valeur de N de vérifier la condition (6.2_1) on trouve

$$a = a_1 = a_2 = 0. \tag{6.8}$$

De (6.5) et (3.3) *il résulte alors que* p_{11} et p_{22} *sont des fonctions de l'argument* $u-v$.

De même pour l'autre classe de surfaces (6.4) on trouve par intégration

$$L = -\frac{3}{2}\frac{\delta}{(u-v)^2}+au^2+a_1u+a_2,$$
$$M = -\frac{3}{2}\frac{\delta}{(u-v)^2}+av^2+a_1v+a_2. \tag{6.9}$$

De (3.3) et (6.9) on trouve les valeurs de p_{11} et p_{22} et de (1.2) on calcule la valeur de N, qui doit vérifier (6.2_1).

Pour qu'il soit ainsi il faut avoir

$$a = a_1 = a_2 = 0. \tag{6.10}$$

Donc p_{11} et p_{22} seront des fonctions de l'argument $u-v$. D'où le résultat suivant :

Les congruences déterminées par les trajectoires d'un groupe continu G_2 *de d.p. d'une surface en elle-même admettent seulement des collinéations en elles-mêmes.*

Remarquons encore que ces congruences ne peuvent être des congruences W [6].

7. Nous pouvons obtenir les résultats précédents en utilisant le résultat suivant de Fubini [3].

Deux surfaces S et S' sont les nappes focales de deux congruences applicables si les asymptotiques de ces surfaces se correspondent et s'il existe une fonction $\rho = \rho(u, v)$ telle que sur les deux surfaces les deux quantités

$$(\beta\rho)_v - \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)_u,$$
$$\rho^2\left(-L+\rho\beta_u-\frac{1}{2}\rho^2\beta^2+2\beta\rho_u\right)+\left[M-\frac{\gamma_v}{\rho}+\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\rho^2}+2\gamma\frac{\rho_v}{\rho^2}\right] \tag{7.1}$$

aient des valeurs égales.

Dans ce cas les deux congruences sont formées par les tangentes aux lignes $du - \rho dv = 0$ des deux surfaces.

On obtient un cas particulier important [3] si l'on suppose que les deux surfaces S et S' sont projectivement applicables. C'est le cas $\beta_v = \gamma_u$ et les deux congruences sont de type W.

De nos résultats, il résulte que les choses changent un peu si l'on considère les congruences qui admettent des déformations projectives en elles-mêmes. Quoique leurs nappes focales sont projectivement applicables, elles ne sont pas toutes, comme nous l'avons montré, des congruences W.

Soit donc S une surface qui admet un groupe continu de déformation projective en elle-même et qui est nappe focale d'une congruence déterminée par les tangentes aux lignes $du - \rho dv = 0$ de S. Si la congruence admet aussi une d. p. en elle-même, alors la transformation infinitésimale (2.1) doit porter ρ en $\bar{\rho}$. Par suite elle portera $\frac{d\bar{u}}{d\bar{v}}$ en $\frac{du}{dv}$. De (2.2) il résulte alors

$$k' = l'. \tag{7.2}$$

Si le groupe dépend d'un seul paramètre, alors on peut rendre

$$k = l = 1. \tag{7.3}$$

Soit $du - \rho dv = 0$ l'équation des trajectoires du groupe. Alors $\rho = 1$ et nous avons

$$\bar{L} = L + \varepsilon(L_u + L_v)\,;\ \bar{M} = M + \varepsilon(M_u + M_v). \tag{7.4}$$

De la seconde condition de Fubini il résulte alors

$$(L-M)_u = (M-L)_v, \tag{7.5}$$

c'est-à-dire $(L-M) = \varphi(u-v)$ et l'on obtient ainsi les résultats des 3-ème et 4-ème paragraphes.

Supposons maintenant que le groupe de déformation projective est une G_2. On peut alors rendre

$$k = u\,;\ l = v. \tag{7.6}$$

De (7.1) en remarquant que $\rho = \frac{du}{dv} = \frac{u}{v}$, il résulte

$$u^3L_u + u^2vL_v - uv^2M_u - v^3M_v = 0, \tag{7.7}$$

et en tenant compte des expressions de L et M données dans le 6-ème paragraphe, on obtient le résultat donné dans le même paragraphe.

BIBLIOGRAPHIE

1. Fubini G. — *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 43, 1919, p. 1—46.
2. Terracini A. — *Osservazioni sulla geometria proiettiva differenziale delle congruenze di rette*. Atti Istituto Veneto di Scienze, etc. T. XCIV, 1934—1935, p. 75—86.
3. Fubini G.-Cech E. — *Geometria proiettiva differenziale*. N. Zanichelli, Bologna 1927.
4. Bortolotti E. — *Sulle proprietà proiettive delle deformazioni infinitesime*, etc. R. Palermo, T. LIV, 1930, p. 97—111.
5. Marcus F. — *Cîteva contribuţii la proprietăţile proiective ale deformărilor infinit mici ale unei suprafeţe în ea însăşi*. Studii şi cercetări ştiinţifice. Matematică. Anul XII, 1961, p. 71—94. Acad. R. S. România, filiala Iaşi.
6. Marcus F. — *Sopra gli scorrimenti proiettivi*. Annali di mat. pura ed applicata, S. IV, T. LVII, 1962, p. 223—232. Bologna.
7. Marcus F. — *Une nouvelle caracterisation des réseaux et surfaces* $\mathfrak{S}$ etc. Czechoslovak Mathematical Journal, T. 7 (82), 1957. Praga, p. 308—313.

CONGRUENŢE DE DREPTE CU GRUP CONTINUU DE DEFORMĂRI SAU COLINIAŢII PROIECTIVE ÎN ELE ÎNSELE

Rezumat

Se stabileşte noţiunea de congruenţă de drepte care admite un grup continuu de deformări sau coliniaţii proiective şi se studiază în particular cazul congruenţelor determinate de traiectoriile grupului sau de conjugatele lor. Se arată că o congruenţă poate admite cel mult un grup G_2 de deformări proiective în ea însăşi, determinîndu-se toate aceste congruenţe.

PROBLEMA LUI SAINT-VENANT PENTRU BARE NEOMOGENE

DE

A. RADU

1. *Introducere*. În teoria elasticităţii, problema lui Saint-Venant este problema mixtă a întinderii, încovoierii, torsiunii şi încovoierii de către cupluri a barelor cilindrice, în ipoteza lui Clebsch. Firesc, se pot considera grupe care cuprind una, două sau trei dintre problemele simple enumerate mai sus.

În teoria liniară a elasticităţii, tensiunile care apar în problema generală a lui Saint-Venant pot fi obţinute prin însumarea tensiunilor găsite pentru fiecare dintre cele patru probleme simple. De multe ori este mai convenabil să se rezolve fiecare dintre problemele de mai sus separat.

L. M. Milne-Thomson [1], [2] şi L. Solomon [6], [7] rezolvă problema mixtă a lui Saint-Venant în cazul unui mediu izotrop omogen, atît pentru domenii simplu conexe, cît şi pentru domenii multiplu conexe, utilizînd metoda funcţiilor analitice de o variabilă complexă.

Într-o Notă anterioară [5], ne-am ocupat de problema torsiunii şi încovoierii unei bare cilindrice cu profil simplu conex, în ipoteza că materialul elastic izotrop din care este formată bara, are modulul lui Young E variabil continuu într-o secţiune transversală, iar coeficientul lui Poisson ν constant în toată bara.

Obiectul acestei lucrări este studiul problemei generale a lui Saint-Venant pentru o bară cilindrică cu baza un domeniu multiplu conex Ω, în cazul cînd materialul elastic izotrop al barei posedă neomogenitate continuă transversală. Presupunem că modulul lui Young E nu variază în lungul barei şi că pe bază este de clasă $C^1(\Omega)$, iar coeficientul lui Poisson ν este constant în toată bara. Pentru rezolvarea problemei propuse ne vom folosi de metoda funcţiilor analitice generalizate (în sens Vekua) de o variabilă complexă.

2. *Punerea problemei*. Considerăm o bară cilindrică de lungime finită l, fixată la unul din capete — baza, care este în echilibru sub